Álgebra

Michael SULLIVAN

PEARSON Custom Publishing

unitec

Laureate International Universities

Álgebra

Álgebra

Michael Sullivan
Chicago State University
ISBN: 968-880-964-0

Agradecimiento especial por su colaboración en la adaptación de esta obra a:
Karim Martínez Cerrato
Coordinadora del Departamento Físico-Matemático
Universidad Tecnológica Centroamericana

PEARSON Educación

México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

SULLIVAN, MICHAEL

Álgebra
PEARSON EDUCACIÓN, México, 2008

ISBN: 978-970-26-1526-2
Área: Matemáticas

Formato: 20 × 25.5 cm Páginas: 536

Editora: María Elena Zahar Arellano
e-mail: maria.zahar@pearson.com
Supervisor de producción: José D. Hernández Garduño

PRIMERA EDICIÓN, 2008

ISBN 10: 970-26-1526-7
ISBN 13: 978-970-26-1526-2

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 11 10 09 08

PEARSON
Educación ®

Estimados estudiantes y docentes de UNITEC:

Me da mucho gusto saludarles y poner en sus manos este libro de texto que es parte de un innovador proyecto dirigido a Ustedes.

La Universidad Tecnológica Centroamericana está comprometida desde 1987, año de su fundación, con la calidad y la excelencia académica al punto de ser un estilo de vida en permanente mejora, que les involucra a Ustedes y también a los recursos y metodologías de enseñanza y aprendizaje propios de las diversas carreras profesionales que ofrecemos.

A inicios de los 90's UNITEC incorporó el modelo educativo centrado en el estudiante y apoyado en tecnologías de vanguardia para dar respuesta a los retos que el mundo global plantea, a tal punto que actualmente esta Universidad forma profesionales y ciudadanos en Honduras que sean capaces de desenvolverse competitiva y exitosamente en los escenarios del mundo globalizado.

La alianza estratégica que hemos emprendido con el Grupo Editorial Pearson es garante de la calidad que encontrarán, no sólo en los contenidos temáticos de los libros de texto con estándares internacionales, sino también en su diseño didáctico y a la incorporación de los recursos que permitirán el trabajo autónomo y personalizado vía web, tan característico del estilo de aprendizaje en la sociedad del siglo XXI.

Este esfuerzo complementa la sistemática profesionalización de los docentes mediante el Sistema de Excelencia en la Enseñanza, conocido como Programa SENECA, que les posibilita el perfeccionamiento de su práctica, convirtiéndose en el sello de la docencia en UNITEC.

Auguro condiciones muy favorables donde el aprendizaje será inevitable, no solo durante sus años de formación profesional sino durante toda su existencia: Que les persiga el deseo por avanzar, por descubrir nuevas cosas, por ampliar el conocimiento acerca de lo que somos y a dónde vamos, pero sobre todo ayudando a construir el camino que elegimos ¡Que cosechen muchos éxitos y satisfacciones!

Fraternalmente

Román Valladares
Rector de UNITEC

CONTENIDO

TEMA 1

CAPÍTULO 2

FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS

Panorama Para ir de una isla a un poblado

Una isla se encuentra a 2 millas del punto más cercano P *de una costa recta. Un poblado está a 12 millas de dicha costa desde el punto* P.

(a) *Si una persona puede remar en un bote a una velocidad promedio de 5 millas por hora, y luego caminar a 2 millas por hora, exprese el tiempo T que tarda en ir de la isla al poblado como una función de la distancia x de* P *hasta donde la persona deja anclado el bote.*

(b) *¿Cuánto tiempo tardará dicha persona en ir de la isla al poblado si deja anclado el bote a 4 millas de* P*?*

(c) *¿Y si deja anclado el bote a 8 millas de* P*? [Ejemplo 9 de la sección 2.1.]*

(d) *¿Existe un lugar para dejar el bote de modo que el tiempo de recorrido sea mínimo? ¿Piensa usted que este lugar es más cercano al poblado o a* P*? Analice las posibilidades y justifique su respuesta. [Problemas 63 y 64 en el ejercicio 2.1.]*

Es posible que la idea central en matemáticas sea el concepto de *función*. Este importante capítulo trata de lo que es una función, de cómo hacer la gráfica de funciones y la manera de utilizarlas en aplicaciones.

Al parecer, la palabra *función* fue introducida por René Descartes en 1637. Para él, una función significaba tan sólo cualquier potencia entera positiva de una variable x. Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), quien siempre enfatizó el lado geométrico de las matemáticas, utilizó la palabra función para denotar cualquier cantidad asociada con una curva, tal como las coordenadas de un punto sobre la curva. Leonhard Euler (1707-1783), identificaba cualquier ecuación o fórmula que contuviera variables y constantes con la palabra función; esta idea es similar a la utilizada ahora con frecuencia en los cursos que preceden al de cálculo. Posteriormente, el uso de funciones en el estudio de las ecuaciones sobre el flujo de calor condujo a una definición muy amplia, debida a Lejeune Dirichlet (1805-1859), la cual describe a una función como una regla de correspondencia entre dos conjuntos. Esta es la definición que utilizaremos aquí.

Funciones

En muchas aplicaciones, con frecuencia existe cierta correspondencia entre dos conjuntos de números. Por ejemplo, la ganancia R que resulta de la venta de x artículos vendidos a \$10.00 cada uno, es $R = 10x$. Si conocemos el número de artículos vendidos, entonces podemos calcular la ganancia por medio de la regla $R = 10x$. Esta regla es un ejemplo de *función*.

Otro ejemplo, si un objeto es lanzado desde una altura de 64 pies sobre el suelo, la distancia s (en pies) del objeto hasta el suelo después de t segundos está dada (aproximadamente) por la fórmula $s = 64 - 16t^2$. Cuando $t = 0$ segundos, el objeto está a 64 pies sobre el suelo y luego de 1 segundo está a $s = 64 - 16(1)^2 = 48$ pies sobre el suelo. Después de 2 segundos el objeto golpea el suelo. La fórmula $s = 64 - 16t^2$ proporciona una forma para determinar la distancia s cuando el tiempo t $(0 \leq t \leq 2)$) es conocido. Existe una correspondencia entre cada tiempo t en el intervalo $0 \leq t \leq 2$ y la distancia s. Decimos que la distancia s está en función del tiempo t ya que:

1. Existe una correspondencia entre el conjunto de tiempos y el de distancias.
2. Existe exactamente una distancia s obtenida para cada tiempo t en el intervalo $0 \leq t \leq 2$.

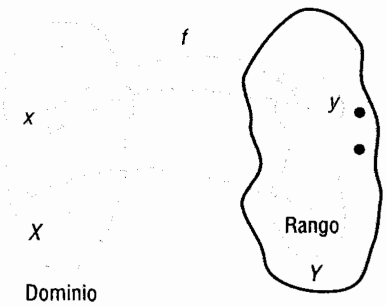
Veamos ahora la definición de función.

Definición de función

Función

Sean X y Y dos conjuntos no vacíos de números reales.* Una **función** de X en Y es una regla o correspondencia que asocia a cada elemento de X un único elemento de Y. El conjunto X es el **dominio** de la función. Para cada elemento x en X, el elemento correspondiente y en Y es el **valor** de la función en x, o la **imagen** de x. El conjunto de todas las imágenes de los elementos del dominio es el **rango** de la función.

FIGURA 1



Observe la figura 1. Como algunos elementos en Y podrían no ser la imagen de algún elemento x en X, el rango de una función podría ser un subconjunto de Y.

La regla (o correspondencia) mencionada en la definición de función se proporciona con mayor frecuencia como una ecuación con dos variables, denotadas por lo general con x y y.

*Los dos documentos X y Y también pueden ser conjuntos de números complejos, y entonces tendremos definida una función compleja. En la definición amplia (debida a Lejeune Dirichlet), X y Y pueden ser dos conjuntos cualesquiera.

Comentario: Al hacer la gráfica de una función en una calculadora gráfica, los valores de Xmín, Xmáx indican el dominio que queremos ver, mientras que Ymín, Ymáx nos dan el rango que queremos ver. Pero, por lo general, estos valores no representan el dominio y el rango reales de la función.

EJEMPLO 1 *Ejemplo de una función*

Considere la función definida por la ecuación

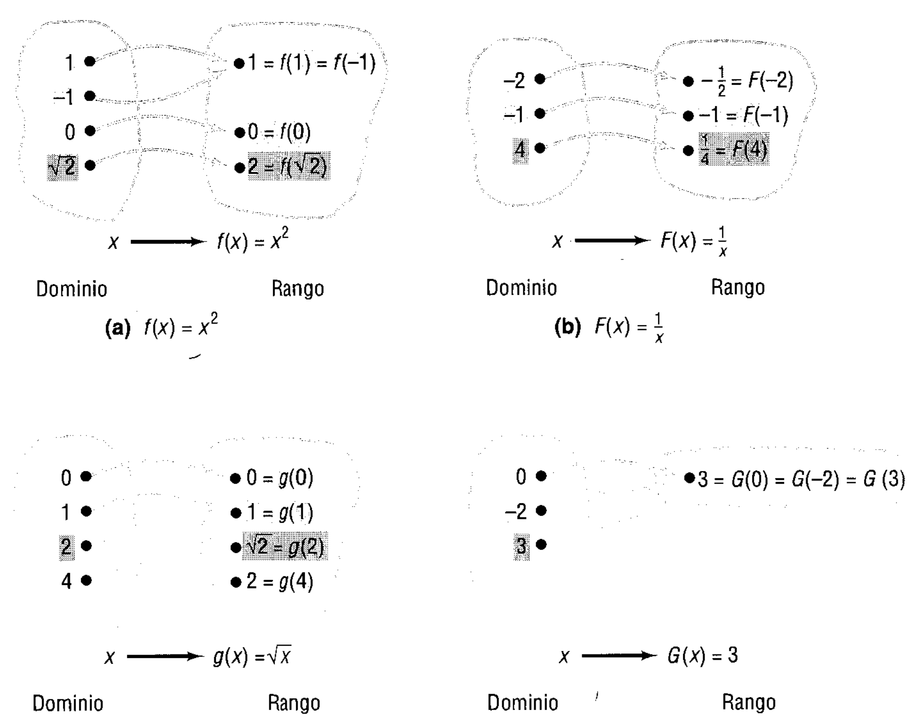
$$y = 2x - 5 \qquad 1 \leq x \leq 6$$

El dominio $1 \leq x \leq 6$ especifica que el número x está restringido a los números reales entre 1 y 6, inclusive. La regla $y = 2x - 5$ establece que el número x se multiplica por 2 y que después se resta 5 del resultado para obtener y. Por ejemplo, el valor de la función en $x = \frac{3}{2}$ (es decir, la imagen de $x = \frac{3}{2}$) es $y = 2 \cdot \frac{3}{2} - 5 = -2$.

Con frecuencia, las funciones se denotan por letras como f, F, g, G, y así sucesivamente. Si f es una función, para cada número x en su dominio la imagen correspondiente en el rango es designada por el símbolo $f(x)$, el cual se lee "f de x". Nos referimos a $f(x)$ como el **valor de f en el número x.** Así, $f(x)$ es el número obtenido cuando x es conocido y se aplica la regla para f; $f(x)$ no significa "f por x". Por ejemplo, la función dada en el ejemplo 1 puede ser escrita como $f(x) = 2x - 5$, $1 \leq x \leq 6$.

La figura 2 ilustra algunas otras funciones. Observe que en cada una existe un valor en el rango para cada x en el dominio.

FIGURA 2



(a) $f(x) = x^2$

(b) $F(x) = \frac{1}{x}$

(c) $g(x) = \sqrt{x}$

(d) $G(x) = 3$

EJEMPLO 2 *Determinar los valores de una función*

Para la función

$$f(x) = x^2 + 3x - 4 \qquad -5 \leq x \leq 5$$

determinar el valor de f en:

(a) $x = 0$ (b) $x = 1$ (c) $x = -4$ (d) $x = 5$

Solución (a) Para determinar el valor de f en $x = 0$, reemplazamos x por 0 en la regla establecida. Así,

$$f(0) = 0^2 + 3(0) - 4 = -4$$

(b) $f(1) = 1^2 + 3(1) - 4 = 1 + 3 - 4 = 0$

(c) $f(-4) = (-4)^2 + 3(-4) - 4 = 16 - 12 - 4 = 0$

(d) $f(5) = 5^2 + 3(5) - 4 = 25 + 15 - 4 = 36$

Ahora resuelva el problema 3.

En general, cuando la regla que define a una función f está dada por una ecuación en x y y, decimos que la función tiene forma **implícita.** Si es posible despejar y en términos de x en la ecuación, entonces escribimos $y = f(x)$ y decimos que la función está dada en forma **explícita.** De hecho, por lo general escribimos: "la función $y = f(x)$" para decir "la función f definida por la ecuación $y = f(x)$". Aunque este uso no es completamente correcto, es muy común y no debe causar confusión alguna. Por ejemplo:

FORMA IMPLÍCITA	FORMA EXPLÍCITA
$3x + y = 5$	$y = f(x) = -3x + 5$
$x^2 - y = 6$	$y = f(x) = x^2 - 6$
$xy = 4$	$y = f(x) = 4/x$

No todas las ecuaciones en x y y definen una función $y = f(x)$. Si se despeja y en una ecuación y se pueden obtener dos o más valores de y para una x dada, entonces la ecuación no define una función $y = f(x)$. Por ejemplo, considere la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, que define un círculo. Si despejamos y, obtenemos $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$, de modo que los números entre -1 y 1 producen dos valores de y. Así, $x^2 + y^2 = 1$ no define una función.

Comentario: La forma explícita de una función es la que se necesita para emplear una calculadora gráfica. ¿Ve ahora por qué es necesario hacer la gráfica de una circunferencia en dos "secciones"?

A continuación, daremos un resumen de algunos hechos relativos a una función f que son importantes de recordar.

Resumen de hechos importantes acerca de las funciones

1. $f(x)$ es la imagen de x, o el valor de f en x, cuando se aplica la regla f a una x en el dominio.
2. Para cada x en el dominio de f, existe una y sólo una imagen $f(x)$ en el rango.
3. f es el símbolo que utilizamos para denotar una función. Representa el dominio y la regla que utilizamos para obtener, a partir de una x en el dominio, una $f(x)$ en el rango.

Calculadoras

Casi todas las calculadoras tienen teclas especiales que permiten determinar el valor de muchas funciones. En su calculadora, usted puede determinar la función cuadrado, $f(x) = x^2$; la función raíz cuadrada, $f(x) = \sqrt{x}$; la función recíproca, $f(x) = 1/x$; y muchas otras que serán analizadas más adelante en este libro (como $\ln x$ y $\log x$). Si usted introduce x y después oprime una de estas teclas de función, obtendrá el valor de esa función en x. Inténtelo con las funciones enumeradas en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 *Determinar los valores de una función en una calculadora*

(a) $f(x) = x^2$; $f(1.234) = 1.522756$

(b) $F(x) = 1/x$; $F(1.234) = 0.8103727$

(c) $g(x) = \sqrt{x}$; $g(1.234) = 1.1108555$

Dominio de una función

Con frecuencia, el dominio de una función f no se especifica, sólo se da una regla o ecuación que define a la función. En esos casos decimos que el dominio de f es el conjunto más grande de números reales para los cuales tiene sentido la regla o, más precisamente, los valores para los que $f(x)$ es un número real. Así, el dominio de f es igual al de la variable x en la expresión $f(x)$.

EJEMPLO 4 *Determinar el dominio de una función*

Determinar el dominio de cada una de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 4}$ (b) $g(x) = \sqrt{4 - 3x}$

Solución (a) La regla f indica que debemos dividir $3x$ entre $x^2 - 4$. Como no es posible la división entre 0, el denominador $x^2 - 4$ no puede anularse. Así, x no puede ser 2 ni -2. El dominio de la función f es $\{x | x \neq -2, x \neq 2\}$.

(b) La regla g indica que debemos calcular la raíz cuadrada de $-3x$. Pero sólo los números no negativos tienen raíces cuadradas reales. Por lo tanto, necesitamos que

$$4 - 3x \geq 0$$
$$-3x \geq -4$$
$$x \leq \tfrac{4}{3}$$

El dominio de g $\{x | -\infty < x \leq \frac{4}{3}\}$ o el intervalo $(-\infty, \frac{4}{3}]$.

Ahora resuelva el problema 41.

Si x está en el dominio de una función f, diremos que **f está definida en x,** o que **$f(x)$ existe.** Si x no está en el dominio de f, diremos que f **no está definida en x**, o que $f(x)$ no existe. Por ejemplo, si $f(x) = x/(x^2 - 1)$, entonces $f(0)$ existe, pero $f(1)$ y $f(-1)$ no. (¿Puede advertir por qué?)

No hemos hablado de cómo determinar el rango de una función. La razón de esto es que, cuando una función está definida por una ecuación, con frecuencia es difícil encontrar el rango. Por lo tanto, nos conformaremos con determinar el dominio de una función cuando sólo conozcamos su regla de correspondencia.

Expresaremos el dominio de una función mediante la notación de intervalos, la notación de conjuntos o con palabras, según sea más conveniente.

En aplicaciones prácticas de las funciones, el dominio puede presentar restricciones físicas o geométricas. Por ejemplo, el dominio de la función f dada por $f(x) = x^2$ es el conjunto de todos los números reales. Sin embargo, si f es utilizada como la regla para obtener el área de un cuadrado, conociendo la longitud x de un lado, entonces debemos restringir el dominio de f a los números reales positivos, ya que la longitud de un lado no puede ser nunca 0 o negativa.

Variable independiente; variable dependiente

Considere una función $y = f(x)$. La variable x se denomina **variable independiente,** ya que puede asumir cualquier número permisible del dominio. La variable y es la **variable dependiente** porque su valor depende de x.

Cualquier símbolo puede ser utilizado para representar las variables independiente y dependiente. Por ejemplo, si f es la *función cúbica*, entonces puede ser definida por $f(x) = x^3$, $f(t) = t^3$ o $f(z) = z^3$. Las tres reglas son idénticas: cada una indica que debemos obtener el cubo de la variable independiente. En la práctica, los símbolos utilizados para las variables independiente y dependiente se basan en el uso común.

EJEMPLO 5 *Costo de construcción*

El costo por pie cuadrado para construir una casa es de \$110.00. Exprese el costo C como función de x, es el número de pies cuadrados. ¿Cuál es el costo de construcción para una casa de 2000 pies cuadrados?

Solución El costo C de construcción para una casa con x pies cuadrados es de $110x$. Una función que expresa esta relación es

$$C(x) = 110x$$

donde x es la variable independiente y C la variable dependiente. En este contexto el dominio es $\{x|x > 0\}$ ya que una casa no puede tener cero o una cantidad negativa de pies cuadrados construidos. El costo de construcción para una casa de 2000 pies cuadrados es

$$C(2000) = 110(2000) = \$220{,}000$$

Es importante observar que en la solución al ejemplo 5 utilizamos el símbolo C de dos formas: para nombrar la función y para simbolizar la variable dependiente. Este uso doble es común en las aplicaciones y no debe causarle dificultad alguna.

Exprese el área de un círculo como función de su radio.

Sabemos que la fórmula para el área A de un círculo con radio r es $A = \pi r^2$. Si utilizamos r para representar la variable independiente y A para la variable dependiente, la función que expresa esta relación es

$$A(r) = \pi r^2$$

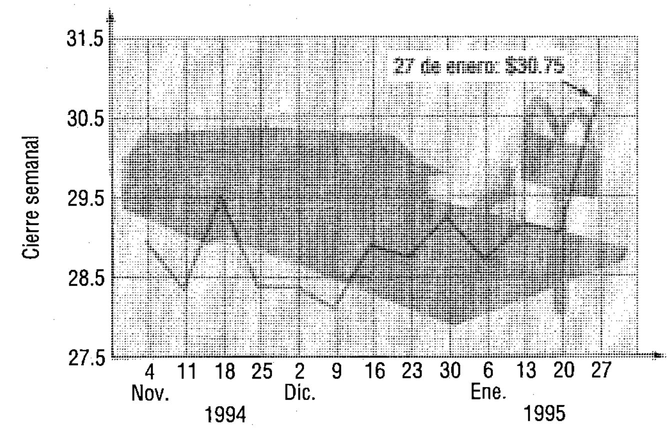
En este caso el dominio es $\{r|r > 0\}$. (¿Advierte por qué?)

Ahora resuelva el problema 61.

Gráfica de una función

En las aplicaciones, es frecuente que una gráfica muestre la relación entre dos variables con mayor claridad que una ecuación o una tabla. Por ejemplo, la figura 3 muestra el precio por acción (eje vertical) de la empresa McDonald's, al final de cada semana, del 4 de noviembre de 1994 al 27 de enero de 1995 (eje horizontal). En la gráfica podemos ver que el precio de las acciones estaba a la baja durante los días anteriores al 25 de noviembre y que subió entre el 20 y el 27 de enero. La gráfica también muestra el precio más bajo en ese periodo, ocurrido el 9 de diciembre, y el más alto, 27 de enero. Por otro lado, ecuaciones y tablas requieren por lo general de algunos cálculos e interpretación antes de que podamos "ver" este tipo de información.

FIGURA 3
Cierre semanal accionario de McDonald's



Observe de nuevo la figura 3. La gráfica muestra que para cada fecha en el eje horizontal existe sólo un precio en el eje vertical. Así, la gráfica está representando una función, aunque no tengamos la regla exacta para deducir a partir de las fechas el precio de las acciones.

Cuando la regla que define una función f está dada mediante una ecuación en x y y, la **gráfica de f** es la gráfica de la ecuación, es decir, el conjunto de puntos (x,y) en el plano xy que satisfacen a dicha ecuación.

No toda colección de puntos en el plano xy representa la gráfica de una función. Recuerde que para una función cada número x en el dominio de f tiene una, y sólo una, imagen $f(x)$. Así, la gráfica de una función no puede contener dos puntos con la misma abscisa y diferentes ordenadas. Por lo tanto, la gráfica de una función debe satisfacer el siguiente **criterio de la recta vertical:**

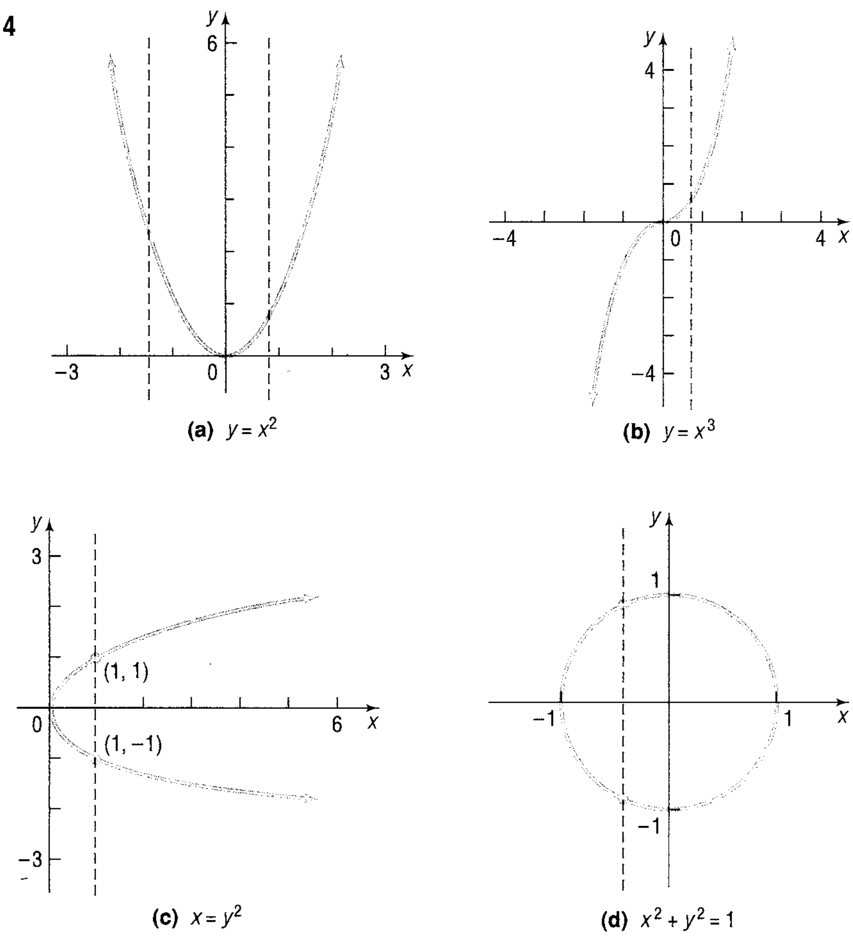
Un conjunto de puntos en el plano xy es la gráfica de una función si, y sólo si, una recta vertical interseca la gráfica a lo más en un punto.

De esto se concluye que si una recta vertical interseca una gráfica en más de un punto, esa gráfica no es la de una función.

EJEMPLO 7 *Identificar la gráfica de una función*

¿En la figura 4 cuáles son gráficas de funciones?

FIGURA 4



Solución Las gráficas 4(a) y 4(b) son gráficas de funciones pues una recta vertical interseca a cada una en al menos un punto. Las gráficas 4(c) y 4(d) no son gráficas de funciones pues algunas rectas verticales las intersecan en más de un punto.

Pares ordenados

El análisis anterior proporciona otra manera de conceptualizar una función. Podemos considerar una función f como un conjunto de **pares ordenados** (x, y) o $(x, f(x))$, donde no existen dos pares con el mismo primer elemento. El conjunto de todos los primeros elementos es el dominio de la función y el conjunto de todos los segundos elementos es su rango. Así, cada elemento x en el dominio tiene asociado un único elemento y en el rango. Un ejemplo es el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) tal que $y = x^2$. Algunos de los pares en este conjunto son

$$(2, 2^2) = (2, 4) \qquad (0, 0^2) = (0, 0)$$

$$(-2, (-2)^2) = (-2, 4) \qquad \left(\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

En este conjunto no existen dos pares ordenados con el mismo *primer* elemento (aunque sí hay pares que tienen el mismo *segundo* elemento). Este conjunto es la *función cuadrada*, la cual asocia a cada número real x el número x^2. *Véase* de nuevo la figura 4(a).

Por otro lado, tenemos los pares ordenados (x, y) para los cuales $y^2 = x$ no representa una función, ya que existen pares ordenados con el mismo primer elemento pero diferente segundo elemento. Por ejemplo $(1, 1)$ y $(1, -1)$ son pares ordenados que obedecen la relación $y^2 = x$ con el mismo primer elemento pero que tienen un segundo elemento diferente. Observe de nuevo la figura 4(c).

El siguiente ejemplo ilustra la forma para determinar el dominio y el rango de una función, dada su gráfica.

EJEMPLO 8 *Obtener información de la gráfica de una función*

Sea f la función cuya gráfica está dada en la figura 5. Algunos puntos en la gráfica están marcados.

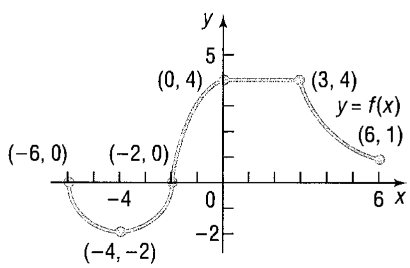
(a) ¿Cuál es el valor de la función cuando $x = -6$, $x = -4$, $x = 0$, y $x = 6$?

(b) ¿Cuál es el dominio de f?

(c) ¿Cuál es el rango de f?

(d) Enumere las intersecciones con los ejes. (Recuerde que estos son los puntos, si existen, donde la gráfica cruza o toca los ejes coordenados.)

FIGURA 5



Solución (a) Como $(-6, 0)$ está en la gráfica de f, la ordenada 0 debe ser el valor de f en la abscisa -6: es decir, $f(-6) = 0$. De manera similar, cuando $x = -4$ tenemos que $y = -2$ o $f(-4) = -2$; cuando $x = 0$, entonces $y = 4$ o $f(0) = 4$ y cuando $x = 6$, entonces $y = 1$ o $f(6) = 1$.

(b) Para determinar el dominio de f, observamos que todos los puntos en la gráfica de f tienen abscisas entre -6 y 6, inclusive; y para cada número x entre -6 y 6, existe un punto $(x, f(x))$ en la gráfica. Así, el dominio de f es $\{x|-6 \leq x \leq 6\}$ o el intervalo $[-6, 6]$.

(c) Todos los puntos en la gráfica tienen ordenadas entre -2 y 4, inclusive; y, para cada número y, existe al menos un número x en el dominio. Por lo tanto, el rango de f es $\{y| -2 \leq y \leq 4\}$ o el intervalo $[-2, 4]$.

(d) Las intersecciones con los ejes son $(-6, 0)$, $(-2, 0)$, y $(0, 4)$.

Dada la gráfica de una función, su dominio puede ser visto como la sombra creada por la gráfica sobre el eje x por rayos de luz verticales. Su rango puede ser considerado como la sombra creada por la gráfica sobre el eje y por rayos de luz horizontales. Intente utilizar esta técnica con la gráfica de la figura 5.

Ahora resuelva los problemas 25 y 27.

EJEMPLO 5 *Para ir de una isla a un poblado*

Una isla se encuentra a 2 millas del punto P más cercano de una costa recta. Un poblado está a 12 millas de dicha costa desde el punto P.

(a) Si una persona puede remar a una velocidad promedio de 3 millas por hora y caminar 5 millas por hora, exprese el tiempo T que tardaría en ir de la isla al poblado como una función de la distancia x de P hasta donde esa persona deja anclado el bote en que llegó a la costa. Véase figura 6.

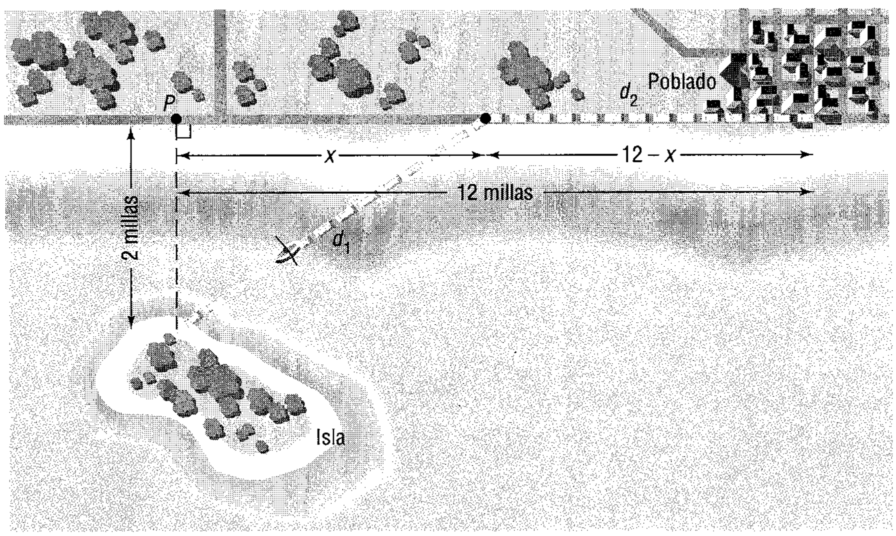
(b) ¿Cuánto tiempo tardará la persona en ir de la isla al poblado si deja anclado el bote a 4 millas de P?

(c) ¿Y si lo deja anclado a 8 millas de P?

Solución (a) La figura 6 ilustra la situación. La distancia d_1 de la isla al punto donde se deja el bote satisface la ecuación

$$d_1^2 = 4 + x^2$$

FIGURA 6



Como la velocidad promedio del bote es de 3 millas por hora, el tiempo t_1 que tarda en recorrer la distancia d_1 satisface a

$$d_1 = 3t_1$$

Así,

$$t_1 = \frac{d_1}{3} = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{3}$$

La distancia d_2 del punto donde se deja anclado el bote al poblado es $12 - x$, y el tiempo t_2 que tarda la persona en recorrer esta distancia caminando en promedio a 5 millas por hora satisface la ecuación

$$d_2 = 5t_2$$

Así,

$$t_2 = \frac{d_2}{5} = \frac{12 - x}{5}$$

El tiempo total T del viaje es $t_1 + t_2$. De modo que,

$$T(x) = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{3} + \frac{12 - x}{5}$$

(b) Si el bote es anclado a 4 millas de P, entonces $x = 4$. El tiempo T de duración del viaje es

$$T(4) = \frac{\sqrt{20}}{3} + \frac{8}{5} \approx 3.09 \text{ horas}$$

(c) Si el bote queda a 8 millas de P, entonces $x = 8$. El tiempo T de duración del viaje es

$$T(8) = \frac{\sqrt{68}}{3} + \frac{4}{5} \approx 3.55 \text{ horas}$$

Ahora resuelva el problema 63.

Resumen

A continuación encontrará parte del vocabulario importante presentado en esta sección y una descripción breve de cada término.

Función	Regla o correspondencia entre dos conjuntos de números reales de modo que a cada número x del primer conjunto, el dominio, le corresponde exactamente un número y del segundo conjunto.
	Conjunto de pares ordenados (x, y) o $(x, f(x))$ donde no existen dos pares distintos con el mismo primer elemento.
	Se llama rango al conjunto de valores y de la función para los valores x en el dominio.
	Una función f puede quedar definida en forma implícita mediante una ecuación con x y y, o en forma explícita escribiendo $y = f(x)$.
Dominio no especificado	Si definimos una función f mediante una ecuación que no especifique el dominio, entonces este será el mayor conjunto de números reales para los cuales la regla defina un número real.
Notación de función	$y = f(x)$
	f es un símbolo para la regla que define a la función.
	x es la variable independiente.
	y es la variable dependiente.
	$f(x)$ es el valor de la función en x, o la imagen de x.
Gráfica de una función	Es la colección de puntos (x, y) que satisface la ecuación $y = f(x)$.
	Una colección de puntos es la gráfica de una función cuando las rectas verticales intersecan la gráfica en al menos un punto (criterio de la recta vertical).

Ejercicio 2.1

En los problemas del 1 al 8, determine los siguientes valores para cada función:

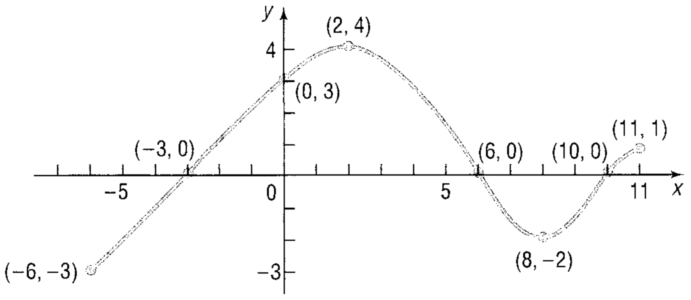
(a) f(0) *(b) f(1)* *(c) f(−1)* *(d) f(3)*

1. $f(x) = -3x^2 + 2x - 4$ **2.** $f(x) = 2x^2 + x - 1$ **3.** $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

4. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 4}$ **5.** $f(x) = |x| + 4$ **6.** $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$

7. $f(x) = \dfrac{2x + 1}{3x - 5}$ **8.** $f(x) = 1 - \dfrac{1}{(x + 2)^2}$

En los problemas del 9 al 20, utilice la gráfica de la función f dada en la figura.



9. Determine $f(0)$ y $f(-6)$.

10. Determine $f(6)$ y $f(11)$.

11. ¿Es $f(2)$ positivo o negativo?

12. ¿Es $f(8)$ positivo o negativo?

13. ¿Para qué números x se cumple que $f(x) = 0$?

14. ¿Para qué números x se cumple que $f(x) > 0$?

15. ¿Cuál es el dominio de f?

16. ¿Cuál es el rango de f?

17. ¿Cuáles son las intersecciones-x?

18. ¿Cuáles son las intersecciones-y?

19. ¿Cuántas veces la recta $y = \frac{1}{2}$ corta a la gráfica?

20. ¿Cuántas veces la recta $y = 3$ interseca la gráfica?

En los problemas del 21 al 24, responda las preguntas acerca de la función dada.

21. $f(x) = \dfrac{x + 2}{x - 6}$

(a) ¿Está el punto (3, 14) en la gráfica de f? (b) Si $x = 4$, ¿cuánto vale $f(x)$?

(c) Si $f(x) = 2$, ¿cuánto vale x? (d) ¿Cuál es el dominio de f?

22. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x + 4}$

(a) ¿Está el punto $(1, \frac{3}{5})$ en la gráfica de f? (b) Si $x = 0$, ¿cuánto vale $f(x)$?

(c) Si $f(x) = \frac{1}{2}$, ¿cuánto vale x? (d) ¿Cuál es el dominio de f?

23. $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^4 + 1}$

(a) ¿Está el punto $(-1, 1)$ en la gráfica de f? (b) Si $x = 2$, ¿cuánto vale $f(x)$?

(c) Si $f(x) = 1$, ¿cuánto vale x? (d) ¿Cuál es el dominio de f?

24. $f(x) = \dfrac{2x}{x - 2}$

(a) ¿Está el punto $(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3})$ en la gráfica de f? (b) Si $x = 4$, ¿cuánto vale $f(x)$?

(c) Si $f(x) = 1$, ¿Cuánto vale x? (d) ¿Cuál es el dominio de f?

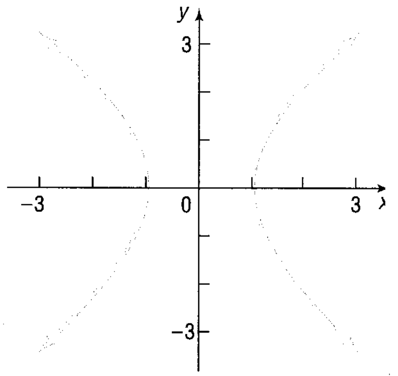
En los problemas del 25 al 36, determine si la gráfica es una función mediante el criterio de la recta vertical. Si lo es, utilice la gráfica para encontrar:

(a) *Su dominio y su rango.*

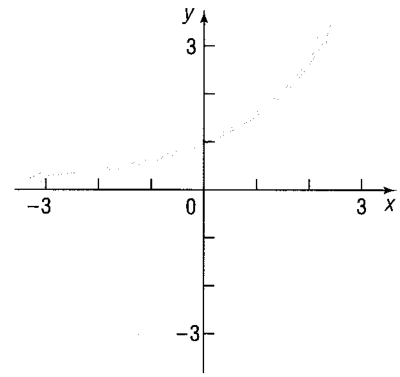
(b) *Las intersecciones con los ejes, si existen.*

(c) *Cualquier simetría con respecto a los ejes x, y o al origen*

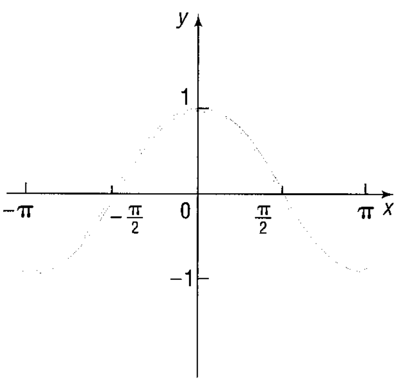
25.



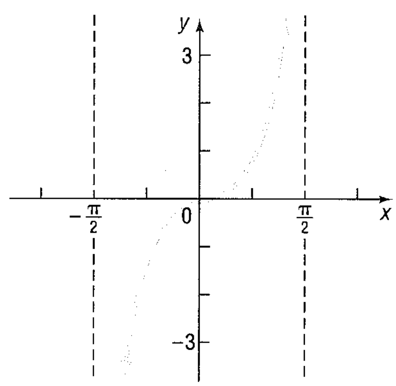
26.



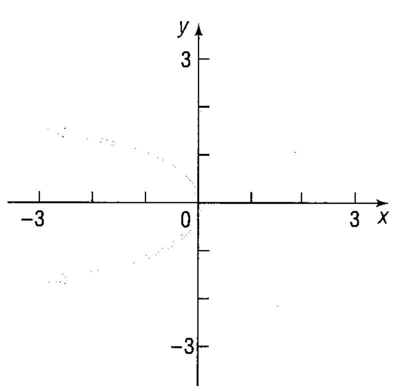
27.



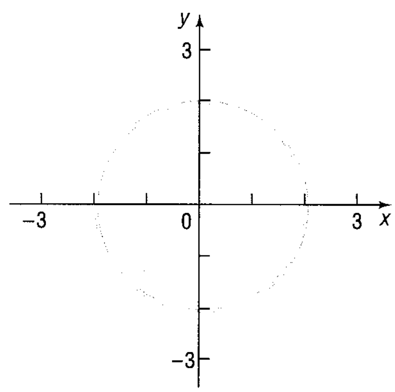
28.



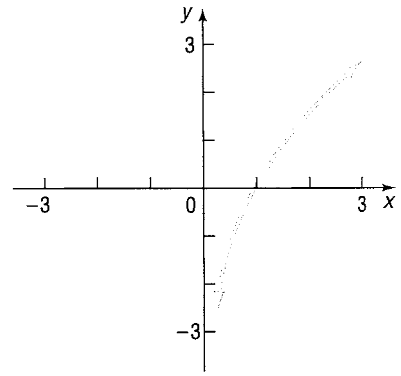
29.



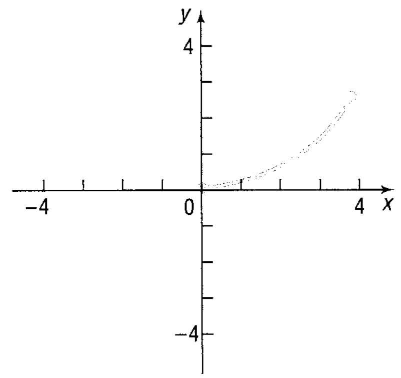
30.



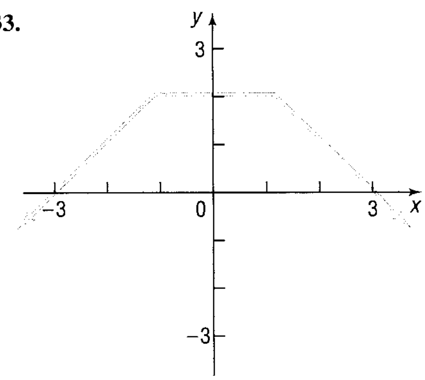
31.



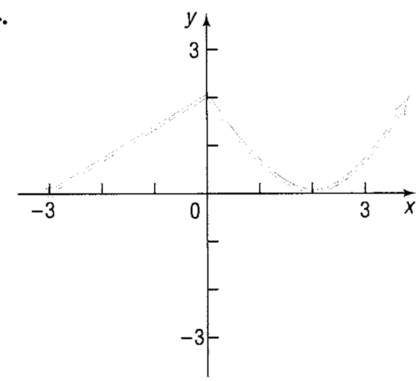
32.



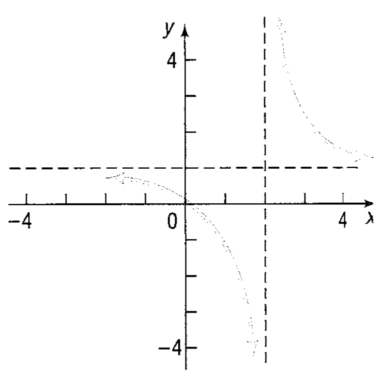
33.



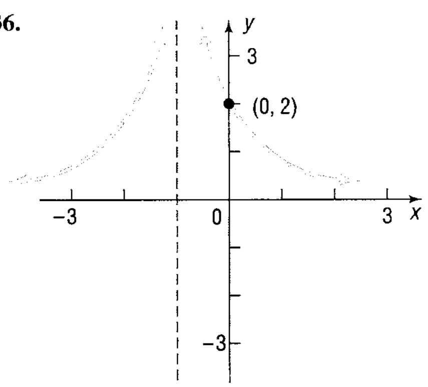
34.



35.



36.



En los problemas del 37 al 50, determine el dominio de cada función.

37. $f(x) = 3x + 4$

38. $f(x) = 5x^2 + 2$

39. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

40. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

41. $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

42. $h(x) = \dfrac{x}{x - 1}$

43. $F(x) = \dfrac{x - 2}{x^3 + x}$

44. $G(x) = \dfrac{x + 4}{x^3 - 4x}$

45. $h(x) = \sqrt{3x - 12}$

46. $G(x) = \sqrt{1 - x}$

47. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

48. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$

49. $p(x) = \sqrt{\dfrac{x - 2}{x - 1}}$

50. $q(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$

51. Si $f(x) = 2x^3 + Ax^2 + 4x - 5$ y $f(2) = 5$, ¿cuál es el valor de A?

52. Si $f(x) = 3x^2 - Bx + 4$ y $f(-1) = 12$, ¿cuál es el valor de B?

53. Si $f(x) = (3x + 8)/(2x - A)$ y $f(0) = 2$, ¿cuál es el valor de A?

54. Si $f(x) = (2x - B)/(3x + 4)$ y $f(2) = \frac{1}{2}$, ¿cuál es el valor de B?

55. Si $f(x) = (2x - A)/(x - 3)$ y $f(4) = 0$, ¿cuál es el valor de A? ¿En dónde no está definida f?

56. Si $f(x) = (x - B)/(x - A)$, $f(2) = 0$, y $f(1)$ no está definida, ¿cuáles son los valores de A y B?

57. *Efecto de la gravedad en la Tierra.* Si cae una roca al suelo desde una altura de 20 metros, su altura H (en metros) después de x segundos será aproximadamente de

$$H(x) = 20 - 4.9x^2$$

(a) ¿Cuál será la altura de la roca para $x = 1$ segundo? ¿para $x = 1.1$ segundos? ¿para $x = 1.2$ segundos?, y ¿para $x = 1.3$ segundos?

(b) ¿Cuándo golpea la roca al suelo?

58. *Efecto de la gravedad en Júpiter.* Si en Júpiter cae una roca desde una altura de 20 metros, su altura H (en metros) después de x segundos será aproximadamente de

$$H(x) = 20 - 13x^2$$

(a) ¿Cuál es la altura de la roca para $x = 1$ segundo? ¿para $x = 1.1$ segundos?, y ¿para $x = 1.2$ segundos?

(b) ¿cuando golpea la roca el suelo?

59. *Geometría.* Exprese el área A de un rectángulo como función del largo x si éste mide el doble del ancho del rectángulo.

60. *Geometría.* Exprese el área A de un triángulo rectángulo isósceles como función de la longitud x de uno de los dos lados iguales.

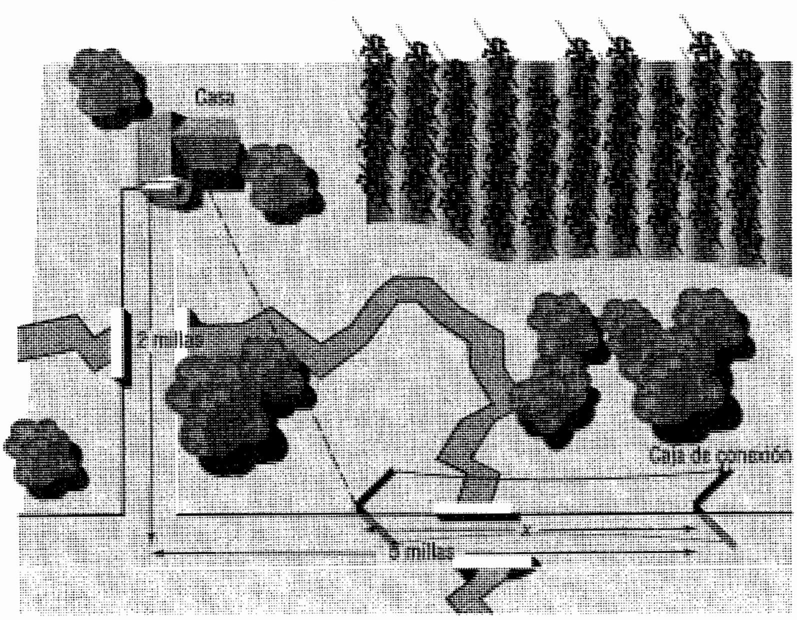
61. Exprese el salario bruto G de una persona que gana \$5.00 por hora como función del número x de horas trabajadas.

62. Un vendedor gana \$100.00 de salario base más \$10.00 por artículo vendido. Exprese el salario bruto G como función del número x de artículos vendidos.

63. Consulte el ejemplo 9. ¿Existe un lugar para anclar el bote de modo que el tiempo de recorrido sea mínimo? ¿Piensa usted que este lugar es más cercano al poblado o más cercano a P? Analice las posibilidades y justifique su respuesta.

64. Consulte el ejemplo 9. Haga la gráfica de la función $T = T(x)$. Utilice TRACE para ver cómo varía el tiempo T cuando x cambia de 0 a 12. ¿Cuál valor de x produce el menor tiempo?

65. Una compañía de televisión por cable debe proporcionar el servicio a un cliente cuya casa está a 2 millas de distancia de la carretera por donde pasa el cable. La caja de conexión más cercana está localizada a 5 millas por la carretera (*véase* la figura).



(a) Si el costo de la instalación es de \$100.00 por milla en la carretera y de \$14.00 por milla fuera de la carretera exprese el costo total C de la instalación como función de la distancia x (en millas) de la caja de conexión al punto donde la instalación del cable sale de la carretera. Indique el dominio.

(b) Calcule el costo si $x = 1$ milla.

(c) Calcule el costo si $x = 3$ millas.

(d) Haga la gráfica de la función $C = C(x)$. Utilice TRACE para ver cómo varía el costo C cuando x va de 0 a 5. ¿Cuál valor de x produce el menor costo?

66. Una isla se encuentra a 3 millas del punto más cercano P de una costa recta. Un poblado está a 20 millas de la costa desde el punto P. (Consulte en la figura 6 una situación similar.)

(a) Si alguien tiene un bote que promedia 12 millas por hora, y la misma persona puede correr a 5 millas por hora, exprese el tiempo T que dicha persona tardaría en ir de la isla al poblado como función de x, donde x es la distancia de P al punto donde quedaría anclado el bote.

(b) ¿Cuánto tiempo tardará esa persona en ir de la isla al poblado si deja el bote a 8 millas de P?

(c) ¿Cuánto tiempo tardará si el bote es anclado a 12 millas de P?

(d) Haga la gráfica de la función $T = T(x)$. Utilice TRACE para ver cómo varía el tiempo T cuando x cambia de 0 a 20. ¿Cuál valor de x produce el menor tiempo?

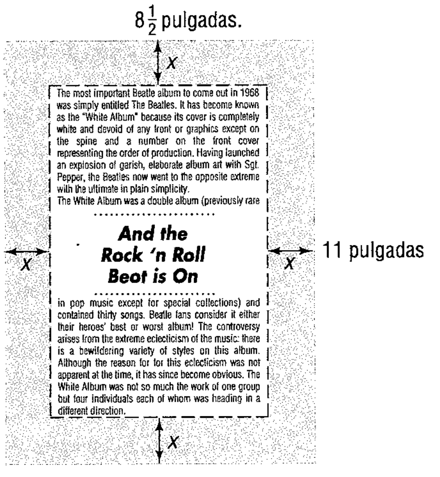
67. Una página con dimensiones de $8\frac{1}{2}$ por 11 pulgadas tiene un margen de ancho uniforme x rodeando su parte impresa, como muestra la figura.

(a) Escriba una fórmula para el área A de la parte impresa de la página como una función del ancho x del margen.

(b) Indique el dominio y el rango de A.

(c) Determine el área impresa cuyos márgenes tienen anchos de 1, 1.2 y 1.5 pulgadas.

(d) Haga la gráfica de la función $A = A(x)$. Utilice TRACE para determinar el margen mediante el cual obtendrá un área de 70 pulgadas cuadradas y otra de 50 pulgadas cuadradas.



68. *Costo de un recorrido trasatlántico* Un avión cruza el Océano Atlántico (3000 millas) a una velocidad de 500 millas por hora. El costo C (en dólares) por pasajero está dado por

$$C(x) = 100 + \frac{x}{10} + \frac{36{,}000}{x}$$

donde x es la velocidad con respecto al suelo (velocidad del aire $\pm$ viento).

(a) ¿Cuál es el costo por transportar un pasajero en condiciones tranquilas (sin viento)?

(b) ¿Cuál es el costo por pasajero al presentarse un viento en contra de 50 millas por hora?

(c) ¿Cuál es el costo por pasajero si hay viento a favor con velocidad de 100 millas por hora?

(d) ¿Cuál es el costo por pasajero con un viento en contra de 100 millas por hora?

(e) Haga la gráfica de la función $C = C(x)$. Cuando x varía de 400 a 600 millas por hora, ¿cómo varía el costo?

69. *Periodo de un péndulo.* El periodo T (en segundos) de un péndulo simple es una función de su longitud l (en pies), la cual está definida por la ecuación

$$T(l) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

donde $g \approx 32.2$ pies por segundo, cada segundo es la aceleración gravitacional. Utilice una calculadora para determinar el periodo de un péndulo cuya longitud mide 1 pie. ¿En cuánto aumentará el periodo si la longitud crece a 2 pies?

70. *Efecto de la altitud sobre peso.* Si un objeto pesa m libras al nivel del mar, entonces su peso W (en libras) a una altura de h millas sobre el nivel del mar está dado aproximadamente por

$$W(h) = m\left(\frac{4000}{4000 + h}\right)^2$$

Si una mujer pesa 120 libras al nivel del mar, ¿cuánto pesará en Pike's Peak, a 14,110 pies sobre el nivel del mar?

En los problemas del 71 al 78, diga si el conjunto de pares ordenados (x,y) definidos por cada ecuación es una función.

71. $y = x^2 + 2x$ **72.** $y = x^3 - 3x$ **73.** $y = \dfrac{2}{x}$ **74.** $y = \dfrac{3}{x} - 3$

75. $y^2 = 1 - x^2$ **76.** $y = \pm\sqrt{1 - 2x}$ **77.** $x^2 + y = 1$ **78.** $x + 2y^2 = 1$

79. Algunas funciones f tienen la propiedad de que $f(a + b) = f(a) + f(b)$ para todos los números reales a y b. ¿Cuáles de las siguientes funciones tienen esta propiedad?

(a) $h(x) = 2x$ (b) $g(x) = x^2$ (c) $F(x) = 5x - 2$ (d) $G(x) = 1/x$

80. Trace la gráfica de una función cuyo dominio sea $\{x \mid -3 \le x \le 8, x \ne 5\}$ y cuyo rango sea $\{y \mid -1 \le y \le 2, y \ne 0\}$. ¿Cuál(es) punto(s) en el rectángulo $-3 \le x \le 8$, $-1 \le y \le 2$ no puede(n) estar en la gráfica? Compare su gráfica con la de sus compañeros. ¿Qué diferencias ve?

81. ¿Son iguales las funciones $f(x) = x - 1$ y $g(x) = (x^2 - 1)/(x + 1)$? Explique su respuesta.

82. Describa cómo determinaría el dominio y el rango de una función si sólo tuviera su gráfica. ¿Cómo cambiaría su estrategia si, en vez de eso, tuviera la ecuación que define a la función?

83. ¿Cuántas intersecciones-x puede tener la gráfica de una función? ¿Cuántas con el eje y?

84. Si una gráfica consta de un único punto, ¿es la gráfica de una función? ¿Puede escribirse la ecuación de tal función?

85. ¿Existe alguna función cuya gráfica sea simétrica con respecto al eje x?

86. Investigue el momento histórico en que surgió la notación de función $y = f(x)$. Escriba un breve ensayo acerca de los primeros usos de esta notación.

Más acerca de funciones

Notación de función

A la variable independiente de una función a veces se le llama **argumento** de la función. Pensar en la variable independiente como un argumento en ocasiones facilita la aplicación de la regla de la función. Por ejemplo, si f es la función definida por $f(x) = x^3$, entonces f es la regla que nos indica elevar al cubo el argumento. Así, $f(2)$ significa elevar al cubo a 2, $f(a)$ significa elevar al cubo al número a y $f(x + h)$ significa elevar al cubo la cantidad $x + h$.

EJEMPLO 1 *Determinar los valores de una función*

Para la función G definida por $G(x) = 2x^2 - 3x$, evalúe:

(a) $G(3)$ (b) $G(x) + G(3)$ (c) $G(-x)$

(d) $-G(x)$ (e) $G(x + 3)$

Solución (a) Reemplazamos x por 3 en la regla G para obtener

$$G(3) = 2(3)^2 - 3(3) = 18 - 9 = 9$$

(b) $G(x) + G(3) = (2x^2 - 3x) + (9) = 2x^2 - 3x + 9$

(c) Reemplazamos x por $-x$ en la regla de G:

$$G(-x) = 2(-x)^2 - 3(-x) = 2x^2 + 3x$$

(d) $-G(x) = -(2x^2 - 3x) = -2x^2 + 3x$

(e) $G(x + 3) = 2(x + 3)^2 - 3(x + 3)$ Observe aquí el uso de los paréntesis

$$= 2(x^2 + 6x + 9) - 3x - 9$$

$$= 2x^2 + 12x + 18 - 3x - 9$$

$$= 2x^2 + 9x + 9$$

Observe en este ejemplo que $G(x + 3) \neq G(x) + G(3)$.

Ahora resuelva el problema 29.

El ejemplo 1 ilustra ciertos usos de la **notación de función.** Veamos otro uso.

EJEMPLO 2 Uso de la notación de función

Para la función $f(x) = x^2 + 1$, determine: $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$, $x \neq 1$.

Solución Primero determinamos $f(1)$:

$$f(1) = (1)^2 + 1 = 2$$

Entonces

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{(x^2 + 1) - (2)}{x - 1} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = x + 1$$

Las expresiones similares a la del ejemplo 2 se presentan con frecuencia en cálculo.

Cociente de diferencias

Para un número c en el dominio de una función f, la expresión

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \qquad x \neq c \tag{1}$$

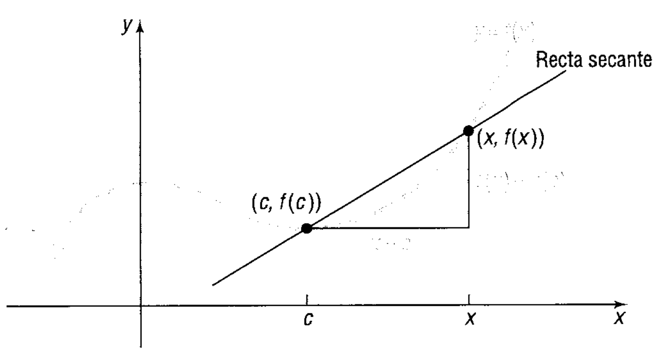
es el **cociente de diferencias** de f en c.

El cociente de diferencias de una función tiene una interpretación geométrica importante. Observe la gráfica de $y = f(x)$ en la figura 7. Hemos colocado ahí los puntos $(c, f(c))$ y $(x, f(x))$. La pendiente de la recta que contiene estos dos puntos es

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

La recta es una **recta secante.** Así, el cociente de diferencias de una función es igual a la pendiente de una recta secante que contiene dos puntos en su gráfica.

FIGURA 7



EJEMPLO 3 *Determinar un cociente de diferencias*

Encuentre el cociente de diferencias de $f(x) = 2x^2 - x + 1$ en $c = 2$.

Solución De la expresión (1), queremos determinar

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \qquad x \neq 2$$

Comenzamos por calcular $f(2)$:

$$f(2) = 2(2)^2 - (2) + 1 = 8 - 2 + 1 = 7$$

Entonces el cociente de diferencias de f en 2 es

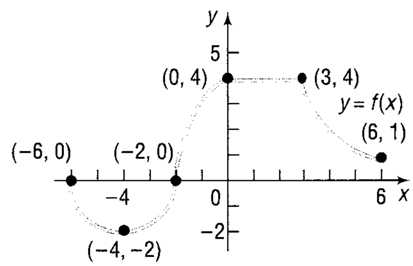
$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{2x^2 - x + 1 - 7}{x - 2} = \frac{2x^2 - x - 6}{x - 2} = \frac{(2x + 3)(x - 2)}{x - 2} = 2x + 3$$

Ahora resuelva el problema 41.

Funciones crecientes y decrecientes

Considere la gráfica de la figura 8. Si la recorre de izquierda a derecha, observará que algunas de sus partes suben, otras bajan y otras más son horizontales. En tales casos, la función es *creciente, decreciente* y *constante,* respectivamente.

FIGURA 8



EJEMPLO 4 *Determinar dónde una función es creciente, decreciente o constante*

¿Dónde es creciente la función de la figura 8? ¿Dónde es decreciente? ¿Y constante?

Solución Para saber dónde una función es creciente, decreciente o constante, utilizamos desigualdades con la variable independiente x o intervalos de abscisas. La gráfica de la figura 8 sube (crece) del punto $(-4, -2)$ al punto $(0, 4)$, por ello concluimos que es creciente en el intervalo $[-4, 0]$ (o para $-4 \leq x \leq 0$). La gráfica baja (decrece) del punto $(-6, 0)$ al punto $(-4, -2)$ y de $(3, 4)$ a $(6, 1)$. Concluimos entonces que la gráfica es decreciente en los intervalos $[-6, -4]$ y $[3, 6]$ (o para $-6 \leq x \leq -4$ y $3 \leq x \leq 6$). La gráfica es constante en el intervalo $[0, 3]$ (o para $0 \leq x \leq 3$).

A continuación estableceremos definiciones más precisas.

Función creciente

Una función f es **creciente** en un intervalo I si, para cualquier elección de x_1 y x_2 en I, con $x_1 < x_2$, tenemos $f(x_1) < f(x_2)$.

Función decreciente

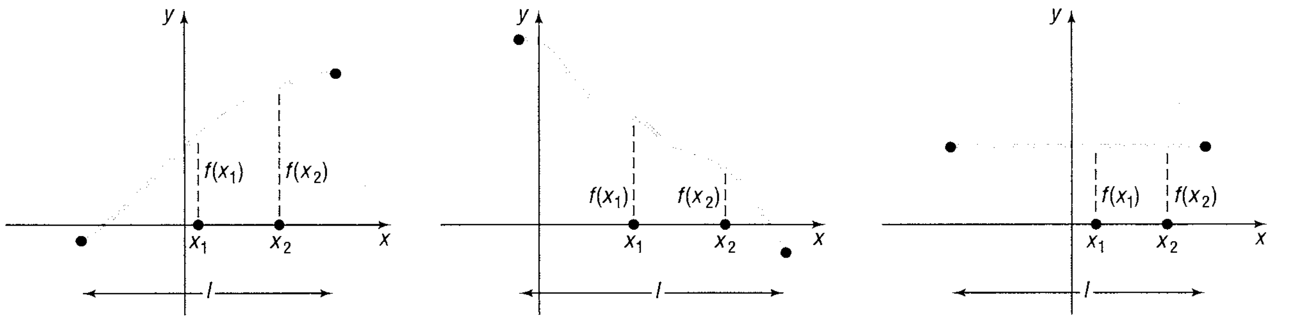
Una función f es **decreciente** en un intervalo I si, para cualquier elección de x_1 y x_2 en I, con $x_1 < x_2$, tenemos $f(x_1) > f(x_2)$.

Función constante

Una función f es **constante** en un intervalo I si, para toda elección de x en I, los valores de $f(x)$ son iguales.

Así, la gráfica de una función creciente sube de izquierda a derecha, la de una función decreciente baja de izquierda a derecha, y la gráfica de una función constante permanece a una altura fija. La figura 9 ilustra estas definiciones.

FIGURA 9



(a) Para $x_1 < x_2$ en I, $f(x_1) < f(x_2)$; f es creciente

(b) Para $x_1 < x_2$ en I, $f(x_1) > f(x_2)$; f es decreciente

(c) Los valores de f son iguales; f es constante

Funciones pares e impares

Función par

Una función es **par** si para todo número x en su dominio, el número $-x$ también está en el dominio y

$$f(-x) = f(x)$$

Función impar

Una función es **impar** si para todo número x en su dominio, el número $-x$ también está en el dominio y

$$f(-x) = -f(x)$$

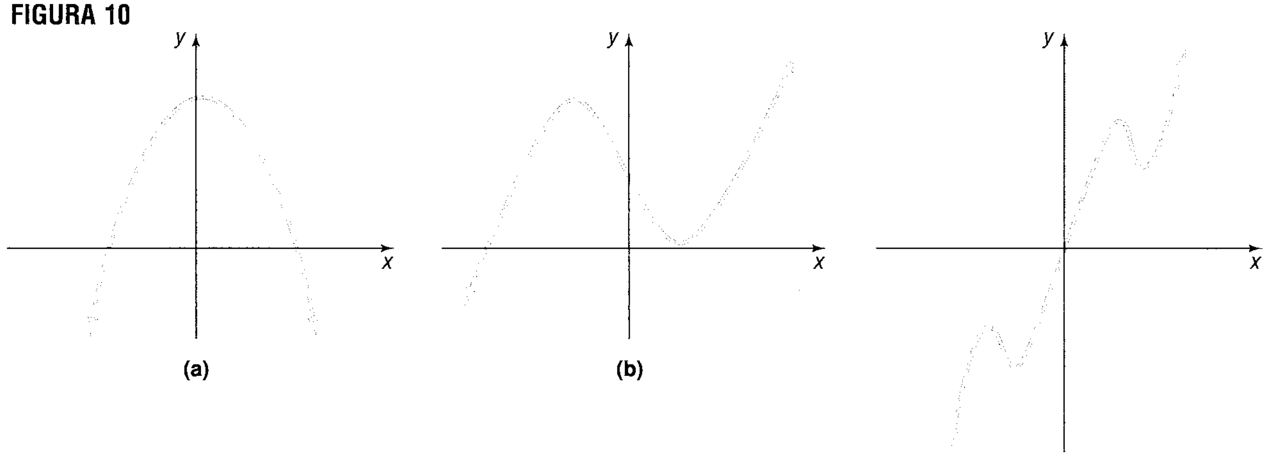
Los siguientes resultados se hacen entonces evidentes:

Teorema Una función es par si, y sólo si, su gráfica es simétrica con respecto al eje y. Una función es impar si, y sólo si, su gráfica es simétrica con respecto al origen.

EJEMPLO 5 *Determinar funciones pares e impares a partir de la gráfica*

Determine si cada gráfica de la figura 10 es la de una función par, impar o si corresponde a una función que no es par ni impar.

FIGURA 10



(a) (b) (c)

Solución La gráfica de la figura 10(a) es de una función par, ya que es simétrica con respecto al eje y. La función cuya gráfica está dada en la figura 10(b) no es par ni impar, ya que la gráfica no es simétrica con respecto al eje y ni con respecto al origen. La función cuya gráfica está dada en la figura 10(c) es impar puesto que su gráfica es simétrica con respecto al origen.

Ahora resuelva el problema 9.

EJEMPLO 6 *Identificar las funciones pares e impares*

Determine si cada una de las siguientes funciones es par, impar o de ninguno de estos tipos. Después, sin hacer la gráfica, determine si la gráfica es simétrica con respecto al eje y o al origen.

(a) $f(x) = x^2 - 5$ (b) $g(x) = x^3 - 1$

(c) $h(x) = 5x^3 - x$ (d) $F(x) = |x|$

Solución (a) Reemplazamos x por $-x$ en $f(x) = x^2 - 5$. Entonces

$$f(-x) = (-x)^2 - 5 = x^2 - 5$$

Como $f(-x) = f(x)$, concluimos que f es una función par y la gráfica es simétrica con respecto al eje y.

(b) Reemplazamos x por $-x$. Entonces

$$g(-x) = (-x)^3 - 1 = -x^3 - 1$$

Como $g(-x) \neq g(x)$ y $g(-x) \neq -g(x)$, concluimos que la función g no es par ni impar. La gráfica no es simétrica con respecto al eje y ni con respecto al origen.

(c) Reemplazamos x por $-x$ en $h(x) = 5x^3 - x$. Entonces

$$h(-x) = 5(-x)^3 - (-x) = -5x^3 + x$$

Como $h(-x), = -h(x)$, es una función impar y su gráfica es simétrica con respecto al origen.

(d) Reemplazamos x por $-x$ en $F(x) = |x|$. Entonces

$$F(-x) = |-x| = |x|$$

Como $F(-x) = F(x)$, F es una función par y su gráfica es simétrica con respecto del eje y.

Ahora resuelva el problema 51.

Funciones importantes

Ahora daremos los nombres de algunas de las funciones analizadas. Al revisar la lista preste especial atención a las características de cada función, en particular a la forma de cada gráfica.

Función lineal

$$f(x) = mx + b \qquad m \text{ y } b \text{ son números reales}$$

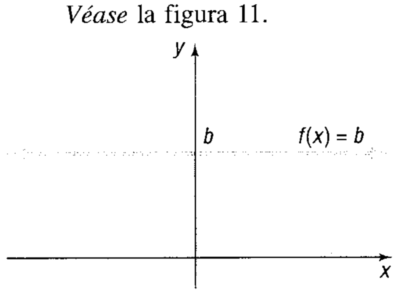
El dominio de la **función lineal** f consta de todos los números reales y su gráfica es una línea recta no vertical con pendiente m y ordenada al origen b. Una función lineal es creciente si $m > 0$, decreciente si $m < 0$, y constante si $m = 0$.

Función constante

$$f(x) = b \qquad b \text{ es un número real}$$

Véase la figura 11.

FIGURA 11



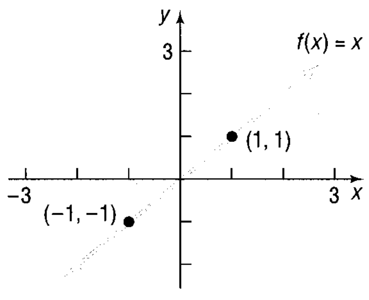
Una **función constante** es una función lineal especial ($m = 0$). Su dominio es el conjunto de todos los números reales; su rango el conjunto formado por un único número b. Su gráfica es una recta horizontal cuya ordenada al origen es b. La función constante es una función par cuya gráfica es constante sobre su dominio.

Función identidad

$$f(x) = x$$

Véase la figura 12.

FIGURA 12



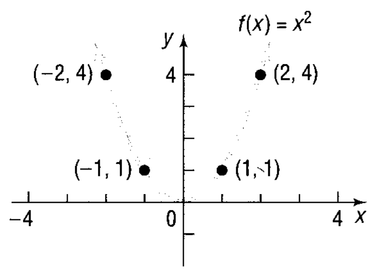
La **función identidad** es también una función lineal especial. Su dominio y su rango son el conjunto de todos los números reales. Su gráfica es una recta con pendiente $m = 1$ y cuya ordenada al origen es 0. La recta consta de todos los puntos para los cuales la abscisa es igual a la ordenada. La función identidad es una función impar; creciente sobre su dominio. Observe que la gráfica es la bisectriz de los cuadrantes I y III.

Función cuadrada

$$f(x) = x^2$$

Véase la figura 13.

FIGURA 13



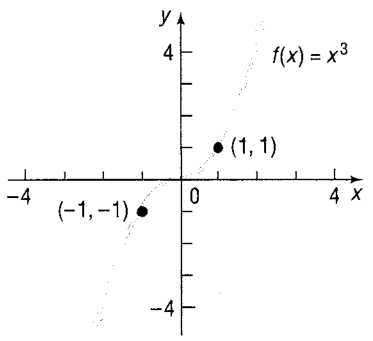
El dominio de la **función cuadrada** f es el conjunto de todos los números reales; su rango es el conjunto de números reales no negativos. La gráfica de esta función es una parábola cuya intersección con los ejes es (0, 0). La función cuadrada es una función par decreciente en el intervalo $(-\infty, 0]$ y creciente en el intervalo $[0, \infty)$.

Función cúbica

$$f(x) = x^3$$

Véase la figura 14.

FIGURA 14



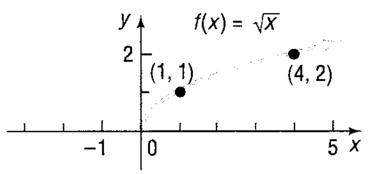
El dominio y el rango de la **función cúbica** son el conjunto de todos los números reales. La intersección de la gráfica con los ejes está en (0, 0). La función cúbica es impar y creciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Función raíz cuadrada

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Véase la figura 15.

FIGURA 15



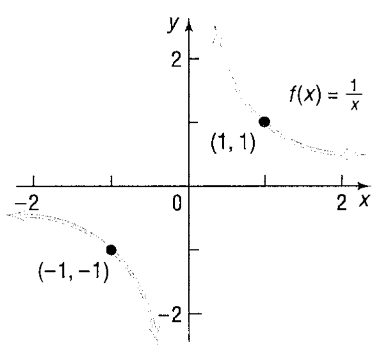
El dominio y el rango de la **función raíz cuadrada** son el conjunto de números reales no negativos. La intersección de la gráfica con los ejes está en (0, 0). La función raíz cuadrada no es par ni impar y es creciente en el intervalo $[0, \infty)$.

Función recíproca

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Para un análisis de la ecuación $y = 1/x$. *Véase* la figura 16.

FIGURA 16



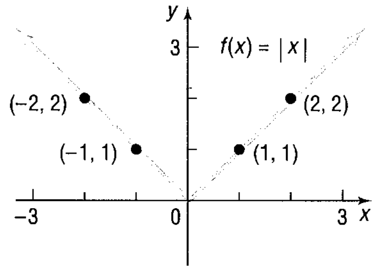
El dominio y el rango de la **función recíproca** son el conjunto de todos los números reales distintos de cero y su gráfica no tiene intersecciones con los ejes coordenados. La función recíproca es decreciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$ y es una función impar.

Función valor absoluto

$$f(x) = |x|$$

Véase la figura 17.

FIGURA 17



El dominio de la **función valor absoluto** es el conjunto de todos los números reales; su rango es el conjunto de números reales no negativos. La intersección de su gráfica con los ejes coordenados está en (0, 0). Si $x \geq 0$, entonces $f(x)=x$ y la gráfica de f es parte de la recta $y = x$; si $x < 0$ entonces $f(x)= -x$ y la gráfica de f es parte de la recta $y = -x$. La función valor absoluto es una función par; decreciente en el intervalo $(-\infty, 0]$ y creciente en el intervalo $[0, \infty)$.

Verificación: Haga la gráfica de $y = |x|$ en una pantalla cuadrada y compare lo que vea con la figura 17. Observe que algunas calculadoras gráficas utilizan el símbolo abs(x) para el valor absoluto. Si en su calculadora no existe la función valor absoluto, podría hacer la gráfica de $y = |x|$ utilizando el hecho de que $|x| = \sqrt{x^2}$.

El símbolo $[[x]]$, léase **"corchete de x,"** se utiliza para denotar al mayor número entero menor o igual a x. Por ejemplo,

$$[[1]] = 1 \qquad [[2.5]] = 2 \qquad [[\tfrac{1}{2}]] = 0 \qquad [[-\tfrac{3}{4}]] = -1 \qquad [[\pi]] = 3$$

Este tipo de correspondencia aparece en matemáticas con la frecuencia suficiente como para recibir un nombre.

Función máxima entero

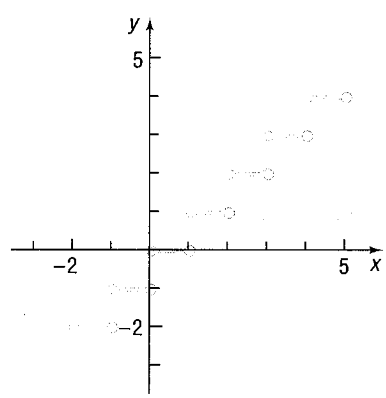
$$f(x) = [[x]] = \text{máximo número entero menor o igual a } x$$

Obtenemos la gráfica de $f(x) = [[x]]$ trazando algunos puntos sobre el plano. *Véase* la tabla 1. Para valores de x, $-1 \leq x < 0$, el valor de $f(x) = [[x]]$ es -1; para valores de x, $0 \leq x < 1$, el valor de f es 0. *Véase* la gráfica en figura 18.

TABLA 1

x	$y = f(x) = [[x]]$	(x, y)
-1	-1	$(-1, -1)$
$-\frac{1}{2}$	-1	$(-\frac{1}{2}, -1)$
$-\frac{1}{4}$	-1	$(-\frac{1}{4}, -1)$
0	0	$(0, 0)$
$\frac{1}{4}$	0	$(\frac{1}{4}, 0)$
$\frac{1}{2}$	0	$(\frac{1}{2}, 0)$
$\frac{3}{4}$	0	$(\frac{3}{4}, 0)$

FIGURA 18



El dominio de la **función máximo-entero** es el conjunto de todos los números reales; su rango es el conjunto de los números enteros. La intersección-y de su gráfica está en 0. Las intersecciones-x son todos los números del intervalo $[0, 1)$. La función máximo-entero no es par ni impar. Es constante en todo intervalo de la forma $[k, k + 1)$, para todo k entero. En la figura 18 utilizamos un punto para indicar, por ejemplo, que en $x = 1$, el valor de f es $f(1) = 1$; con una circunferencia pequeña ilustramos que la función no toma el valor 0 en $x = 1$.

De la gráfica de la función máximo-entero podemos ver por qué también se le llama una **función escalonada**. En $x = 0$, $x = \pm 1$, $x = \pm 2$, y así sucesivamente, esta función exhibe una *discontinuidad*; esto es, para valores enteros, la gráfica realiza un "salto" de un valor a otro sin tomar valores intermedios. Por ejemplo, a la izquierda inmediata de $x = 3$, las ordenadas son iguales a 2, y a la derecha inmediata de $x = 3$ son iguales a 3.

Las funciones analizadas líneas arriba son básicas. Cuando usted encuentre una de ellas, debe tener una imagen mental de su gráfica. Por ejemplo, si encuentra la función $f(x) = x^2$, tendrá que imaginar una gráfica como la de la figura 13.

Ahora resuelva el problema 67.

Funciones definidas por partes

A veces una función se define mediante una regla que consta de dos o más ecuaciones. La elección de la ecuación a utilizar depende del valor de la variable independiente x. Por ejemplo, la función valor absoluto $f(x) = |x|$ está definida mediante dos ecuaciones: $f(x) = x$ si $x \geq 0$ y $f(x) = -x$ si $x < 0$. Por conveniencia, combinamos estas ecuaciones en una expresión, como

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Cuando las funciones están definidas por más de una ecuación decimos que están **definidas por partes.**

Analicemos otro ejemplo de función definida por partes.

EJEMPLO 7 *Analizar una función definida por partes*

Para la siguiente función f,

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(a) Determinar $f(0)$, $f(1)$, y $f(2)$. (b) Determinar el dominio de f.
(c) Hacer la gráfica de f. (d) Utilizar la gráfica para encontrar el rango de f.

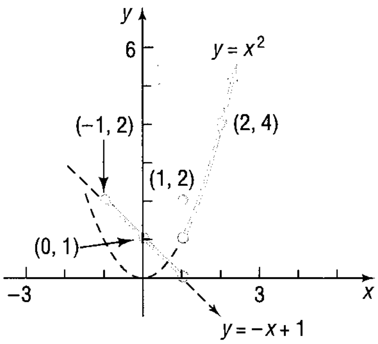
Solución (a) Para determinar $f(0)$, observamos que si $x = 0$, la ecuación para f es $f(x) = -x + 1$. Así, tenemos

$$f(0) = -0 + 1 = 1$$

Cuando $x = 1$, la ecuación para f es $f(x) = 2$. Entonces

$$f(1) = 2$$

FIGURA 19
$y = f(x)$



Cuando $x = 2$, la ecuación para f es $f(x) = x^2$. Así,

$$f(2) = 2^2 = 4$$

(b) Para determinar el dominio de f observamos su definición y concluimos que es f si $\{x|x \geq -1\}$, o $[-1, \infty)$.

(c) Para hacer la gráfica de f, trazamos la gráfica de "cada pedazo". Así, primero trazamos la recta $y = -x + 1$ y sólo utilizamos la parte donde $-1 \leq x < 1$. Después localizamos el punto $(1, 2)$, ya que cuando $x = 1, f(x) = 2$. Por último, trazamos la parábola $y = x^2$ y conservamos la parte donde $x > 1$. *Véase* la figura 19.

(d) De la gráfica, concluimos que el rango de f es $\{y|y > 0\}$, o $(0, \infty)$.

Verificación: Trazar la gráfica de la función f dada en el ejemplo 7 y compararla con la figura 19.

Ahora resuelva el problema 81.

EJEMPLO 8

Costo de la electricidad

En invierno, la compañía Edison Commonwealth suministra electricidad a residencias con un cargo mensual de \$9.06 más 10.819 centavos por kilowatt-hora (kWh) en los primeros 400 kWh consumidos en el mes, y cobra 7.093 centavos por cada kWh extra.*

(a) ¿Cuál es el cargo por el consumo de 300 kWh en un mes?
(b) ¿Cuál es el cargo por el consumo de 700 kWh en un mes?
(c) Si C es el cargo mensual por x kWh, exprese a C como función de x.

Solución

(a) Para 300 kWh, el cargo es de \$9.06 más 10.819 centavos = \$0.10819 por kWh. Así,

$$\text{Cargo} = \$9.06 + \$0.10819(300) = \$41.52$$

(b) Para 700 kWh, el cargo es de \$9.06 más 10.819 centavos por los primeros 400 kWh, más 7.093 centavos por los 300 kWh arriba de los 400. Así,

$$\text{Cargo} = \$9.06 + \$0.10819(400) + \$0.07093(300) = \$73.62$$

(c) Supongamos que $0 \leq x \leq 400$, el cargo mensual C, se determina multiplicando x por \$0.10819 y sumando el cargo mensual al cliente, de \$9.06. Así, cuando $0 \leq x \leq 400$, $C(x) = 0.10819x + 9.06$. Para $x > 400$, el cargo es $0.10819(400) + 9.06 + 0.07093(x - 400)$, ya que $x - 400$ es igual al consumo por arriba de 400 kWh, el cual cuesta 0.07093 por kWh. Por lo tanto, si $x > 400$, entonces

$$\begin{aligned} C(x) &= 0.10819(400) + 9.06 + 0.07093(x - 400) \\ &= 52.336 + 0.07093(x - 400) \\ &= 0.07093x + 23.964 \end{aligned}$$

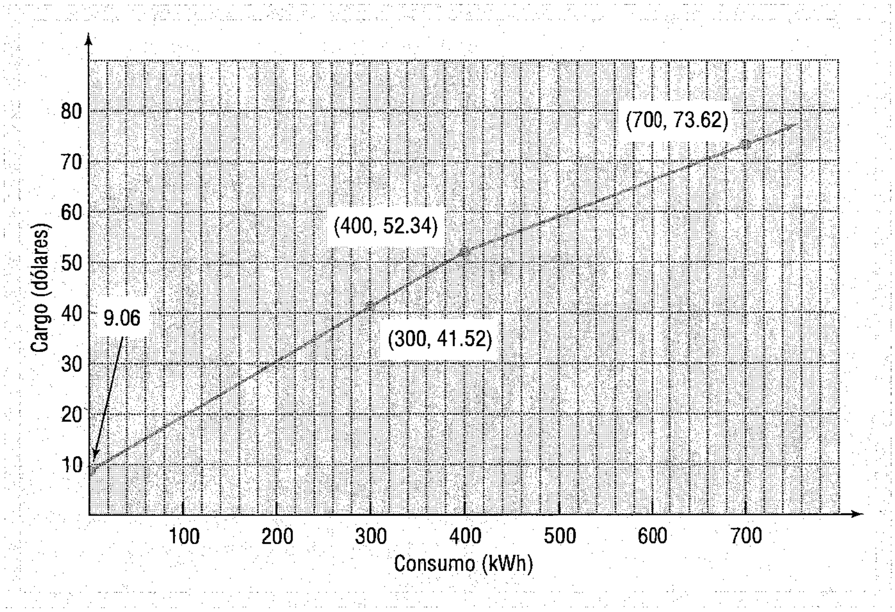
**Fuente:* Edison Commonwealth Co., Chicago, Illinois, 1991.

Para calcular C utilizamos dos reglas:

$$C(x) = \begin{cases} 0.10819x + 9.06 & \text{si } 0 \leq x \leq 400 \\ 0.07093x + 23.964 & \text{si } x > 400. \end{cases}$$

Véase la gráfica en la figura 20.

FIGURA 20



Ejercicio 2.2

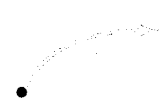
En los problemas del 1 al 8, relacione cada gráfica con la función enumerada cuya gráfica se asemeje más a la que se proporciona.

A. Función constante	*B. Función lineal*
C. Función cuadrado	*D. Función cúbica*
E. Función raíz cuadrada	*F. Función recíproca*
G. Función valor absoluto	*H. Función máximo entero*

1.

2.

3.

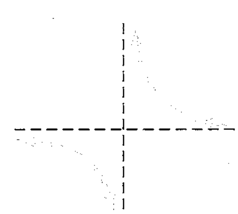


4.

5.

6.

7.

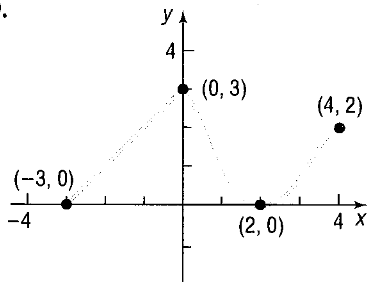


8.

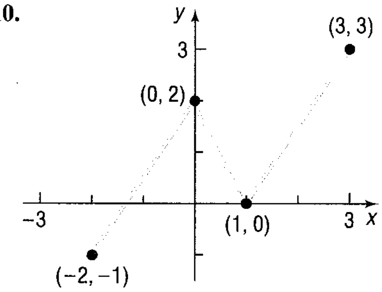
En los problemas del 9 al 22, aparece la gráfica de una función. Utilícela para determinar:

(a) Su dominio y su rango.
(b) Los intervalos donde es creciente, decreciente o constante.
(c) Si es par, impar o de ninguno de estos tipos.
(d) Las intersecciones con los ejes, si existen.

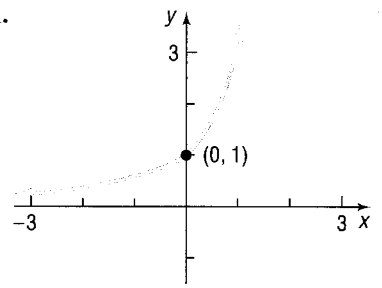
9.



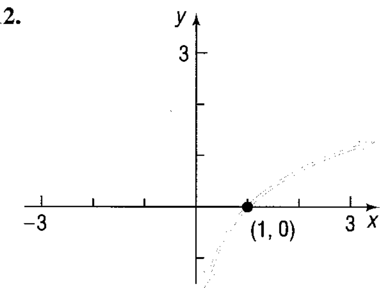
10.



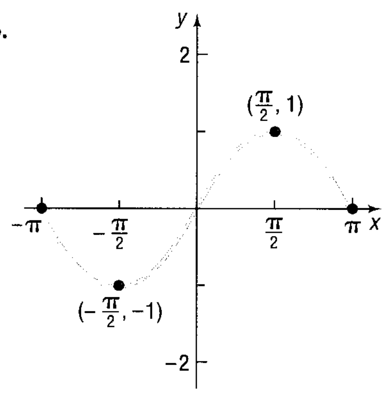
11.



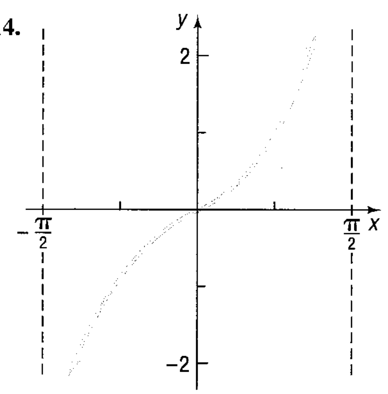
12.



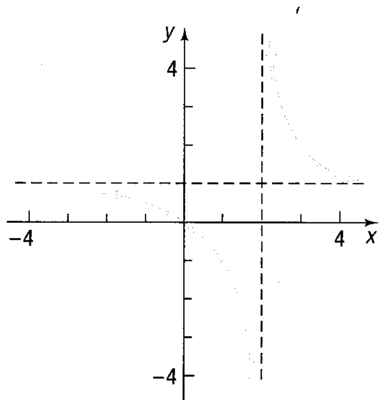
13.



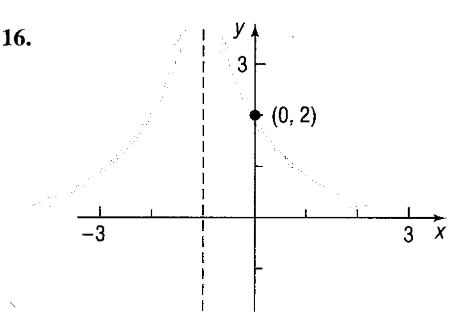
14.



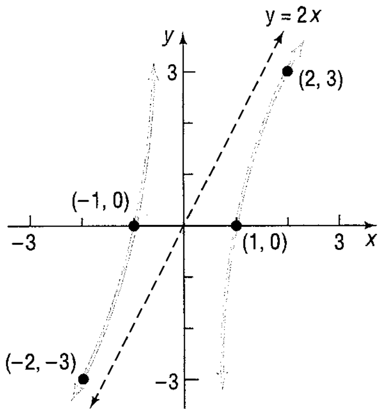
15.



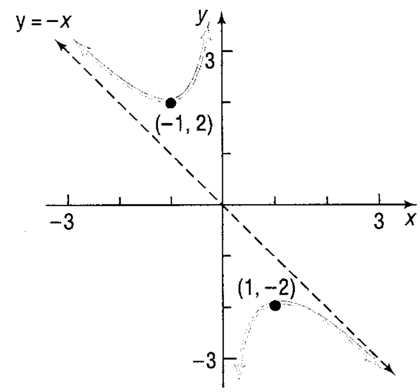
16.



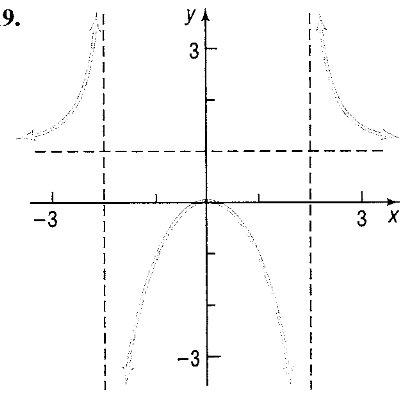
17.



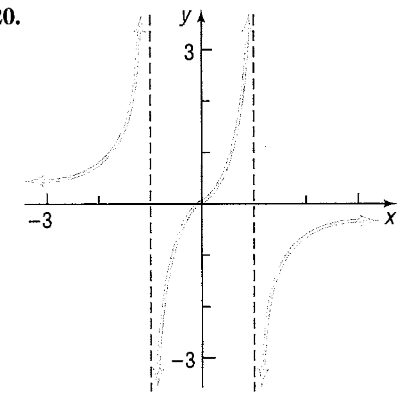
18.



19.

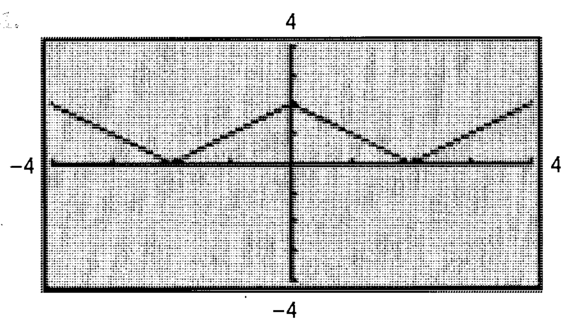


20.

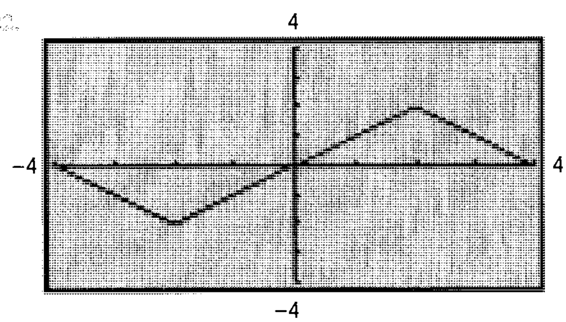


Para los problemas 21 y 22, suponga que la gráfica mostrada está completa.

21.



22.



23. Si $f(x) = [[2x]]$, determine: (a) $f(1.2)$ (b) $f(1.6)$ (c) $f(-1.8)$

24. Si $f(x) = [[x/2]]$, determine: (a) $f(1.2)$ (b) $f(1.6)$ (c) $f(-1.8)$

25. Si

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

determine: (a) $f(-2)$ (b) $f(0)$ (c) $f(2)$

26. Si $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 0 \\ 3x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

determine: (a) $f(-1)$ (b) $f(0)$ (c) $f(1)$

En los problemas del 27 al 38, determine lo siguiente para cada función:

(*a*) $f(-x)$ (*b*) $-f(x)$ (*c*) $f(2x)$ (*d*) $f(x-3)$ (*e*) $f(1/x)$ (*f*) $1/f(x)$

27. $f(x) = 2x + 5$ **28.** $f(x) = 3 - x$ **29.** $f(x) = 2x^2 - 4$ **30.** $f(x) = x^3 + 1$

31. $f(x) = x^3 - 3x$ **32.** $f(x) = x^2 + x$ **33.** $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ **34.** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

35. $f(x) = |x|$ **36.** $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **37.** $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ **38.** $f(x) = 4 + \dfrac{2}{x}$

En los problemas del 39 al 50, determine el cociente de diferencias,

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \qquad x \neq 1$$

para cada función. Asegúrese de simplificar.

39. $f(x) = 3x$ **40.** $f(x) = -2x$ **41.** $f(x) = 1 - 3x$ **42.** $f(x) = x^2 + 1$

43. $f(x) = 3x^2 - 2x$ **44.** $f(x) = 4x - 2x^2$ **45.** $f(x) = x^3 - x$ **46.** $f(x) = x^3 + x$

47. $f(x) = \dfrac{2}{x + 1}$ **48.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ **49.** $f(x) = \sqrt{x}$ **50.** $f(x) = \sqrt{x + 3}$

En los problemas del 51 al 62, diga si cada función es par, impar o de ninguno de estos tipos, sin trazar la gráfica.

51. $f(x) = 4x^3$ **52.** $f(x) = 2x^4 - x^2$ **53.** $g(x) = 2x^2 - 5$ **54.** $h(x) = 3x^3 + 2$

55. $F(x) = \sqrt[3]{x}$ **56.** $G(x) = \sqrt{x}$ **57.** $f(x) = x + |x|$ **58.** $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 + 1}$

59. $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ **60.** $h(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ **61.** $h(x) = \dfrac{x^3}{3x^2 - 9}$ **62.** $F(x) = \dfrac{x}{|x|}$

63. ¿Cuántas intersecciones-x puede tener una función definida en un intervalo si es creciente en ese intervalo? Explique su respuesta.

64. ¿Cuántas intersecciones-y puede tener una función? Explique su respuesta.

En los problemas del 65 al 90:

(*a*) *Determine el dominio de cada función.*

(*b*) *Localice cualquier intersección con los ejes coordenados.*

(*c*) *Haga la gráfica de cada función.*

(*d*) *Con base en la gráfica, determine el rango.*

65. $f(x) = 3x - 3$ **66.** $f(x) = 4 - 2x$ **67.** $g(x) = x^2 - 4$

68. $g(x) = x^2 + 4$ **69.** $h(x) = -x^2$ **70.** $F(x) = 2x^2$

71. $f(x) = \sqrt{x - 2}$ **72.** $g(x) = \sqrt{x} + 2$ **73.** $h(x) = \sqrt{2 - x}$

74. $F(x) = -\sqrt{x}$ **75.** $f(x) = |x| + 3$ **76.** $g(x) = |x + 3|$

77. $h(x) = -|x|$ **78.** $F(x) = |3 - x|$

79. $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ **80.** $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \neq 0 \\ 4 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

81. $f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ **82.** $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

83. $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } -2 \le x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x^3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

84. $f(x) = \begin{cases} 3 + x & \text{si } -3 \le x < 0 \\ 3 & \text{si } x = 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

85. $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es un número entero} \\ -1 & \text{si } x \text{ no es un número entero} \end{cases}$

86. $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \ge 1 \\ 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

87. $h(x) = 2[[x]]$

88. $f(x) = [[2x]]$

89. $F(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } |x| \le 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } |x| > 2 \end{cases}$

90. $G(x) = |x^2 - 4|$

Los problemas del 91 al 94 necesitan la siguiente definición. Recta secante *La pendiente de la recta secante que contiene a los puntos $(x, f(x))$ y $(x + h, f(x + h))$ en la gráfica de una función $y = f(x)$ es*

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

En los problemas del 91 al 94, exprese la pendiente de la recta secante de cada función en términos de x y h. Asegúrese de simplificar su respuesta.

91. $f(x) = 2x + 5$

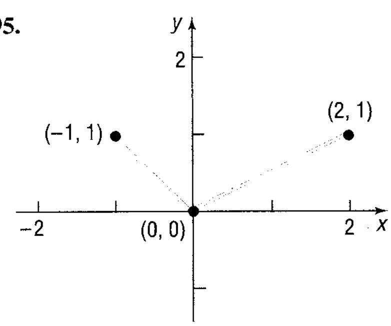
92. $f(x) = -3x + 2$

93. $f(x) = x^2 + 2x$

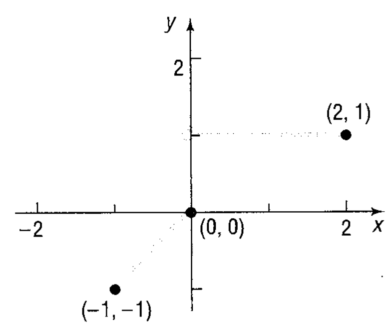
94. $f(x) = 1/x$

En los problemas del 95 al 98 se da la gráfica de una función definida por partes. Escriba una definición para cada función.

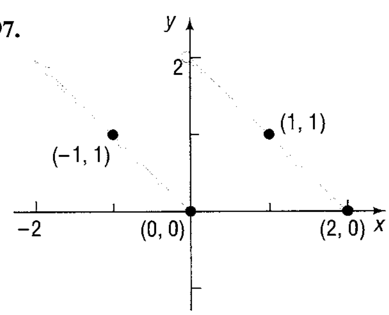
95.



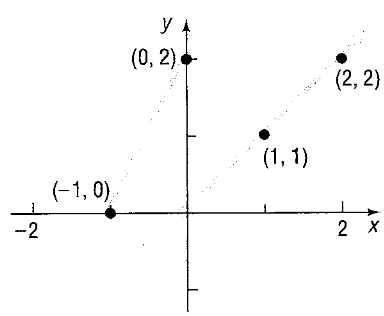
96.



97.



98.



En los problemas 99 y 100 decida si cada función es par. Justifique su respuesta.

99. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{si } x \ne 2 \\ 6 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

100. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{si } x \ne 2 \\ 5 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

101. Haga la gráfica de $y = x^2$. Después Haga la gráfica de $y = x^2 + 2$, $y = x^2 + 4$, y $y = x^2 - 2$. ¿Qué patrón observa? ¿Puede predecir la gráfica de $y = x^2 - 4$? ¿De $y = x^2 + 5$?

102. Haga la gráfica de $y = x^2$. Después Haga la gráfica de $y = (x - 2)^2$, $y = (x - 4)^2$, y $y = (x + 2)^2$. ¿Qué patrón observa? ¿Puede predecir la gráfica de $y = (x + 4)^2$? ¿De $y = (x - 5)^2$?

103. Haga la gráfica de $y = |x|$. Después Haga la gráfica de $y = 2|x|$, $y = 4|x|$, y $y = \frac{1}{2}|x|$. ¿Qué patrón observa? ¿Puede predecir la gráfica de $y = \frac{1}{4}|x|$? ¿De $y = 5|x|$?

104. Haga la gráfica de $y = x^2$. Después Haga la gráfica de $y = -x^2$. ¿Qué patrón observa? Ahora intente con $y = |x|$ y $y = -|x|$ ¿Qué puede concluir?

105. Haga la gráfica de $y = \sqrt{x}$. Después Haga la gráfica de $y = \sqrt{-x}$. ¿Qué patrón observa? Ahora intente con $y = 2x + 1$ y $y = 2(-x) + 1$. ¿Qué puede concluir?

106. Haga la gráfica de $y = x^3$. Después Haga la gráfica de $y = (x - 1)^3 + 2$. ¿Puede predecir el resultado?

107. *Costo del gas natural.* En 12 de noviembre de 1991, las compañías Peoples Gas Light y Coke tuvieron las siguientes tarifas* para el consumo de gas natural en residencias unifamiliares:

Cargo por servicio mensual	\$7.00
Cargo de distribución de los primeros 90 litros	\$0.21054/litro
Por arriba de los 90 litros	\$0.11242/litro
Cargo de gas	\$0.26341/litro

(a) ¿Cuál es el cargo por consumir 50 litros en un mes?
(b) ¿Cuál es el cargo por 500 litros en un mes?
(c) Construya una función que relacione el cargo mensual C para x litros de gas.
(d) Grafique esta función.

108. *Costo del gas natural.* El 19 de noviembre de 1991, la compañía de gas Northern Illinois tenía la siguiente tarifa† para el consumo de gas natural en residencias unifamiliares:

Cargo mensual al cliente	\$4.00
Cargo por distribución, primeros 50 litros	\$0.1402/litro
Por arriba de los 50 litros	\$0.0547/litro
Cargo por suministro de gas	\$0.2406/litro

(a) ¿Cuál es el cargo por consumir 40 litros en un mes?
(b) ¿Cuál es el cargo por 202 litros en un mes?
(c) Haga una función para el cargo mensual C por x litros de gas.
(d) Haga la gráfica de ésta.

109. Sea f cualquier función con la propiedad de que cuando x esté en su dominio también $-x$ lo esté. Defina las funciones $E(x)$ y $O(x)$ como

$$E(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \qquad O(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$$

(a) Muestre que $E(x)$ es una función par.
(b) Muestre que $O(x)$ es una función impar.
(c) Muestre que $f(x) = E(x) + O(x)$.
(d) Concluya que cualquier función f puede ser escrita como la suma de una función par y una función impar.

110. Sean f y g dos funciones definidas en el mismo intervalo $[a, b]$. Suponga que definimos dos funciones mín (f, g) y máx (f, g) como sigue:

$$\text{mín}(f, g)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \leq g(x) \\ g(x) & \text{si } f(x) > g(x) \end{cases} \qquad \text{máx}(f, g)(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } f(x) \leq g(x) \\ f(x) & \text{si } f(x) > g(x) \end{cases}$$

**Fuente:* Las compañías Peoples Gas Light y Coke, Chicago, Illinois.
†*Fuente:* Compañía de gas Northern Illinois, Naperville, Illinois.

Muestre que

$$\text{mín}(f, g)(x) = \frac{f(x) + g(x)}{2} - \frac{|f(x) - g(x)|}{2}$$

Desarrolle una fórmula similar para máx (f, g).

111. Considere la ecuación

$$y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

¿Es esta una función? ¿Cuál es su dominio? ¿Cuál es su rango? ¿Cuál es su intersección-y, si existe? ¿Cuáles son sus intersecciones-x, si existen? ¿Es par, impar o de ninguno de estos tipos? ¿Como describiría su gráfica?

112. Defina algunas funciones que pasen por (0, 0), (1, 1) y sean crecientes para $x \geq 0$. Comience su lista con $y = \sqrt{x}$, $y = x$, y $y = x^2$. ¿Puede proponer un resultado general acerca de tales funciones?

113. ¿Puede pensar en una función que sea par e impar a la vez?

2.3 Técnicas de graficación

En esta etapa, si le pidieran hacer la gráfica de cualquiera de las funciones definidas por $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x$, $y = \sqrt{x}$, $y = |x|$, o $y = 1/x$, su respuesta sería: "Si, reconozco estas funciones y sé cuál es la forma general de sus gráficas." (Si esta no fuese su respuesta, repase las secciones anteriores y las figuras de la 12 a la 17.)

A veces se nos pide trazar una función parecida a otra que ya sabemos trazar. En esta sección veremos algunas de esas funciones y desarrollaremos las técnicas para trazar sus gráficas.

Corrimientos verticales

EJEMPLO 1 *Corrimiento vertical hacia arriba*

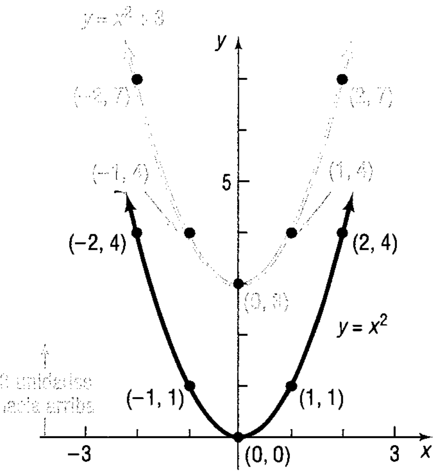
Utilice la gráfica de $f(x) = x^2$ para obtener la de $g(x) = x^2 + 3$.

Solución Comenzamos obteniendo algunos puntos de las gráficas de f y g. Por ejemplo, cuando $x = 0$, entonces $y = f(0) = 0$ y $y = g(0) = 3$. Cuando $x = 1$, $y = f(1) = 1$ y $y = g(1) = 4$. La tabla 2 muestra estos y otros puntos más en cada gráfica. Concluimos que la gráfica de g es idéntica a la de f, excepto que está recorrida en forma vertical hacia arriba por 3 unidades. *Véase* la figura 21.

TABLA 2

x	$y = f(x) = x^2$	$y = g(x) = x^2 + 3$
−2	4	7
−1	1	4
0	0	3
1	1	4
2	4	7

FIGURA 21



Cuando se suma un número real c al lado derecho de una función $y = f(x)$, la gráfica de la nueva función $y = f(x) + c$ es la gráfica de f con un **corrimiento vertical** hacia arriba (si $c > 0$) o hacia abajo (si $c < 0$). Veamos otro ejemplo.

EJEMPLO 2

Corrimiento vertical hacia abajo

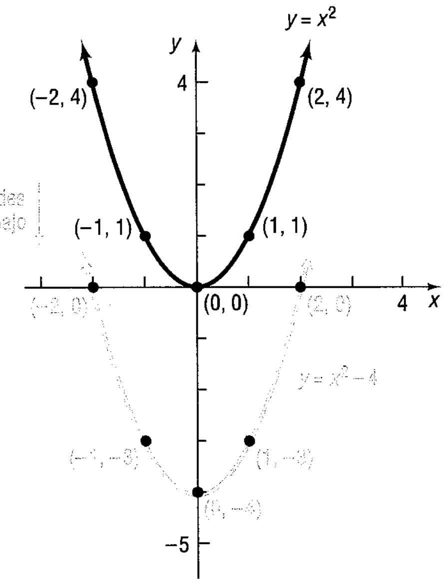
Utilice la gráfica de $f(x) = x^2$ para obtener la de $h(x) = x^2 - 4$.

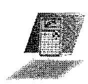
Solución La tabla 3 enumera algunos puntos de las gráficas de f y h. La gráfica de h es igual a la de f, excepto que ésta se recorre hacia abajo en 4 unidades. *Véase* la figura 22.

TABLA 3

x	$y = f(x) = x^2$	$y = h(x) = x^2 - 4$
−2	4	0
−1	1	−3
0	0	−4
1	1	−3
2	4	0

FIGURA 22



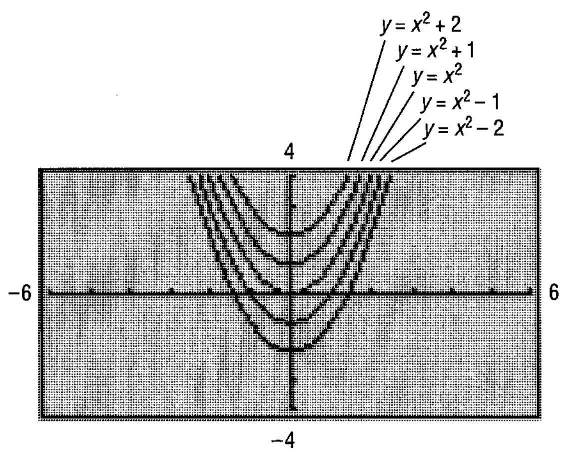


Observación del concepto: En una sola pantalla haga la gráfica de las siguientes funciones:

$$y = x^2, \quad y = x^2 + 1, \quad y = x^2 + 2, \quad y = x^2 - 1, \quad y = x^2 - 2$$

Véase la figura 23.

FIGURA 23



Ahora resuelva el problema 21.

Corrimientos horizontales

EJEMPLO 3 *Corrimiento horizontal hacia la derecha*

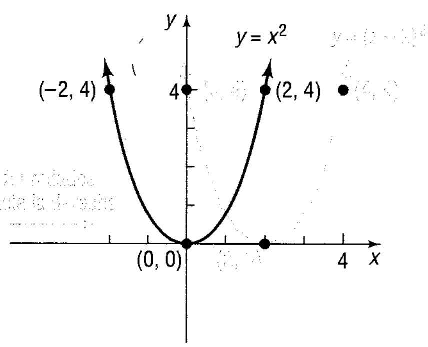
Utilice la gráfica de $f(x) = x^2$ para obtener la de $g(x) = (x - 2)^2$.

Solución La función $g(x) = (x - 2)^2$ es, en esencia, una función cuadrada. La tabla 4 enumera algunos puntos en las gráficas de f y g. Observe que $f(x) = 0$ si $x = 0$, y que $g(x) = 0$ si $x = 2$. Además, cuando $f(x) = 4$ entonces $x = -2$ o 2, y cuando $g(x) = 4$, $x = 0$ o 4. Concluimos que la gráfica de g es igual a la de f pero recorrida 2 unidades hacia la derecha. *Véase* la figura 24.

TABLA 4

x	$y = f(x) = x^2$	$y = g(x) = (x - 2)^2$
−2	4	16
0	0	4
2	4	0
4	16	4

FIGURA 24



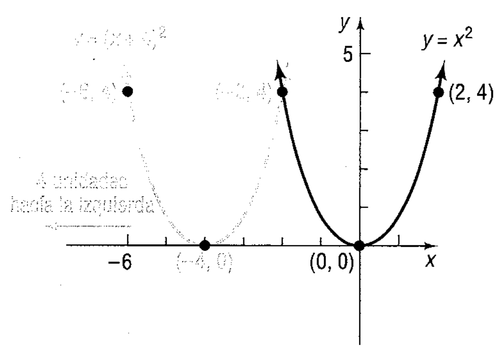
Si se suma un número c al argumento x de una función f, la gráfica de la nueva función $g(x) = f(x + c)$ es la gráfica de f con un **corrimiento horizontal** hacia la izquierda (si $c > 0$) o hacia la derecha (si $c < 0$). Veamos otro ejemplo.

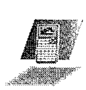
EJEMPLO 4 *Corrimiento horizontal hacia la izquierda*

Utilice la gráfica de $f(x) = x^2$ para obtener la de $h(x) = (x + 4)^2$.

Solución De nuevo, la función $h(x) = (x + 4)^2$ es, en esencia, una función cuadrada. De ese modo, su gráfica es igual a la de f pero recorrida en 4 unidades hacia la izquierda. (¿Advierte usted por qué?) *Véase* la figura 25.

FIGURA 25



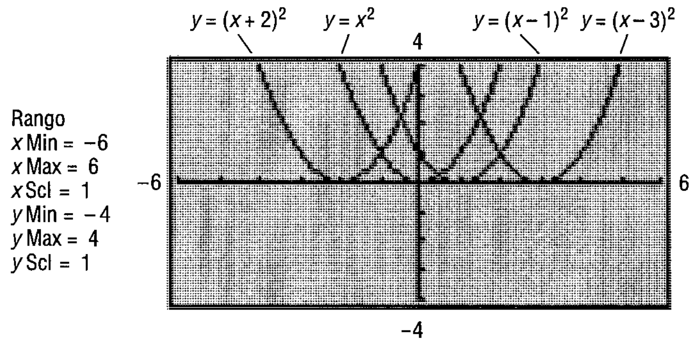


Observación del concepto: En una sola pantalla haga la gráfica de las siguientes funciones:

$$y = x^2, \quad y = (x - 1)^2, \quad y = (x - 3)^2, \quad y = (x + 2)^2$$

Véase la figura 26.

FIGURA 26



Ahora resuelva el problema 27.

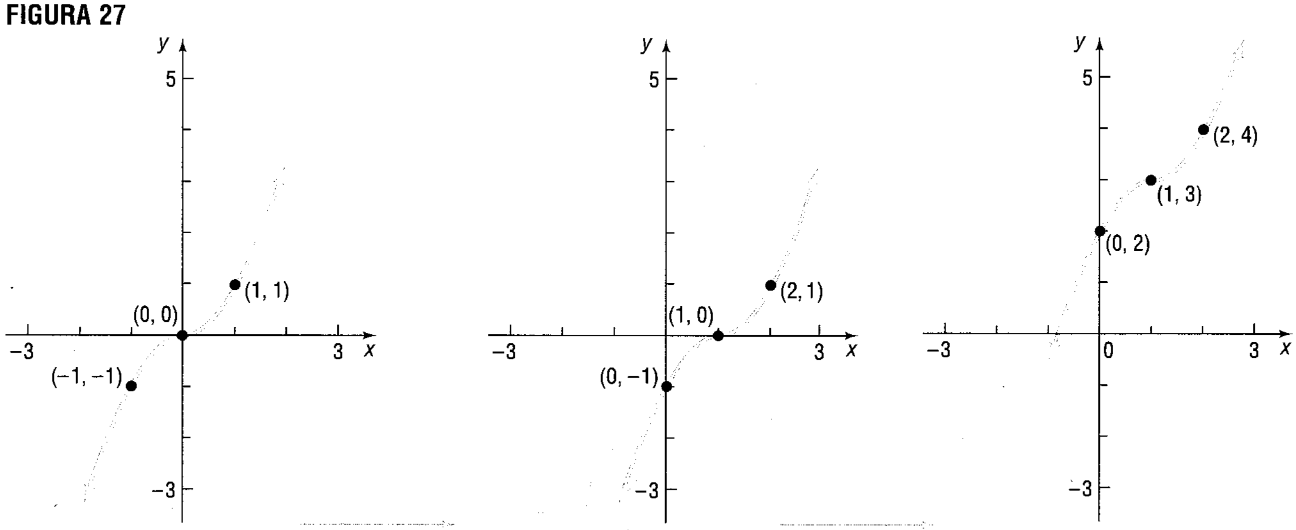
Los corrimientos vertical y horizontal se pueden combinar.

EJEMPLO 5 *Combinación de corrimientos verticales y horizontales*

Hacer la gráfica de la función $f(x) = (x - 1)^3 + 3$

Solución Trazamos la gráfica de f por pasos. Primero, observemos que la regla esencial para f es la de una función cúbica. De ese modo, comencemos con la gráfica de $y = x^3$. *Véase* la figura 27(a). Después, para obtener la gráfica de $y = (x - 1)^3$, recorremos la gráfica de $y = x^3$ en forma horizontal una unidad hacia la derecha. *Véase* la figura 27(b). Por último, para obtener la gráfica de $y = (x - 1)^3 + 3$, recorremos la gráfica de $y = (x - 1)^3$ en forma vertical 3 unidades hacia arriba. *Véase* la figura 27(c). Observe los tres puntos localizados en cada una de las gráficas. El uso de puntos clave como éstos puede ayudar a llevar un registro de lo que está sucediendo.

FIGURA 27



(a) $y = x^3$ Corrimiento horizontal hacia la derecha en 1 unidad. **(b)** $y = (x - 1)^3$ Corrimiento vertical hacia arriba en 3 unidades **(c)** $y = (x - 1)^3 + 3$

En el ejemplo 5, si se hubiera efectuado primero el corrimiento vertical y luego el horizontal el resultado habría sido el mismo. (Inténtelo usted mismo.)

Ahora resuelva el problema 39.

Compresiones y alargamientos

EJEMPLO 6 *Alargamiento vertical*

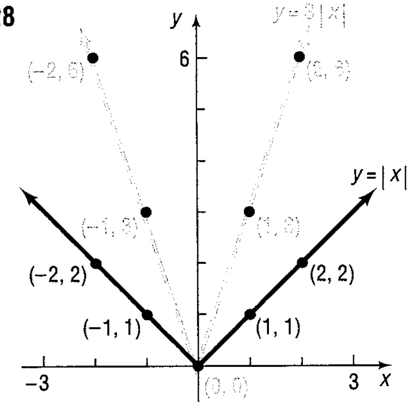
Utilizar la gráfica de $f(x) = |x|$ para obtener la de $g(x) = 3|x|$.

Solución Para ver la relación entre las gráficas de f y g formamos la tabla 5 enumerando los puntos de cada gráfica. Para cada x, la ordenada de un punto en la gráfica de g es igual a 3 veces la ordenada correspondiente en la gráfica de f. La gráfica de $f(x) = |x|$ se alarga en forma vertical por un factor de 3 [por ejemplo, de (1,1) a (1,3)] para obtener la gráfica de $g(x) = 3|x|$. *Véase* la figura 28.

TABLA 5

x	$y = f(x) = \|x\|$	$y = g(x) = 3\|x\|$
−2	2	6
−1	1	3
0	0	0
1	1	3
2	2	6

FIGURA 28



Al multiplicar el lado derecho de una función $y = f(x)$ por un número positivo k, la gráfica de la nueva función $y = kf(x)$ es una *compresión* (si $0 < k < 1$) o un *alargamiento* vertical (si $k > 1$) de la gráfica de $y = f(x)$.

EJEMPLO 7 *Compresión vertical*

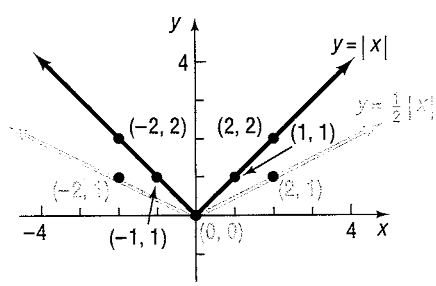
Utilice la gráfica de $f(x) = |x|$ para obtener la de $h(x) = \frac{1}{2}|x|$.

Solución Para cada x, la ordenada de un punto en la gráfica de h es la mitad de la ordenada correspondiente en la gráfica de f. La gráfica de $f(x) = |x|$ se comprime en forma vertical por un factor de $\frac{1}{2}$ [por ejemplo, de (2,2) a (2,1)] para obtener la gráfica $h(x) = \frac{1}{2}|x|$. *Véanse* la tabla 6 y la figura 29.

TABLA 6

x	$y = f(x) = \|x\|$	$y = h(x) = \frac{1}{2}\|x\|$
−2	2	1
−1	1	$\frac{1}{2}$
0	0	0
1	1	$\frac{1}{2}$
2	2	1

FIGURA 29



Compare las figuras 28 y 29. Observe que la gráfica de $f(x) = |x|$ se alarga en forma vertical para obtener la gráfica de $g(x) = 3|x|$, mientras que la misma se comprime en forma vertical para obtener la gráfica de $h(x) = \frac{1}{2}|x|$. Dicho de otra forma, para una x fija, la gráfica de $g(x) = 3|x|$ tiene ordenadas mayores que la de $f(x) = |x|$, mientras que la gráfica de $h(x) = \frac{1}{2}|x|$ tiene ordenadas menores que las de f.

Ahora resuelva el problema 29.

Al multiplicar el argumento x de una función $y = f(x)$ por un número positivo k, la gráfica de la nueva función $y = f(kx)$ también es una versión comprimida o alargada de la gráfica de $y = f(x)$, pero ahora eso ocurre en forma horizontal en vez de vertical. Para saber por qué, observemos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8

Compresión horizontal

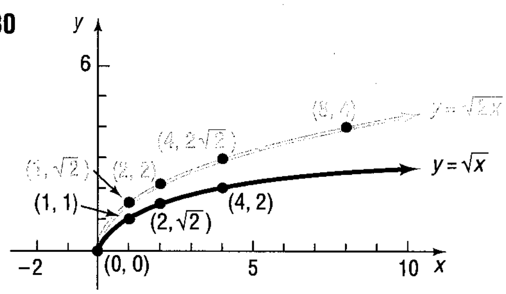
Utilizar la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ para obtener la de $g(x) = \sqrt{2x}$.

Solución La gráfica de f nos es familiar y aparece en la figura 30. La tabla 7 muestra algunos puntos en las gráficas de f y g. Vemos en la tabla 7 que la gráfica de g crece más rápido que la de f; es decir, la gráfica de g es comprimida en forma horizontal hacia el eje y. *Véase* la figura 30.

TABLA 7

x	$y = f(x) = \sqrt{x}$	$y = g(x) = \sqrt{2x}$
0	0	0
1	1	$\sqrt{2}$
2	$\sqrt{2}$	2
4	2	$2\sqrt{2}$

FIGURA 30



Observe que como $\sqrt{2x} = \sqrt{2}\sqrt{x}$, la gráfica de $g(x) = \sqrt{2x}$ también puede verse como un alargamiento vertical de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$.

Reflecciones con respecto a los ejes x y y

EJEMPLO 9

Reflexión con respecto al eje x

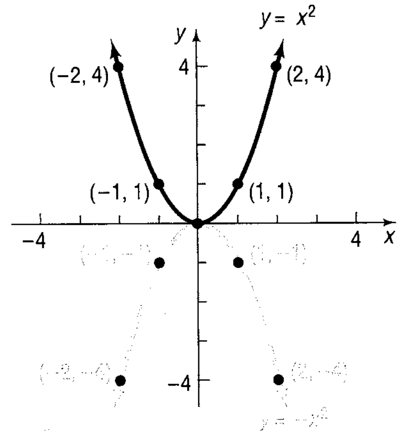
Haga la gráfica de la función: $f(x) = -x^2$

Solución Comencemos con la gráfica de $y = x^2$, como muestra la figura 31. Para todo punto (x, y) de la gráfica de $y = x^2$, el punto $(x, -y)$ está en la gráfica de $y = -x^2$, como se ve en la tabla 8. De ese modo, podemos hacer la gráfica de $y = x^2$ reflejando la gráfica de $y = x^2$ con respecto al eje x. *Véase* la figura 31.

TABLA 8

x	$y = x^2$	$y = -x^2$
-2	4	-4
-1	1	-1
0	0	0
1	1	-1
2	4	-4

FIGURA 31



Al multiplicar el lado derecho de la ecuación $y = f(x)$ por -1, la gráfica de la nueva función $y = -f(x)$ es la **reflexión con respecto al eje x** de la gráfica de la función $y = f(x)$.

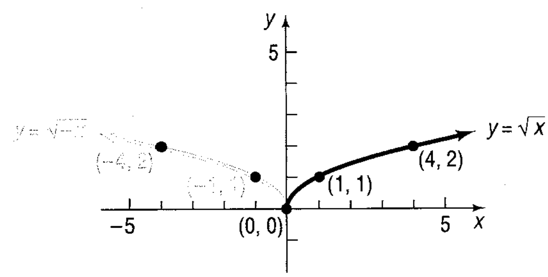
Ahora resuelva el problema 33.

EJEMPLO 13 *Reflexión con respecto al eje y*

Haga la gráfica de la función: $f(x) = \sqrt{-x}$

Solución Primero, observe que el dominio de f consta de todos los números reales x tales que $-x \geq 0$, o bien $x \leq 0$. Para obtener la gráfica de $f(x) = \sqrt{-x}$, comenzamos con la gráfica de $y = \sqrt{x}$, la cual aparece en la figura 32. Para cada punto (x, y) de la gráfica de $y = \sqrt{x}$, el punto $(-x, y)$ está en la gráfica de $y = \sqrt{-x}$. De ese modo, obtenemos la gráfica de $y = \sqrt{-x}$. Reflejando la gráfica de $y = \sqrt{x}$, con respecto al eje y. *Véase* la figura 32.

FIGURA 32



Si se conoce la gráfica de la función $y = f(x)$, la gráfica de la nueva función $y = f(-x)$ es la **reflexión con respecto al eje y** de la gráfica de la función $y = f(x)$.

Resumen de técnicas de graficación

La tabla 9 resume los procedimientos de graficación analizados hasta aquí.

TABLA 9

Para hacer la gráfica	**Trazar la gráfica de f y:**
Corrimientos verticales	
$y = f(x) + c, \quad c > 0$	Subir la gráfica de f c unidades.
$y = f(x) - c, \quad c > 0$	Bajar la gráfica de f c unidades.
Corrimientos horizontales	
$y = f(x + c), \quad c > 0$	Recorrer la gráfica de f c unidades hacia la izquierda.
$y = f(x - c), \quad c > 0$	Recorrer la gráfica de f c unidades hacia la derecha.
Compresión o alargamiento	
$y = kf(x), \quad k > 0$	Comprimir o alargar la gráfica de f por un factor de k.
$y = f(kx), \quad k > 0$	
Reflexión con respecto al eje x	
$y = -f(x)$	Reflejar la gráfica de f con respecto al eje x.
Reflexión con respecto al eje y	
$y = f(-x)$	Reflejar la gráfica de f con respecto al eje y.

Los siguientes ejemplos combinan algunos de los procedimientos descritos en esta sección para obtener la gráfica requerida.

EJEMPLO 11 *Combinar los procedimientos de graficación*

Hacer la gráfica de la función: $f(x) = \dfrac{3}{x-2} + 1$

Solución Utilizamos los pasos siguientes para obtener la gráfica de f:

PASO 1: $y = \dfrac{1}{x}$ Función recíproca.

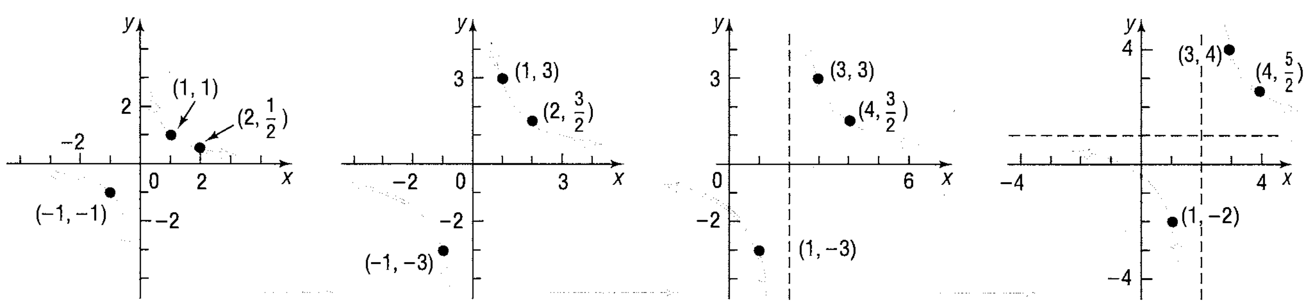
PASO 2: $y = \dfrac{3}{x}$ Alargamiento vertical de la gráfica de $y = \frac{1}{x}$ por un factor de 3

PASO 3: $y = \dfrac{3}{x-2}$ Corrimiento horizontal a la derecha, 2 unidades; reemplazar x por $x - 2$.

PASO 4: $y = \dfrac{3}{x-2} + 1$ Corrimiento vertical una unidad hacia arriba en 1 unidad

Véase la figura 33.

FIGURA 33



(a) $y = \frac{1}{x}$ (b) $y = \frac{3}{x}$ (c) $y = \frac{3}{x-2}$ (d) $y = \frac{3}{x-2} + 1$

Podemos realizar los pasos del ejemplo 11 en otro orden para obtener la gráfica de f. Veamos cómo:

PASO 1: $y = \dfrac{1}{x}$ Función recíproca.

PASO 2: $y = \dfrac{1}{x-2}$ Corrimiento horizontal hacia la derecha en 2 unidades; reemplazar x por $x - 2$

PASO 3: $y = \dfrac{3}{x-2}$ Alargamiento vertical de la gráfica de $y = \dfrac{1}{x-2}$ por un factor de 3.

PASO 4: $y = \dfrac{3}{x-2} + 1$ Corrimiento vertical hacia arriba en 1 unidad; sumar 1.

Ahora resuelva el problema 41.

EJEMPLO 12 *Combinación de procedimientos de graficación*

Hacer la gráfica de la función: $f(x) = \sqrt{1-x} + 2$

Solución Utilizamos los pasos siguientes para obtener la gráfica de $y = \sqrt{1-x} + 2$:

PASO 1: $y = \sqrt{x}$ Función raíz cuadrada.

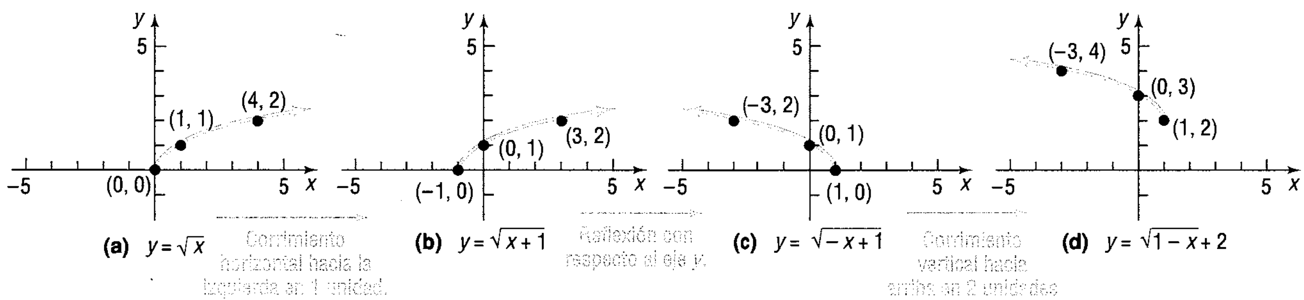
PASO 2: $y = \sqrt{x+1}$ Reemplazar x por $x + 1$; corrimiento horizontal hacia la izquierda en 1 unidad.

PASO 3: $y = \sqrt{-x+1} = \sqrt{1-x}$ Reemplazar x por $-x$; reflexión con respecto al eje y.

PASO 4: $y = \sqrt{1-x} + 2$ Corrimiento vertical hacia arriba en dos unidades.

Véase la figura 34.

FIGURA 34

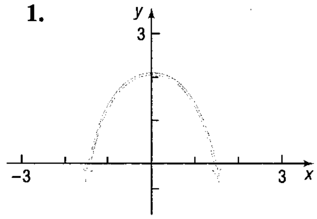


2.3 Ejercicio 2.3

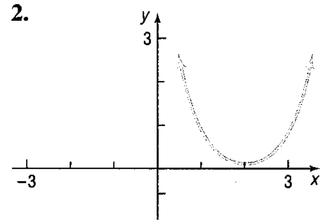
En los problemas del 1 al 12, relacione cada gráfica con una de las siguientes funciones:

A. $y = x^2 + 2$	*B.* $y = -x^2 + 2$	*C.* $y = \lvert x\rvert + 2$	*D.* $y = -\lvert x\rvert + 2$
E. $y = (x-2)^2$	*F.* $y = -(x+2)^2$	*G.* $y = \lvert x-2\rvert$	*H.* $y = -\lvert x+2\rvert$
I. $y = 2x^2$	*J.* $y = -2x^2$	*K.* $y = 2\lvert x\rvert$	*L.* $y = -2\lvert x\rvert$

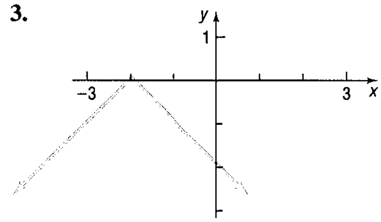
1.



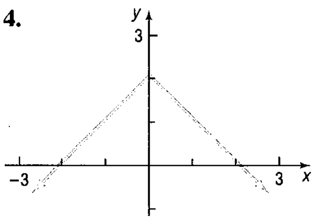
2.



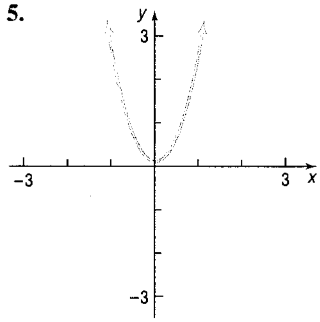
3.



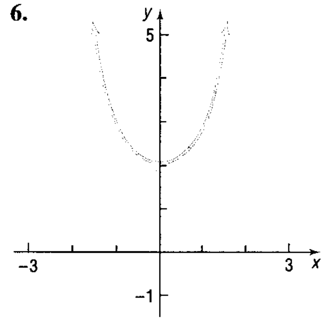
4.



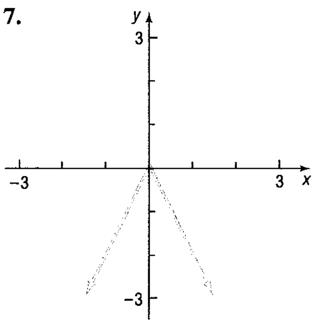
5.



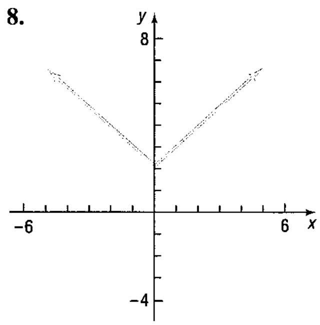
6.



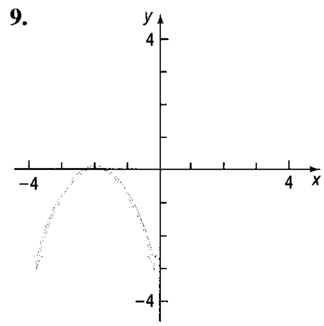
7.



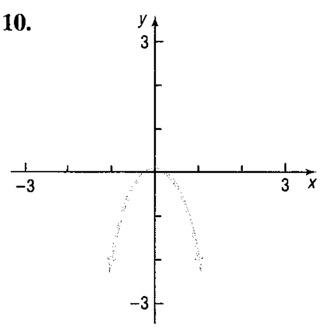
8.



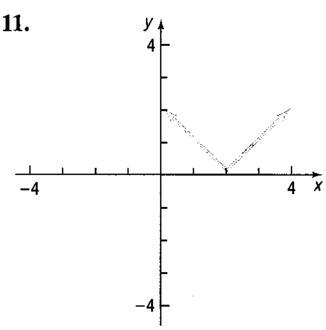
9.



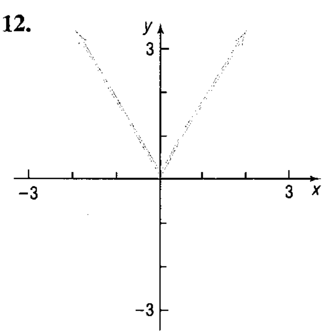
10.



11.



12.



En los problemas del 13 al 20, utilice la función $f(x) = x^3$. Escriba la función cuya gráfica sea la de $y = x^3$, pero ahora:

13. Recorrida hacia la derecha en 4 unidades.

14. Recorrida hacia la izquierda en 4 unidades.

15. Recorrida hacia arriba en 4 unidades.

16. Recorrida hacia abajo en 4 unidades.

17. Reflejada con respecto al eje y.

18. Reflejada con respecto al eje x.

19. Alargada en forma vertical por un factor de 4.

20. Alargada en forma horizontal por un factor de 4.

En los problemas del 21 al 50, Haga la gráfica de cada función con las técnicas de corrimiento, compresión, alargamiento o reflexión. Comience con la gráfica de la función básica ($y = x^2$) y muestre todos los pasos.

21. $f(x) = x^2 - 1$ **22.** $f(x) = x^2 + 4$ **23.** $g(x) = x^3 + 1$

24. $g(x) = x^3 - 1$ **25.** $h(x) = \sqrt{x-2}$ **26.** $h(x) = \sqrt{x+1}$

27. $f(x) = (x-1)^3$ **28.** $f(x) = (x+2)^3$ **29.** $g(x) = 4\sqrt{x}$

30. $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ **31.** $h(x) = \dfrac{1}{2x}$ **32.** $h(x) = \dfrac{4}{x}$

33. $f(x) = -|x|$ **34.** $f(x) = -\sqrt{x}$ **35.** $g(x) = -\dfrac{1}{x}$

36. $g(x) = -x^3$ **37.** $h(x) = [[-x]]$ **38.** $h(x) = \dfrac{1}{-x}$

39. $f(x) = (x+1)^2 - 3$ **40.** $f(x) = (x-2)^2 + 1$ **41.** $g(x) = \sqrt{x-2} + 1$

42. $g(x) = |x+1| - 3$ **43.** $h(x) = \sqrt{-x} - 2$ **44.** $h(x) = \dfrac{4}{x} + 2$

45. $f(x) = (x+1)^3 - 1$ **46.** $f(x) = 4\sqrt{x-1}$ **47.** $g(x) = 2|1-x|$

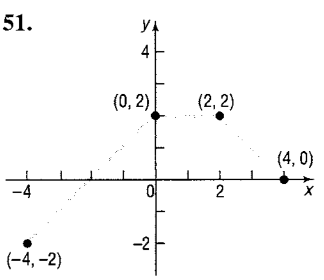
48. $g(x) = 4\sqrt{2-x}$ **49.** $h(x) = 2[[x-1]]$ **50.** $h(x) = -x^3 + 2$

En los problemas del 51 al 56 aparece la gráfica de una función f. Utilícela como el primer paso para hacer la gráfica de cada una de las siguientes funciones.

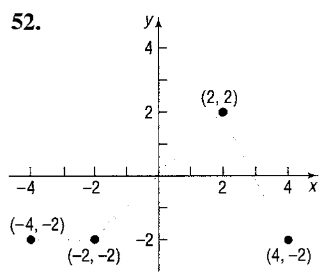
(a) $F(x) = f(x) + 3$ (b) $G(x) = f(x+2)$ (c) $P(x) = -f(x)$

(d) $Q(x) = \frac{1}{2}f(x)$ (e) $g(x) = f(-x)$ (f) $h(x) = 3f(x)$

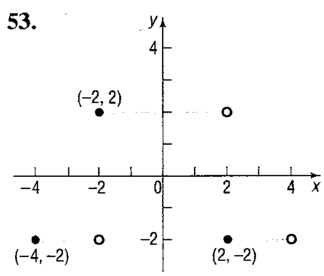
51.



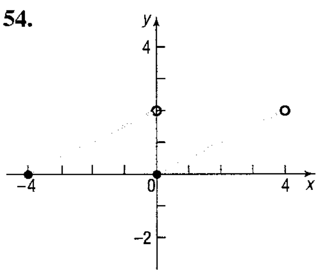
52.



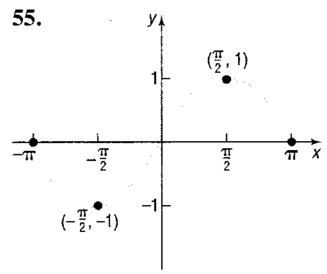
53.



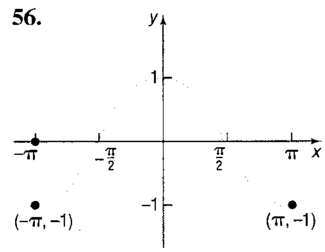
54.



55.



56.



En los problemas del 57 al 62, complete el cuadrado de cada expresión cuadrática. Después Haga la gráfica de cada función con la técnica de corrimiento.

57. $f(x) = x^2 + 2x$ **58.** $f(x) = x^2 - 6x$ **59.** $f(x) = x^2 - 8x + 1$

60. $f(x) = x^2 + 4x + 2$ **61.** $f(x) = x^2 + x + 1$ **62.** $f(x) = x^2 - x + 1$

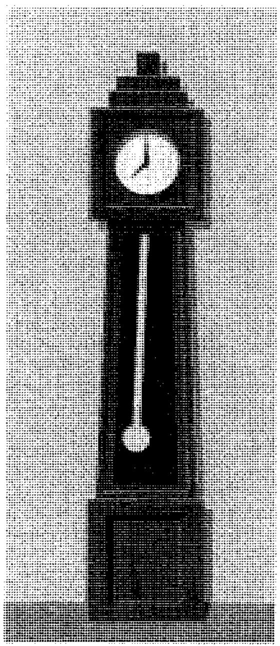
63. La ecuación $y = (x - c)^2$ define una *familia de parábolas*, una parábola para cada valor de c. En un conjunto de ejes coordenados, haga las gráficas de los elementos de la familia para $c = 0$, $c = 3$, $c = -2$.

64. Repita el problema 63 para la familia de parábolas $y = x^2 + c$.

65. *Medición de la temperatura.* La relación entre los grados Celsius (°C) y los Fahrenheit (°F) para medir la temperatura está dada por la ecuación

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

La relación entre los grados Celsius (°C) y los grados Kelvin (K) es $K = C + 273$. Haga la gráfica de la ecuación $F = \frac{9}{5}C + 32$, utilizando grados Fahrenheit en el eje y y grados Celsius en el eje x. Aplique las técnicas de esta sección para obtener la gráfica que muestre la relación entre los grados Kelvin y Fahrenheit.



66. *Periodo de un péndulo.* El periodo T (en segundos) de un péndulo simple es una función de su longitud l (en pies) dada por la ecuación

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

donde $g \approx 32.2$ pies por segundo es la aceleración de la gravedad. Haga la gráfica de esta función utilizando T en el eje y y l en el eje x. En los mismos ejes coordenados, grafique las siguientes funciones:

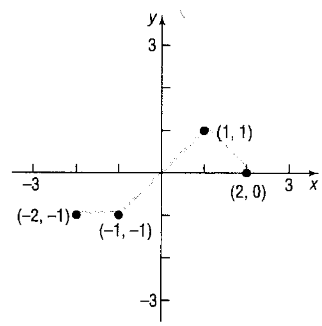
(a) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l+2}{g}}$ (b) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{4l}{g}}$

Analice la forma en que el cambio en la longitud afecta al periodo del péndulo.

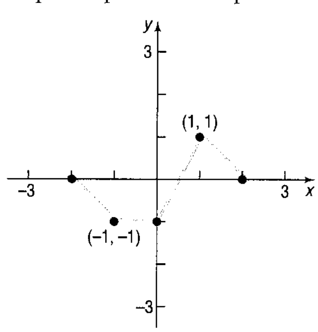
67. La figura muestra la gráfica de una función f.

(a) Haga la gráfica de (en forma completa) $y = |f(x)|$.

(b) Haga la gráfica de (en forma completa) $y = f(|x|)$.



68. Repita el problema 67 para la siguiente gráfica.



69. (a) Haga la gráfica de $y = x + 1$ y $y = |x + 1|$.

(b) Haga la gráfica de $y = 4 - x^2$ y $y = |4 - x^2|$.

(c) Haga la gráfica de $y = x^3 + x$ y $y = |x^3 + x|$.

(d) ¿Qué puede concluirse acerca de la relación entre las gráficas de $y = f(x)$ y $y = |f(x)|$?

70. (a) Haga la gráfica de $y = x + 1$ y $y = |x| + 1$.

(b) Haga la gráfica de $y = 4 - x^2$ y $y = 4 - |x|^2$.

(c) Haga la gráfica de $y = x^3 + x$ y $y = |x|^3 + |x|$.

(d) ¿Qué puede concluirse acerca de la relación entre las gráficas de $y = f(x)$ y $y = f(|x|)$?

Operaciones con funciones; composición de funciones

En esta sección presentamos algunas de las operaciones que pueden realizarse al trabajar con funciones. Veremos que, al igual que los números, se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir. Por ejemplo, si $f(x) = x^2 + 9$ y $g(x) = 3x + 5$, entonces

$$f(x) + g(x) = (x^2 + 9) + (3x + 5) = x^2 + 3x + 14$$

La nueva función $y = x^2 + 3x + 14$ es la *función suma* $f + g$. De manera similar,

$$f(x) \cdot g(x) = (x^2 + 9)(3x + 5) = 3x^3 + 5x^2 + 27x + 45$$

La nueva función $y = 3x^3 + 5x^2 + 27x + 45$ es la *función producto* $f \cdot g$.

Ahora veamos las definiciones generales.

Función suma

Si f y g son funciones:
Su **suma** $\boldsymbol{f + g}$ es la función definida por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

Función diferencia

Su **diferencia** $\boldsymbol{f - g}$ es la función definida por

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

Función producto

Su **producto** $\boldsymbol{f \cdot g}$ es la función definida por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Función cociente

Su **cociente** $\boldsymbol{f/g}$ es la función definida por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

En cada caso, el dominio de la función resultante consta de los números que son comunes a ambos dominios de f y de g, pero los números x para los cuales $g(x) = 0$ deben excluirse del dominio del cociente f/g.

De ese modo, la función suma, $f + g$, está definida como la suma de los valores de las funciones f y g, y así sucesivamente.

EJEMPLO 1 *Operaciones con funciones*

Sean f y g dos funciones definidas como

$$f(x) = \sqrt{x + 2} \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt{x - 3}$$

Determinar las siguientes funciones y el dominio en cada caso:

(a) $(f + g)(x)$ (b) $(f - g)(x)$ (c) $(f \cdot g)(x)$ (d) $(f/g)(x)$

(a) $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{x-3}$
(b) $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-3}$
(c) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (\sqrt{x+2})(\sqrt{x-3}) = \sqrt{(x+2)(x-3)}$
(d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}} = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}$

El dominio de f consta de todos los números x tales que $x \geq -2$; el dominio de g consta de todos los números x tales que $x \geq 3$. Los números x comunes a ambos dominios cumplen $x \geq 3$. Como resultado de ello, los números x tales que $x \geq 3$ forman el dominio de la función suma $f + g$, la función diferencia $f - g$ y la función producto $f \cdot g$. Para la función cociente f/g, debemos excluir de este conjunto el número 3, ya que el denominador, g, tiene el valor 0 cuando $x = 3$. Así, el dominio de f/g consta de todas las x mayores que 3, $x > 3$.

Ahora resuelva el problema 1.

A veces es útil ver una función complicada como la suma, diferencia, producto o cociente de funciones más sencillas. Por ejemplo,

$F(x) = x^2 + \sqrt{x}$ es la suma de $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

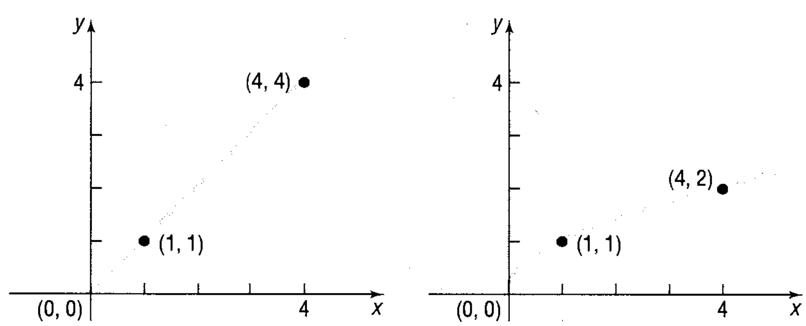
$H(x) = (x^2 - 1)/(x^2 + 1)$ es el cociente de $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = x^2 + 1$.

Un uso de esta forma de ver las funciones lo practicamos al obtener una gráfica. El siguiente ejemplo ilustra esta técnica de graficación cuando deseamos hacer la gráfica de una función que es la suma de dos funciones más sencillas. En este ejemplo el método utilizado se llama **suma de ordenadas.**

Hacer la gráfica de la función: $F(x) = x + \sqrt{x}$

Primero, observemos que el dominio de F es $x \geq 0$. Después dibujamos las dos funciones $f(x) = x$ y $g(x) = \sqrt{x}$ para $x \geq 0$. *Véanse* las figuras 35(a) y 35(b). Para localizar un punto $(x, F(x))$ en la gráfica de F, elegimos un número no negativo x y sumamos la ordenada $f(x)$ y $g(x)$ para obtener la ordenada $F(x) = f(x) + g(x)$. Por ejemplo, cuando $x = 1$, tenemos $f(1) = 1$, $g(1) = 1$, y $F(1) = f(1) + g(1) = 1 + 1 = 2$. Cuando $x = 4$, $f(4) = 4$, $g(4) = 2$, y $F(4) = f(4) + g(4) = 4 + 2 = 6$, y así sucesivamente. *Véase* la tabla 10. La figura 35(c) ilustra la gráfica de F.

FIGURA 35

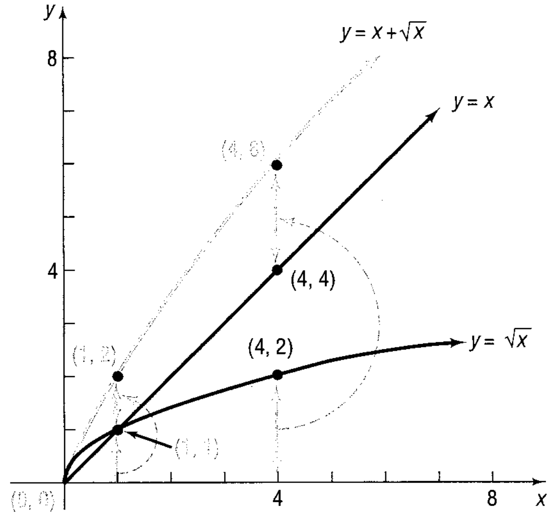


(a) $f(x) = x, x \geq 0$ **(b)** $g(x) = \sqrt{x}$

TABLA 10

x	$f(x) = x$	$g(x) = \sqrt{x}$	$F(x) = x + \sqrt{x}$
0	0	0	0
1	1	1	2
4	4	2	6

FIGURA 35 (continuación)



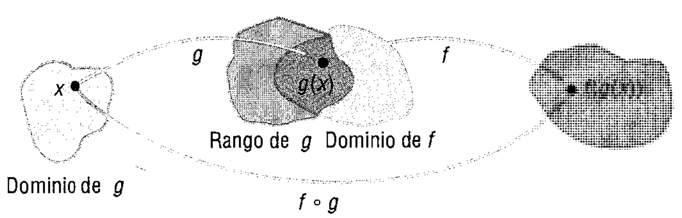
(c) $F(x) = x + \sqrt{x}$

Verificación: Haga la gráfica de las funciones $y = x$, $y = \sqrt{x}$, y $F(x) = x + \sqrt{x}$ compárelas con la figura 35(c).

Composición de funciones

Considere la función $y = (2x + 3)^2$. Si escribimos $y = f(u) = u^2$ y $u = g(x) = 2x + 3$, entonces, por un proceso de sustitución, podemos obtener la función original: $y = f(u) = f(g(x)) = (2x + 3)^2$. Este proceso es una **composición.** En general, suponga que f y g son dos funciones y que x es un número del dominio de g. Al evaluar g en x, obtenemos $g(x)$. Si $g(x)$ está en el dominio de f, entonces podemos evaluar f en $g(x)$ y obtener así la expresión $f(g(x))$. Si hacemos esto para toda x tal que x esté en el dominio de g y $g(x)$ esté en el dominio de f, la correspondencia resultante de x a $f(g(x))$ será una *función compuesta. Véase* la figura 36.

FIGURA 36



Función compuesta

Dadas dos funciones f y g, la **función compuesta,** denotada por $f \circ g$ (léase "f compuesta con g"), se define como

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

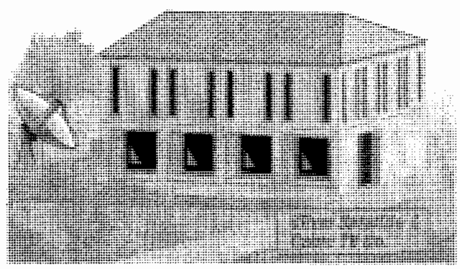
donde el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de números x en el dominio de g tales que $g(x)$ está en el dominio de f.

MISIÓN POSIBLE

Capítulo 2

ASESORÍA A LA COMPAÑÍA DE TELEVISIÓN POR SATÉLITE Y POR CABLE "SILVER"

Suponga que su equipo trabaja para la Compañía de Televisión por Satélite y por Cable "Silver", en el departamento de investigación y desarrollo. Hay que determinar una fórmula para calcular el costo de tender cable desde una caja de conexión hasta la casa del cliente. El primer caso implica a la familia Stevens, propietaria de una casa rural, con un camino de dos millas de largo desde cierta autopista hasta la casa. La caja de conexión más cercana se encuentra en esa autopista pero a 5 millas de distancia del camino mencionado.

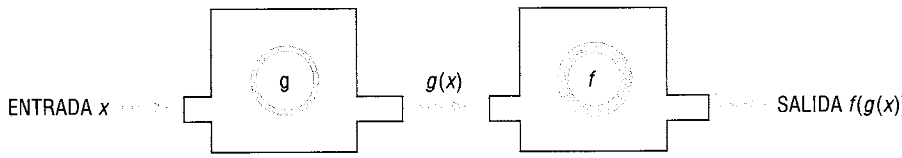


A la compañía le cuesta \$10.00 por milla instalar el cable en la autopista y \$14.00 por milla instalarlo fuera de la autopista. Como la casa de los Stevens está rodeada por una granja de su propiedad, es posible tender el cable atravesando ese terreno, ya sea directamente de la caja de conexión o desde cualquier punto entre la caja y el camino.

1. Haga un esquema de la situación dada suponiendo que la autopista es recta y que el camino es recto y perpendicular a la autopista. Incluya dos o más rutas posibles para el cable.
2. Suponga que x representa la distancia en millas que debe cubrir el cable a lo largo de la autopista, desde la caja de conexión hasta antes de dar la vuelta hacia la casa. Exprese el costo total de la instalación como una función de x. (Puede responder la pregunta 3 antes de la 2 si es que desea examinar ejemplos concretos antes de crear la ecuación.)
3. Haga una tabla con los valores enteros posibles de x y el costo correspondiente en cada caso. ¿Existe alguna alternativa cuyo costo parezca mínimo?
4. Si se cobrara \$80.00 a los Stevens por la instalación, ¿podría dejárseles elegir el camino que seguirá el cable? Explique su respuesta.
5. Si tiene una calculadora gráfica, haga la gráfica de la función de la pregunta 2 y determine si existe una alternativa no entera para x tal que el costo de instalación sea aún más barato. Utilice las funciones *zoom* y *trace* hasta obtener el costo mínimo posible.
6. Antes de realizar la instalación, usted verifica el reglamento local para las compañías de transmisión por cable y nota que existe una ley estatal aún no aprobada, la cual establece que el cable no puede salir de la autopista más allá de media milla del camino de los Stevens. Si esta legislación es aprobada, ¿cuál será el costo final de instalación del cable para los Stevens?
7. Si la compañía quiere instalar su sistema en 5000 casas del área, y suponiendo que el costo de los Stevens es típico, ¿cuánto dinero le costará si a causa de la nueva ley no puede utilizar el mínimo costo de instalación, sino que debe cumplir con el nuevo reglamento?

La figura 37 proporciona una segunda ilustración de la función compuesta. Observe que la función "interior" g en $f(g(x))$ se efectúa primero.

FIGURA 37



Observemos algunos ejemplos.

EJEMPLO 3 *Evaluación de una función compuesta*

Suponga que $f(x) = 2x^2 - 3$ y $g(x) = 4x$. Determinar:

(a) $(f \circ g)(1)$ (b) $(g \circ f)(1)$ (c) $(f \circ f)(-2)$ (d) $(g \circ g)(-1)$

Solución (a) $(f \circ g)(1) = f(g(1)) \underset{\substack{\uparrow \\ g(x)=4x \\ g(1)=4}}{=} f(4) \underset{\substack{\uparrow \\ f(x)=2x^2-3}}{=} 2 \cdot 16 - 3 = 29$

(b) $(g \circ f)(1) = g(f(1)) \underset{\substack{\uparrow \\ f(x)=2x^2-3 \\ f(1)=-1}}{=} g(-1) \underset{\substack{\uparrow \\ g(x)=4x}}{=} 4 \cdot (-1) = -4$

(c) $(f \circ f)(-2) = f(f(-2)) \underset{\substack{\uparrow \\ f(-2)=5}}{=} f(5) = 2 \cdot 25 - 3 = 47$

(d) $(g \circ g)(-1) = g(g(-1)) \underset{\substack{\uparrow \\ g(-1)=-4}}{=} g(-4) = 4 \cdot (-4) = -16$

Ahora resuelva el problema 17.

EJEMPLO 4 *Determinación de una función compuesta*

Suponga que $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^3 - 1$. Determinar las siguientes funciones compuestas y, a continuación, encontrar el dominio de cada función compuesta:

(a) $f \circ g$ (b) $g \circ f$ (c) $f \circ f$ (d) $g \circ g$

Solución (a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^3 - 1) = \sqrt{x^3 - 1}$

El dominio de $f \circ g$ es el intervalo $[1, \infty)$ que se encuentra determinando las x en el dominio de g para las que $x^3 - 1 \geq 0$.

(b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^3 - 1 = x^{3/2} - 1$

El dominio de $g \circ f$ es $[0, \infty)$.

(c) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$

El dominio de $f \circ f$ es $[0, \infty)$.

(d) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x^3 - 1) = (x^3 - 1)^3 - 1$

El dominio de $g \circ g$ es el conjunto de todos los números reales.

Ahora resuelva el problema 27.

Los ejemplos 4(a) y 4(b) muestran que, en general, $f \circ g \neq g \circ f$. Sin embargo, en algunos casos $f \circ g$ es igual a $g \circ f$, como nos muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 *Dos funciones compuestas iguales*

Si $f(x) = 3x - 4$ y $g(x) = \frac{1}{3}(x + 4)$, demostrar que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$ para toda x.

Solución

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\
&= f\left(\frac{x+4}{3}\right) && g(x) = \frac{1}{3}(x+4) = \frac{x+4}{3}. \\
&= 3\left(\frac{x+4}{3}\right) - 4 && \text{Sustituir } g(x) \text{ en la regla para } f,\ f(x) = 3x - 4. \\
&= x + 4 - 4 = x \\
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\
&= g(3x - 4) && f(x) = 3x - 4 \\
&= \tfrac{1}{3}[(3x - 4) + 4)] && \text{Sustituir } f(x) \text{ en la regla para } g,\ g(x) = \tfrac{1}{3}(x+4). \\
&= \tfrac{1}{3}(3x) = x
\end{aligned}
$$

Así, $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$.

En la siguiente sección veremos que existe una relación importante entre las funciones f y g para las que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$.

Ahora resuelva el problema 41.

Aplicación del cálculo

Algunas técnicas del cálculo requieren determinar las componentes de una función compuesta. Por ejemplo, la función $H(x) = \sqrt{x + 1}$ es una composición de las funciones f y g, donde $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x + 1$, ya que $H(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = \sqrt{x + 1}$.

EJEMPLO 6 *Determinar los componentes de una función compuesta*

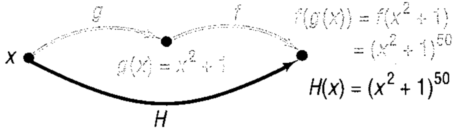
Encontrar las funciones f y g tales que $f \circ g = H$ si $H(x) = (x^2 + 1)^{50}$.

Solución La función H considera a $x^2 + 1$ y lo eleva a la potencia 50. Una forma natural de descomponer H es elevando la función $g(x) = x^2 + 1$ a la potencia 50. De modo que si hacemos $f(x) = x^{50}$ y $g(x) = x^2 + 1$, entonces

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\
&= f(x^2 + 1) \\
&= (x^2 + 1)^{50} = H(x)
\end{aligned}
$$

Véase la figura 38.

FIGURA 38



Se pueden determinar otras funciones f y g para las cuales $f \circ g = H$ en el ejemplo 6. Esto es, si $f(x) = x^2$ y $g(x) = (x^2 + 1)^{25}$, entonces

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f((x^2 + 1)^{25}) = [(x^2 + 1)^{25}]^2 = (x^2 + 1)^{50}$$

Así, aunque las funciones f y g determinadas como solución para el ejemplo 6 no son únicas, lo usual es que haya una alternativa "natural" para f y g que nos viene

Esta selección natural le permitirá utilizar su calculadora de manera más eficiente. Observemos de nuevo el ejemplo 6. Para calcular el valor de H en, digamos, 2, haremos lo siguiente:

Teclas:	$\boxed{2}$		$\boxed{x^2}$		$\boxed{+}$	$\boxed{1}$		$\boxed{=}$		$\boxed{x^y}$	$\boxed{50}$		$\boxed{=}$	
Pantalla:		$\boxed{2}$		$\boxed{4}$			$\boxed{1}$		$\boxed{5}$			$\boxed{50}$		$\boxed{8.8818 \quad E34}$

Encontrar las funciones f y g tales que $f \circ g = H$ si $H(x) = 1/(x + 1)$.

En este caso, H es el recíproco de $g(x) = x + 1$. Entonces si $f(x) = 1/x$ y $g(x) = x + 1$, tenemos que

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = \frac{1}{x + 1} = H(x)$$

Ejercicio 2.4

En los problemas del 1 al 10, para las funciones dadas f y g, determine las siguientes funciones y el dominio de cada una:

(a) $f + g$ *(b)* $f - g$ *(c)* $f \cdot g$ *(d)* f/g

1. $f(x) = 3x + 4$; $g(x) = 2x - 3$
2. $f(x) = 2x + 1$; $g(x) = 3x - 2$
3. $f(x) = x - 1$; $g(x) = 2x^2$
4. $f(x) = 2x^2 + 3$; $g(x) = 4x^3 + 1$
5. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = 3x - 5$
6. $f(x) = |x|$; $g(x) = x$
7. $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$; $g(x) = \dfrac{1}{x}$
8. $f(x) = 2x^2 - x$; $g(x) = 2x^2 + x$
9. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{3x - 2}$; $g(x) = \dfrac{4x}{3x - 2}$
10. $f(x) = \sqrt{x + 1}$; $g(x) = \dfrac{2}{x}$
11. Dadas $f(x) = 3x + 1$ y $(f + g)(x) = 6 - \frac{1}{2}x$, determine la función g.
12. Dadas $f(x) = 1/x$ y $(f/g)(x) = (x + 1) / (x^2 - x)$, determine la función g.

En los problemas del 13 al 16, utilice el método de suma de ordenadas para hacer la gráfica de cada función en el intervalo [0,2].

13. $f(x) = |x| + x^2$
14. $f(x) = |x| + \sqrt{x}$
15. $f(x) = x^3 + x$
16. $f(x) = x^3 + x^2$

En los problemas del 17 al 26, para las funciones dadas f y g, determine:

(a) $(f \circ g)(4)$ *(b)* $(g \circ f)(2)$ *(c)* $(f \circ f)(1)$ *(d)* $(g \circ g)(0)$

17. $f(x) = 2x$; $g(x) = 3x^2 + 1$
18. $f(x) = 3x + 2$; $g(x) = 2x^2 - 1$
19. $f(x) = 4x^2 - 3$; $g(x) = 3 - \frac{1}{2}x^2$
20. $f(x) = 2x^2$; $g(x) = 1 - 3x^2$
21. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = 2x$
22. $f(x) = \sqrt{x + 1}$; $g(x) = 3x$
23. $f(x) = |x|$; $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$
24. $f(x) = |x - 2|$; $g(x) = \dfrac{3}{x^2 + 2}$
25. $f(x) = \dfrac{3}{x^2 + 1}$; $g(x) = \sqrt{x}$
26. $f(x) = x^3$; $g(x) = \dfrac{2}{x^2 + 1}$

En los problemas del 27 al 40, para las funciones dadas f y g, determine:

(a) $f \circ g$ *(b)* $g \circ f$ *(c)* $f \circ f$ *(d)* $g \circ g$

Indique el dominio de cada función compuesta.

27. $f(x) = 2x + 3$; $g(x) = 3x$

28. $f(x) = -x$; $g(x) = 2x - 4$

29. $f(x) = 3x + 1$; $g(x) = x^2$

30. $f(x) = \sqrt{x+1}$; $g(x) = x + 4$

31. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 - 1$

32. $f(x) = \sqrt{x+1}$; $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

33. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$; $g(x) = \dfrac{1}{x}$

34. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$; $g(x) = x^2$

35. $f(x) = x^2$; $g(x) = \sqrt{x}$

36. $f(x) = 2x + 4$; $g(x) = \frac{1}{2}x - 2$

37. $f(x) = \dfrac{1}{2x+3}$; $g(x) = 2x + 3$

38. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$; $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

39. $f(x) = ax + b$; $g(x) = cx + d$

40. $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$; $g(x) = mx$

En los problemas del 41 al 48, muestre que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$.

41. $f(x) = 2x$; $g(x) = \frac{1}{2}x$

42. $f(x) = 4x$; $g(x) = \frac{1}{4}x$

43. $f(x) = x^3$; $g(x) = \sqrt[3]{x}$

44. $f(x) = x + 5$; $g(x) = x - 5$

45. $f(x) = 2x - 6$; $g(x) = \frac{1}{2}(x + 6)$

46. $f(x) = 4 - 3x$; $g(x) = \frac{1}{3}(4 - x)$

47. $f(x) = ax + b$; $g(x) = \dfrac{1}{a}(x - b)$, $a \neq 0$

48. $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $g(x) = \dfrac{1}{x}$

49. Si $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ y $g(x) = 2$, determine $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

50. Si $f(x) = x/(x - 1)$, determine $(f \circ f)(x)$.

En los problemas del 51 al 54, utilice $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x} + 2$, *y* $h(x) = 1 - 3x$ *para determinar la función compuesta indicada.*

51. $f \circ (g \circ h)$

52. $(f \circ g) \circ h$

53. $(f + g) \circ h$

54. $(f \circ h) + (g \circ h)$

En los problemas del 55 al 62, sean $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x$, *y* $h(x) = \sqrt{x} + 1$. *Exprese cada función como una composición de f, g y/o h.*

55. $F(x) = 9x^2$

56. $G(x) = 3x^2$

57. $H(x) = |x| + 1$

58. $p(x) = 3\sqrt{x} + 3$

59. $q(x) = x + 2\sqrt{x} + 1$

60. $R(x) = 9x$

61. $P(x) = x^4$

62. $Q(x) = \sqrt{\sqrt{x} + 1} + 1$

En los problemas del 63 al 70, determine funciones f y g de modo que $f \circ g = H$.

63. $H(x) = (2x + 3)^4$

64. $H(x) = (1 + x^2)^{3/2}$

65. $H(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

66. $H(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

67. $H(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)^2$

68. $H(x) = |2x^2 + 3|$

69. $H(x) = [[x^2 + 1]]$

70. $H(x) = (4 - x^2)^{-4}$

71. Si $f(x) = 2x^2 + 5$ y $g(x) = 3x + a$, de modo que la gráfica de $f \circ g$ cruce el eje y en 23.

72. Si $f(x) = 3x^2 - 7$ y $g(x) = 2x + a$, de modo que la gráfica de $f \circ g$ cruce el eje y en 68.

73. El área S (en metros cuadrados) de la superficie de un globo inflado con aire caliente está dada por

$$S(r) = 4\pi r^2$$

donde r es el radio del globo (en metros). Si el radio r crece con el tiempo t (en segundos) según la fórmula $r(t) = \frac{2}{3}t^3$, siendo $t \geq 0$, determine el área S de la superficie del globo como una función del tiempo t.

74. El volumen V (en metros cúbicos) del globo descrito en el problema 73, está dado por $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Si el radio r es la misma función de t que apareció ese problema, determine el volumen V como función del tiempo t.

75. *Producción automotriz.* La cantidad N de automóviles producidos en una fábrica en un día, después de t horas de trabajo, es $N(t) = 100t - 5t^2$, $0 \leq t \leq 10$. Si el costo C (en dólares) de producir x automóviles es $C(x) = 15{,}000 + 8000x$, determínelo como una función del tiempo t de trabajo en la fábrica.

76. *Ambiente.* El petróleo que se derrama de cierto tanque forma un círculo. Si el radio r (en pies) del derrame después de t horas es $r(t) = 200\sqrt{t}$, determine el área A cubierta por petróleo como una función del tiempo t.

77. *Costo de producción.* El precio p de cierto producto y la cantidad vendida x cumplen la ecuación de demanda

$$p = -\tfrac{1}{4}x + 100 \qquad 0 \leq x \leq 400$$

Suponga que el costo C de producir x unidades de dicho artículo es

$$C = \frac{\sqrt{x}}{} + 600$$

Si todos los artículos producidos son vendidos, determine el costo C como función del precio p. [*Sugerencia*: Despeje x en la ecuación de demanda, y después forme la composición.]

78. *Costo de un artículo.* El precio p de cierto artículo y la cantidad vendida x cumplen la ecuación de demanda

$$p = -\tfrac{1}{5}x + 200 \qquad 0 \leq x \leq 1000$$

Suponga que el costo C de producir x unidades es

$$C = \frac{\sqrt{x}}{} + 400$$

Si todos los artículos producidos se venden, determine el costo C como una función del precio p.

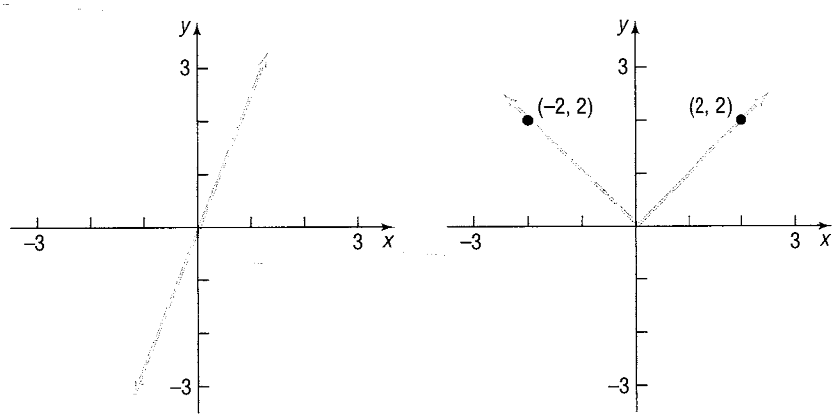
79. Si f y g son funciones impares, demuestre que la función compuesta $f \circ g$ también es impar.

80. Si f es una función impar y g una función par, demuestre que las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$ también son pares.

Funciones uno a uno; funciones inversas

Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) cualesquiera dos puntos *distintos* en la gráfica de una función $y = f(x)$. De aquí se deduce que $x_1 \neq x_2$. Para algunas funciones, también ocurre que las ordenadas de puntos distintos son siempre diferentes. Tales funciones son las llamadas funciones *uno a uno*. *Véase* la figura 39.

FIGURA 39



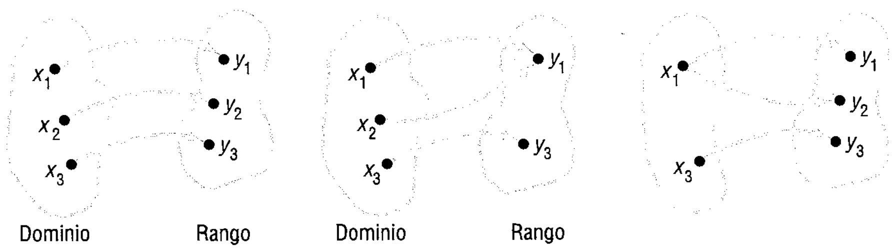
(a) $f(x) = 2x$
Uno a uno:
Toda pareja de puntos distintos tiene la ordenada diferente.

(b) $g(x) = |x|$
No es uno a uno:
Los puntos distintos (−2, 2) y (2, 2) tienen la misma ordenada

Función uno a uno Una función f es **uno a uno** si, para cualquier elección de números x_1 y x_2, $x_1 \neq x_2$, en el dominio de f, entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$.

En otras palabras, si f es una función uno a uno, entonces para cada x en el dominio de f existe exactamente una y en el rango y ninguna y en el rango es imagen de más de una x en el dominio. *Véase* la figura 40.

FIGURA 40



(a) Función uno a uno: Cada x en el dominio tiene una, y sólo una, imagen en el rango

(b) No es una función uno a uno: y_1 es la imagen de x_1 y x_2

(c) No es una función: x_1 tiene dos imágenes, y_1 y y_2

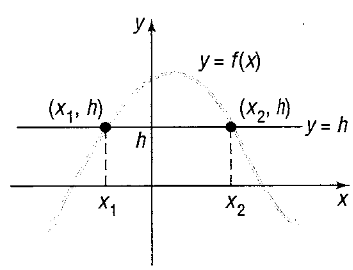
Como muestra la figura 41, si se conoce la gráfica de una función f existe un criterio sencillo, denominado **criterio de la recta horizontal,** para determinar si f es uno a uno.

Teorema
Criterio de la recta horizontal

Si todas las rectas horizontales cortan a la gráfica de una función en un punto cuando mucho, entonces f es uno a uno.

La razón del funcionamiento de esta prueba puede verse en la figura 41, donde la recta horizontal $y = h$ corta a la gráfica en dos puntos distintos, (x_1,h) y (x_2,h), con el mismo segundo elemento. Así, f no es uno a uno.

FIGURA 41
$f(x_1) = f(x_2) = h$, pero $x_1 \neq x_2$; f no es una función uno a uno



EJEMPLO 1 *Uso del criterio de la recta horizontal*

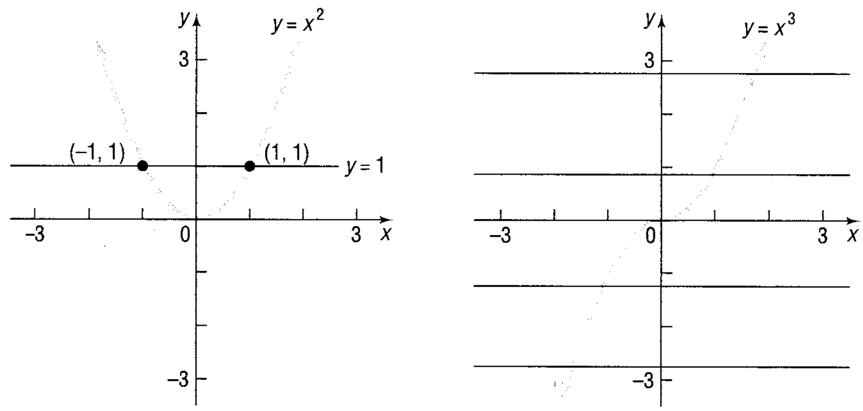
Para cada una de las funciones dadas, utilizar la gráfica para determinar si la función es uno a uno.

(a) $f(x) = x^2$ (b) $g(x) = x^3$

Solución (a) La figura 42(a) ilustra el criterio de la recta horizontal para $f(x) = x^2$. La recta horizontal $y = 1$ corta a la gráfica de f dos veces, en $(1,1)$ y en $(-1, 1)$; por lo tanto, f no es uno a uno.

(b) La figura 42(b) ilustra el criterio de la recta horizontal para $g(x) = x^3$. Como cada recta horizontal cortará a la gráfica de g exactamente una vez, g es uno a uno.

FIGURA 42



(a) Una recta horizontal corta a la gráfica dos veces; entonces f no es uno a uno

(b) Las rectas horizontales cortan la gráfica una sola vez; por lo tanto, g es uno a uno

Ahora resuelva el problema 1.

Analicemos más de cerca la función uno a uno $g(x) = x^3$. Esta es una función creciente. Como una función creciente (o decreciente) siempre tendrá valores y diferentes para valores x distintos, esto implica que una función creciente (o decreciente) en su dominio sea también una función uno a uno.

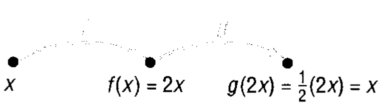
Teorema Una función creciente (o decreciente) es una función uno a uno.

Inversa de una función

Mencionamos con anterioridad que una función $y = f(x)$ es como una regla que nos indica hacer algo al argumento x. Por ejemplo, la función $f(x) = 2x$ multiplica al argumento por 2. Una *función inversa* de f deshace lo que f hace. Veamos, la función $g(x) = \frac{1}{2}x$, que divide el argumento entre 2, es una inversa de $f(x) = 2x$. *Véase* la figura 43.

FIGURA 43

$f(x) = 2x$; $g(x) = \frac{1}{2}x$



$g(f(x)) = g(2x) = \frac{1}{2}(2x) = x$

Para que una función $y = f(x)$ tenga una función inversa, f debe ser uno a uno. Entonces, para cada x en su dominio existe exactamente una y en su rango; además, a cada y en el rango, le corresponde exactamente una x en el dominio. La correspondencia del rango de f sobre el dominio de f también es entonces una función. Esta es la función *inversa de f*. Ahora daremos una definición.

Inversa de f

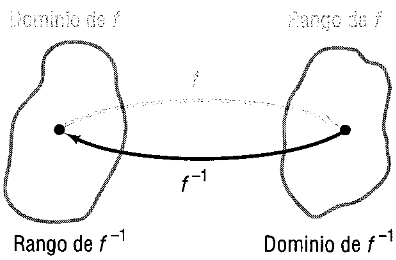
Sea f una función uno a uno $y = f(x)$. La **inversa de f**, denotada f^{-1}, es una función tal que $f^{-1}(f(x)) = x$ para toda x en el dominio de f, y $f(f^{-1}(x)) = x$ para toda x en el dominio de f^{-1}.

Advertencia: ¡Tenga cuidado! El -1 utilizado en f^{-1} no es un exponente. Así, f^{-1} *no* indica el recíproco de f sino su inversa.

La figura 44 ilustra la definición.

Tenemos entonces dos hechos evidentes con respecto a una función f y su inversa f^{-1}.

FIGURA 44



$$\boxed{\text{Dominio de } f = \text{Rango de } f^{-1} \quad \text{Rango de } f = \text{Dominio de } f^{-1}}$$

Revise de nuevo la figura 44 para visualizar la relación. Si comenzamos con x, aplicamos f y luego f^{-1}, obtendremos de nuevo x. Si comenzamos con x, aplicamos f^{-1} y luego f, llegamos de nuevo al número x. Dicho en forma simple, lo que hace f, f^{-1} lo deshace y viceversa:

$$\boxed{\text{Entrada } x} \xrightarrow{\text{Aplicar } f} \boxed{f(x)} \xrightarrow{\text{Aplicar } f^{-1}} \boxed{f^{-1}(f(x)) = x}$$

$$\boxed{\text{Entrada } x} \xrightarrow{\text{Aplicar } f^{-1}} \boxed{f^{-1}(x)} \xrightarrow{\text{Aplicar } f} \boxed{f(f^{-1}(x)) = x}$$

En otras palabras,

$$\boxed{f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{y} \quad f(f^{-1}(x)) = x}$$

Estas condiciones permiten verificar que una función es, de hecho, la inversa de f, como lo demuestra el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 *Verificación de las funciones inversas*

(a) Verificamos que la inversa de $g(x) = x^3$ es $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ demostrando que

$$g^{-1}(g(x)) = g^{-1}(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x$$

y

$$g(g^{-1}(x)) = g(\sqrt[3]{x}) = (\sqrt[3]{x})^3 = x$$

(b) Verificamos que la inversa de $h(x) = 3x$ es $h^{-1}(x) = \frac{1}{3}x$ demostrando que

$$h^{-1}(h(x)) = h^{-1}(3x) = \tfrac{1}{3}(3x) = x$$

y

$$h(h^{-1}(x)) = h(\tfrac{1}{3}x) = 3(\tfrac{1}{3}x) = x$$

(c) Verificamos que la inversa de $f(x) = 2x + 3$ es $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 3)$ demostrando que

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x + 3) = \tfrac{1}{2}[(2x + 3) - 3] + 3 = \tfrac{1}{2}(2x) = x$$

y

$$f(f^{-1}(x)) = f(\tfrac{1}{2}(x - 3)) = 2[\tfrac{1}{2}(x - 3)] + 3 = (x - 3) + 3 = x.$$

Ahora resuelva el problema 13.

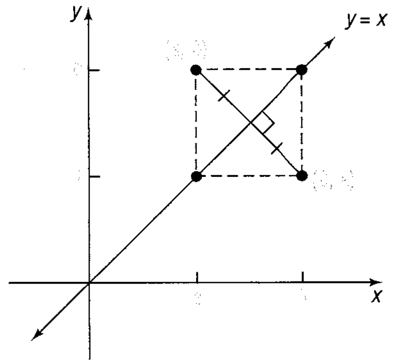
Exploración: Haga la gráfica de $y = x$ en una pantalla cuadrada con la ventana $-3 \leq x \leq 7$, $-2 \leq y \leq 2$. Después, haga la gráfica de $y = x^3$ seguida de su inversa, $y = \sqrt[3]{x}$.. ¿Qué observa respecto de las gráficas de $y = x^3$, su inversa $y = \sqrt[3]{x}$ y la recta $y = x$?

Repita el experimento para las funciones del problema 13. ¿Observa usted la simetría de la gráfica de f y su inversa respecto de la recta $y = x$?

Interpretación geométrica

Sea (a, b) un punto en la gráfica de una función uno a uno f definida por $y = f(x)$. Entonces $b = f(a)$. Esto significa que $a = f^{-1}(b)$, así (b, a) es un punto en la gráfica de la función inversa f^{-1}. La relación que existe entre el punto (a, b) en f y el punto (b, a) en f^{-1} aparece en la figura 45. El segmento que une (a, b) y (b, a) es perpendicular a la recta $y = x$ y esta recta es su bisectriz. (¿Puede ver por qué?) Esto implica que el punto (b, a) en f^{-1} es la reflexión respecto de la recta $y = x$ del punto (a, b) en f.

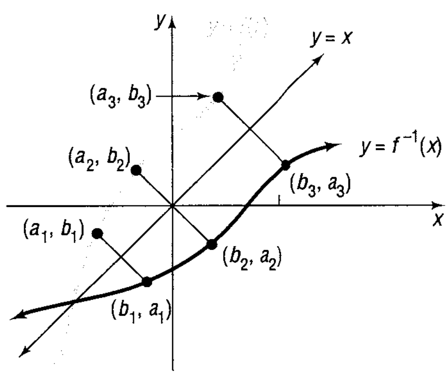
FIGURA 45



La gráfica de una función f y la de su inversa f^{-1} son simétricas respecto de la recta $y = x$.

La figura 46 ilustra este resultado. Observe que, una vez conocida la gráfica de f, podemos obtener la gráfica de f^{-1} doblando el papel a lo largo de la recta $y = x$.

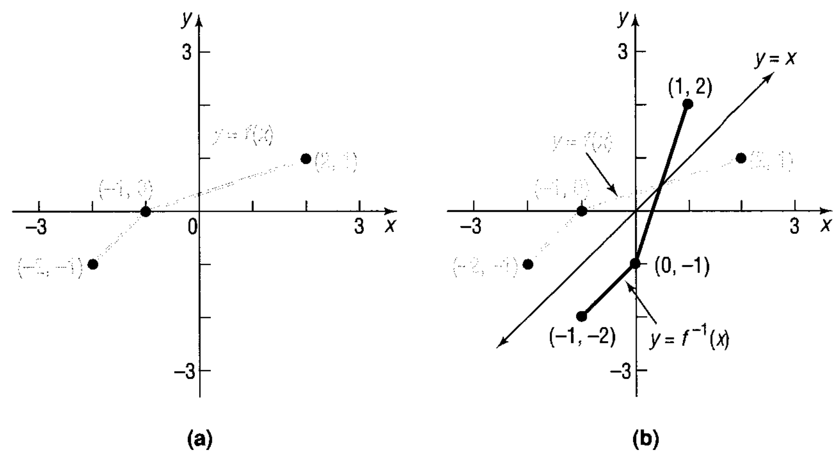
FIGURA 46



La gráfica de la figura 47(a) es la de una función uno a uno $y = f(x)$. Dibuje la gráfica de su inversa.

Primero agregamos la gráfica de $y = x$ a la figura 47(a). Como los puntos $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, y $(2, 1)$ se encuentran en la gráfica de f, sabemos que los puntos $(-1, -2)$, $(0, -1)$, y $(1, 2)$ deben estar en la gráfica de f^{-1}. Como la gráfica de f^{-1} es la reflexión respecto de la recta $y = x$ de la gráfica de f, podemos dibujar f^{-1}. *Véase* la figura 47(b).

FIGURA 47



Ahora resuelva el problema 7.

Determinación de la función inversa

El hecho de que la gráfica de una función uno a uno f y su inversa sean simétricas respecto de la recta $y = x$ nos dice más. Observemos de nuevo la figura 46. Deducimos que es posible obtener f^{-1} intercambiando los papeles de x y y. Es decir, si f está definida por la ecuación

$$y = f(x)$$

entonces f^{-1} se define por la ecuación

$$x = f(y)$$

¡Tenga cuidado! La ecuación $x = f(y)$ define f^{-1} de manera implícita. Si podemos despejar a y en esta ecuación, tendremos la forma explícita de f^{-1}, es decir,

$$y = f^{-1}(x)$$

Utilicemos este procedimiento para determinar la inversa de $f(x) = 2x + 3$. (Como f es una función lineal creciente, sabemos que es uno a uno.)

EJEMPLO 4 *Determinación de la función inversa*

Determinar la inversa de $f(x) = 2x + 3$, así como dominio y rango de f y f^{-1}. Hacer la gráfica de f y f^{-1} en los mismos ejes coordenados.

Solución En la ecuación $y = 2x + 3$, intercambiamos las variables x y y. El resultado,

$$x = 2y + 3$$

es una ecuación que define a la inversa f^{-1} de manera implícita. Al despejar y, obtenemos

$$\begin{aligned} 2y + 3 &= x \\ 2y &= x - 3 \\ y &= \tfrac{1}{2}(x - 3) \end{aligned}$$

La forma explícita de la inversa f^{-1} es entonces

$$f^{-1}(x) = \tfrac{1}{2}(x - 3)$$

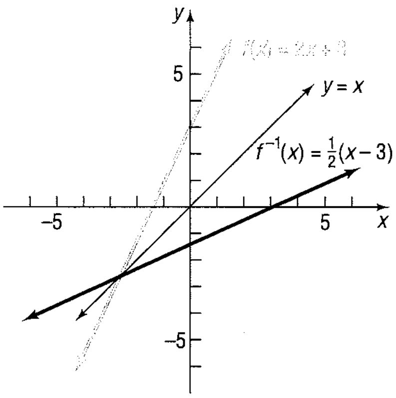
lo cual verificamos en el ejemplo 2(c).

Entonces tenemos

$$\text{Dominio } f = \text{rango } f^{-1} = (-\infty, \infty)$$
$$\text{Rango } f = \text{dominio } f^{-1} = (-\infty, \infty)$$

En la figura 48 aparecen las gráficas de $f(x) = 2x + 3$ y su inversa $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 3)$. Observe la simetría de las gráficas respecto de la recta $y = x$.

FIGURA 48



A continuación enunciamos los pasos a seguir para determinar la inversa de una función uno a uno.

Procedimiento para determinar la inversa de la función uno a uno

PASO 1: En $y = f(x)$, intercambie las variables x,y para obtener

$$x = f(y)$$

Esta ecuación define la función inversa f^{-1} de manera implícita.

PASO 2: Si es posible, despeje y en la ecuación implícita en términos de x para obtener la forma explícita de f^{-1}:

$$y = f^{-1}(x)$$

PASO 3: Verifique el resultado, mostrando que

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{y} \quad f(f^{-1}(x)) = x$$

EJEMPLO 5 *Determinación de la función inversa*

La función

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}$$

es uno a uno. Determinar su inversa y verificar el resultado.

Solución PASO 1: Intercambiamos las variables x y y en

$$y = \frac{2x + 1}{x - 1}$$

para obtener

$$x = \frac{2y+1}{y-1}$$

PASO 3: Despejamos y:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2y+1}{y-1} \\ x(y-1) &= 2y+1 \\ xy - x &= 2y+1 \\ xy - 2y &= x+1 \\ (x-2)y &= x+1 \\ y &= \frac{x+1}{x-2} \end{aligned}$$

La inversa es

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

PASO 4: *Verificación*:

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) = \frac{\dfrac{2x+1}{x-1}+1}{\dfrac{2x+1}{x-1}-2} = \frac{2x+1+x-1}{2x+1-2(x-1)} = \frac{3x}{3} = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \frac{2\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)+1}{\dfrac{x+1}{x-2}-1} = \frac{2(x+1)+x-2}{x+1-(x-2)} = \frac{3x}{3} = x$$

Verificación: Hemos visto que si $f(x) = (2x+1)/(x-1)$, entonces $f^{-1}(x) = (x+1)/(x-2)$. Haga la gráfica de $y = f(f^{-1}(x))$ en una pantalla cuadrada. ¿Qué es lo que ve? ¿Le sorprende?

Ahora resuelva el problema 25.

Si una función no es uno a uno entonces no tendrá inversa. Sin embargo, en algunos casos, una restricción adecuada en el dominio de dicha función producirá una nueva función, que será uno a uno. Veamos un ejemplo de esta práctica común.

EJEMPLO 6 *Determinación de la función inversa*

Determine la inversa de $y = f(x) = x^2$ si $x \geq 0$.

Solución La función $f(x) = x^2$ no es uno a uno. [Consulte el ejemplo 1(a).] Sin embargo, si restringimos f sólo a la parte de su dominio donde $x \geq 0$, como se indica, tendremos una nueva función que es creciente y, por lo tanto, uno a uno. Como resultado, la función definida por $y = x^2$, $x \geq 0$, tiene una inversa, f^{-1}.

Seguiremos los pasos dados anteriormente para determinar f^{-1}:

PASO 1: En la ecuación $y = x^2$, $x \geq 0$, intercambiamos las variables x y y. El resultado es

$$x = y^2 \qquad y \geq 0$$

Esta ecuación define (de forma implícita) a la función inversa.

PASO 2: Despejamos y para obtener la forma explícita de la inversa. Como $y \geq 0$, sólo se obtiene una solución:

$$y = \sqrt{x}$$

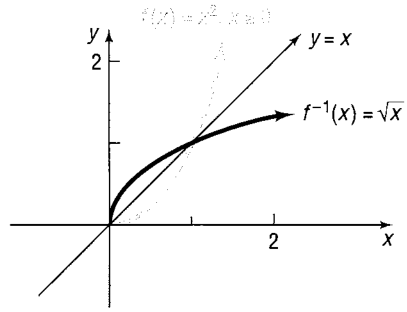
de modo que $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

PASO 3: Verificación: $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| = x, \quad$ ya que $x \geq 0$

$$f(f^{-1})(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$$

La figura 49 ilustra las gráficas de $f(x) = x^2$, $x \geq 0$, y $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

FIGURA 49



Calculadoras

Observamos antes que muchas calculadoras tienen teclas que permiten determinar el valor de una función. Por lo general, estas mismas calculadoras tienen una tecla marcada con $\boxed{\text{inv}}$, $\boxed{\text{inverse}}$, $\boxed{\text{2nd}}$, o $\boxed{\text{shift}}$ que le permite calcular el valor de la función inversa correspondiente. (Si la inversa real aparece como una tecla de función, como en los casos $\boxed{\sqrt{x}}$ y $\boxed{x^2}$, tlo usual es que la tecla inversa esté desactivada de tales funciones.)

Intente los siguientes experimentos en su calculadora:

Teclas:	1.234		$\sqrt{x}$		x^2	
Pantalla:		1.234		1.1108555		1.234
Teclas:	1.234		ln		inv ln	
Pantalla:		1.234		0.2102609		1.234

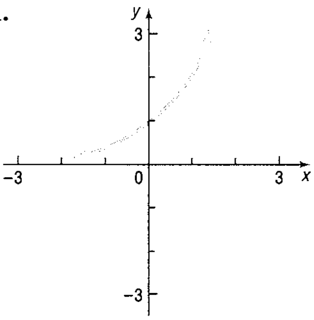
Resumen

1. Si una función f es uno a uno, entonces tiene una inversa f^{-1}.
2. Dominio f = Rango f^{-1}; Rango f = Dominio f^{-1}.
3. Para verificar que f^{-1} es la inversa de f, demuestre que $f^{-1}(f(x)) = x$ y $f(f^{-1}(x)) = x$.
4. Las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto de la recta $y = x$.

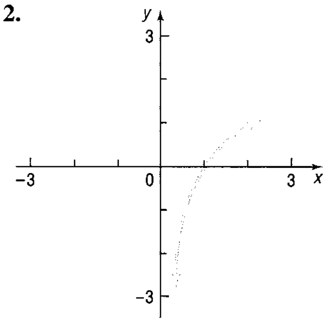
Ejercicio 2.5

En los problemas del 1 al 6 aparece la gráfica de una función. Utilice el criterio de la recta horizontal para determinar si f es uno a uno.

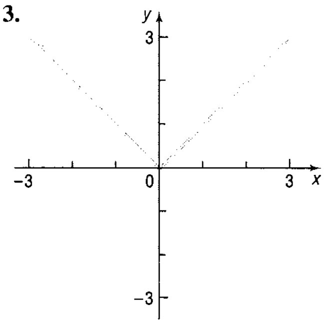
1.



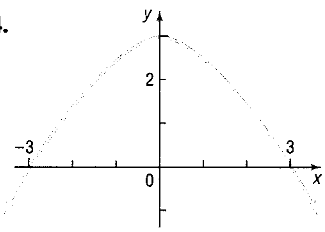
2.



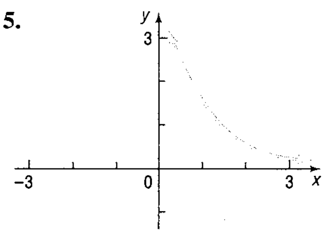
3.



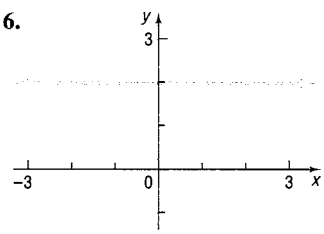
4.



5.

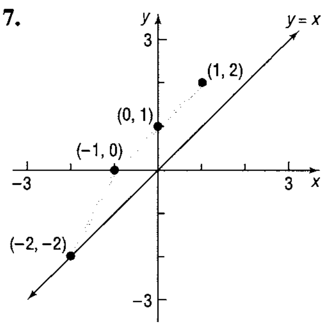


6.

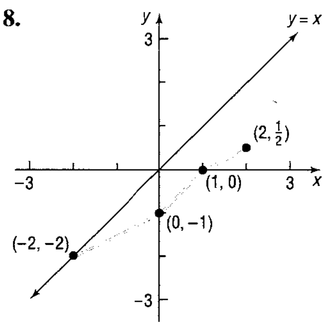


En los problemas del 7 al 12 aparece la gráfica de una función f uno a uno. Determine la gráfica de la función inversa f^{-1}. Por conveniencia (y como sugerencia), también aparece la gráfica de $y = x$.

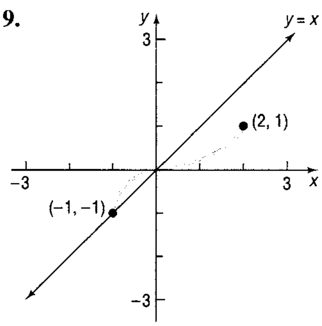
7.



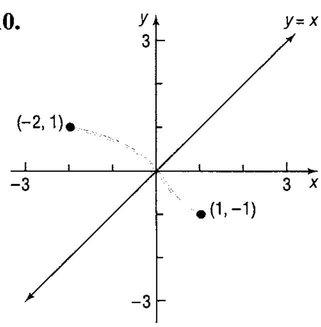
8.



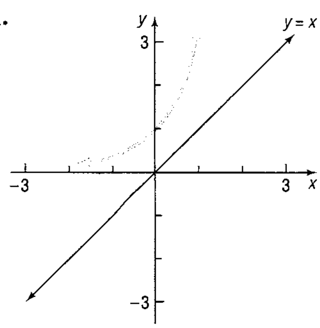
9.



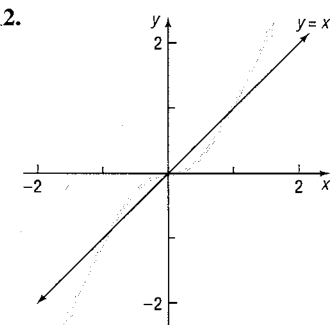
10.



11.



12.



En los problemas del 13 al 22, verifique si las funciones f y g son inversas una de la otra, demostrando que $f(g(x)) = x$ y $g(f(x)) = x$.

13. $f(x) = 3x + 4$; $g(x) = \frac{1}{3}(x - 4)$

14. $f(x) = 3 - 2x$; $g(x) = -\frac{1}{2}(x - 3)$

15. $f(x) = 4x - 8$; $g(x) = \dfrac{x}{4} + 2$

16. $f(x) = 2x + 6$; $g(x) = \frac{1}{2}x - 3$

17. $f(x) = x^3 - 8$; $g(x) = \sqrt[3]{x + 8}$

18. $f(x) = (x - 2)^2$, $x \geq 2$; $g(x) = \sqrt{x} + 2$, $x \geq 0$

19. $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $g(x) = \dfrac{1}{x}$

20. $f(x) = x$; $g(x) = x$

21. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x + 4}$; $g(x) = \dfrac{4x - 3}{2 - x}$

22. $f(x) = \dfrac{x - 5}{2x + 3}$; $g(x) = \dfrac{3x + 5}{1 - 2x}$

En los problemas del 23 al 34 la función f es uno a uno. Determine su inversa y verifique su respuesta. Indique el dominio y el rango de f y f^{-1}. Haga la gráfica de f y f^{-1} en los mismos ejes coordenados.

23. $f(x) = 3x$

24. $f(x) = -4x$

25. $f(x) = 4x + 2$

26. $f(x) = 1 - 3x$

27. $f(x) = x^3 - 1$

28. $f(x) = x^3 + 1$

29. $f(x) = x^2 + 4$, $x \geq 0$

30. $f(x) = x^2 + 9$, $x \geq 0$

31. $f(x) = \dfrac{4}{x}$

32. $f(x) = -\dfrac{3}{x}$

33. $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$

34. $f(x) = \dfrac{4}{x + 2}$

En los problemas del 35 al 46 la función f es uno a uno. Determine su inversa y verifique su respuesta. Indique el dominio y el rango de f y f^{-1}.

35. $f(x) = \dfrac{2}{3 + x}$

36. $f(x) = \dfrac{4}{2 - x}$

37. $f(x) = (x + 2)^2$, $x \geq -2$

38. $f(x) = (x - 1)^2$, $x \geq 1$

39. $f(x) = \dfrac{2x}{x - 1}$

40. $f(x) = \dfrac{3x + 1}{x}$

41. $f(x) = \dfrac{3x + 4}{2x - 3}$

42. $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x + 4}$

43. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x + 2}$

44. $f(x) = \dfrac{-3x - 4}{x - 2}$

45. $f(x) = 2\sqrt[3]{x}$

46. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$

47. Determine la inversa de la función lineal $f(x) = mx + b$, $m \neq 0$.

48. Determine la inversa de la función $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $0 \leq x \leq r$.

49. ¿Puede una función par ser uno a uno? Explique su respuesta.

50. ¿Toda función impar es uno a uno? Explique su respuesta.

51. Una función f tiene una inversa. Si la gráfica de f se encuentra en el cuadrante I, ¿en qué cuadrante estará la gráfica de f^{-1}?

52. Una función f tiene una inversa. Si la gráfica de f se encuentra en el cuadrante II, ¿en qué cuadrante estará la gráfica de f^{-1}?

53. La función $f(x) = |x|$ no es uno a uno. Determine una restricción adecuada del dominio de f para que la nueva función resulte ser uno a uno. Después, encuentre la inversa de f.

54. La función $f(x) = x^4$ no es uno a uno. Determine una restricción adecuada del dominio de f para que la nueva función resulte ser uno a uno. Después, encuentre la inversa de f.

55. *Conversión de temperatura.* Para convertir de x grados Celsius a y grados Fahrenheit utilizamos la fórmula $y = f(x) = \frac{9}{5}x + 32$. Para convertir de x grados Fahrenheit a y grados Celsius usamos $y = g(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$. Muestre que f y g son funciones inversas.

56. *Demanda de maíz.* La demanda de maíz cumple la ecuación $p(x) = 300 - 50x$, donde p es el precio por *bushel* (en dólares) y x es el número de *bushels* producidos, en millones. Exprese la producción x como una función del precio p.

57. *Periodo de un péndulo.* El periodo T (en segundos) de un péndulo simple es una función de su longitud l (en pies), dada por $T(l) = 2\pi\sqrt{l/g}$, donde $g \approx 32.2$ pies por segundo (por segundo es la aceleración de la gravedad). Exprese la longitud l como una función del periodo T.

58. Dé un ejemplo de una función cuyo dominio sea el conjunto de los números reales y que no sea creciente ni decreciente en su dominio, pero que sea uno a uno. [*Sugerencia:* Utilice una función definida por partes.]

59. Dada

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

determine $f^{-1}(x)$. Si $c \neq 0$, ¿bajo qué condiciones en a, b, c y d se cumple $f = f^{-1}$?

60. Hemos dicho que no es sencillo determinar el rango de una función f. Sin embargo, si f es uno a uno, podemos encontrar su rango determinando el dominio de la función inversa f^{-1}. Utilice esta técnica para hallar el rango de cada una de las siguientes funciones uno a uno:

(a) $f(x) = \dfrac{2x + 5}{x - 3}$ (b) $g(x) = 4 - \dfrac{2}{x}$ (c) $F(x) = \dfrac{3}{4 - x}$

Para los problemas del 61 al 66, escriba un programa que haga la gráfica de la inversa de una función $y = f(x)$. Después, haga la gráfica de la función f y su inversa en la misma pantalla. Compare sus respuestas con las de los problemas del 23 al 28.

61. $f(x) = 3x$ 62. $f(x) = -x$ 63. $f(x) = 4x + 2$
64. $f(x) = 1 - 3x$ 65. $f(x) = x^3 - 1$ 66. $f(x) = x^3 + 1$

67. Si se corta la gráfica de una función y su inversa, ¿debe ocurrir esto en $y = x$? ¿Pueden cortarse en cualquier otro punto? ¿Deben cortarse?

68. ¿Pueden ser iguales una función uno a uno y su inversa? ¿Qué debe cumplir la gráfica de f para que esto suceda? Dé algunos ejemplos para sustentar su conclusión.

69. Haga la gráfica de una función uno a uno que contenga los puntos $(-2, -3)$, $(0, 0)$, y $(1, 5)$. Luego trace la gráfica de su inversa. Compare su gráfica con las de algunos de sus condiscípulos y analice cualquier similitud. ¿Qué diferencias observa?

Modelos matemáticos: construcción de funciones

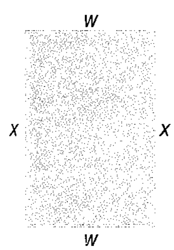
Con frecuencia, los problemas del mundo real conducen a modelos matemáticos que utilizan funciones, las cuales hay que construir con base en la información de que se disponga. Para construir funciones debemos poder traducir la descripción verbal de un problema al lenguaje de las matemáticas. Esto lo hacemos asignando símbolos para representar a las variables independientes y dependientes y determinando después la función o regla que relaciona a dichas variables.

EJEMPLO 1 *Área de un rectángulo con perímetro fijo*

El perímetro de un rectángulo es de 50 pies. Exprese su área A como una función de la longitud x de un lado.

Solución Consulte la figura 50. Si la longitud del rectángulo es x y w su anchura, entonces la suma de las longitudes de los lados es el perímetro, 50.

FIGURA 50



$$\begin{aligned} x + w + x + w &= 50 \\ 2x + 2w &= 50 \\ x + w &= 25 \\ w &= 25 - x \end{aligned}$$

El área A la constituyen la longitud por la anchura, de modo que

$$A = xw = x(25 - x)$$

El área A como una función de x es

$$A(x) = x(25 - x)$$

Observe que utilizamos el símbolo A como la variable dependiente y también como el nombre de la función que relaciona la longitud x con el área A. Como habíamos dicho, este doble uso es común en las aplicaciones y no debe causarle dificultades.

EJEMPLO 2 *Economía: Ecuaciones de demanda*

En economía, el ingreso R está definido como la cantidad de dinero obtenida de la venta de un producto, y es igual al precio de venta unitario p del producto por el número x de artículos vendidos. Es decir,

$$R = xp$$

Por lo general, existe una relación entre p y x: si uno crece el otro disminuye. Supongamos que p y x están relacionados por la siguiente **ecuación de demanda:**

$$p = -\tfrac{1}{10}x + 20 \qquad 0 \leq x \leq 200$$

Exprese el ingreso R como función del número x de artículos vendidos.

Solución Como $R = xp$ y $p = -\tfrac{1}{10}x + 20$, esto implica que

$$R(x) = xp = x\left(-\tfrac{1}{10}x + 20\right) = -\tfrac{1}{10}x^2 + 20x$$

Ahora resuelva el problema 3.

EJEMPLO 3 *Determinación de la distancia desde el origen hasta un punto en la gráfica*

Sea $P = (x, y)$ un punto en la gráfica de $y = x^2 - 1$.

(a) Exprese la distancia d de P al origen O como función de x.

(b) ¿Cuál es el valor de d si $x = 0$? (c) ¿Cuál es el valor de d si $x = 1$?

(d) ¿Cuál es el valor de d si $x = \sqrt{2}/2$?

Solución (a) La figura 51 ilustra la gráfica. La distancia d de P a O es

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Como P es un punto en la gráfica de $y = x^2 - 1$, tenemos

$$d(x) = \sqrt{x^2 + (x^2 - 1)^2} = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$$

Así, hemos expresado la distancia d como una función de x.

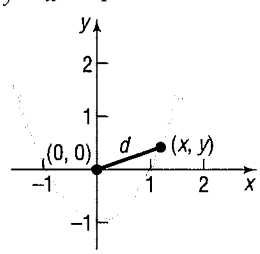
(b) Si $x = 0$, la distancia d es

$$d(0) = \sqrt{1} = 1$$

(c) Si $x = 1$, la distancia d es

$$d(1) = \sqrt{1 - 1 + 1} = 1$$

FIGURA 51
$y = x^2 - 1$



(d) Si $x = \sqrt{2}/2$, la distancia d es

$$d\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

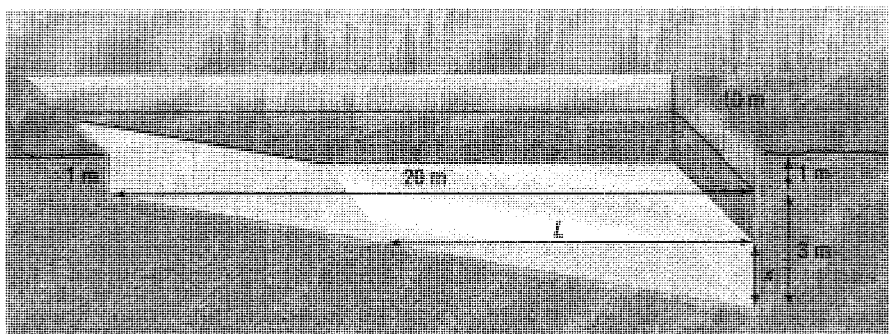
Ahora resuelva el problema 13.

EJEMPLO 4 Llenado de una alberca

Una alberca rectangular de 20 metros de largo por 10 de ancho, tiene 4 metros de profundidad en un extremo y 1 metro en el otro. La figura 52 ilustra una vista transversal de la alberca. El agua para llenar la alberca es bombeada por el extremo profundo.

(a) Determinar una función que exprese el volumen V de agua en la alberca como función de su profundidad x en el extremo profundo.
(b) Calcular el volumen del agua cuando su profundidad es de 1 metro.
(c) Determinar ese volumen cuando la profundidad es de 2 metros.

FIGURA 52



Solución

(a) Sea L la distancia (en metros) medida al nivel del agua desde el extremo profundo hasta el menos profundo. Observe que L y x forman los lados de un triángulo semejante al triángulo cuyos lados son 20 por 3 metros. De ese modo, L y x están relacionados mediante la ecuación

$$\frac{L}{x} = \frac{20}{3} \quad \text{o} \quad L = \frac{20x}{3} \qquad 0 \leq x \leq 3$$

El volumen V de agua en la alberca en cualquier instante es

$$V = \left(\text{Área de la selección transversal}\right)\ (\text{Ancho}) = \left(\tfrac{1}{2}Lx\right)(10) \text{ metros cúbicos}$$

Como $L = 20x/3$, tenemos

$$V(x) = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{20x}{3} \cdot x\right)(10) = \frac{100}{3}x^2 \text{ metros cúbicos}$$

(b) Cuando la profundidad x del agua es de 1 metro, el volumen $V = V(x)$ es

$$V(1) = \frac{100}{3} \cdot 1^2 = 33.3 \text{ metros cúbicos}$$

(c) Cuando la profundidad x del agua es de 2 metros, el volumen $V = V(x)$ es

$$V(2) = \frac{100}{3} \cdot 2^2 = \frac{400}{3} = 133.3 \text{ metros cúbicos}$$

Área de un triángulo isósceles

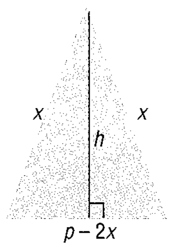
Considere un triángulo isósceles de perímetro fijo p.

(a) Si x es igual a la longitud de uno de los dos lados iguales, exprese el área A como una función de x.

(b) ¿Cuál es el dominio de A?

Solución (a) Observe la figura 53. Como los lados iguales miden x, el tercer lado debe medir $p - 2x$. (¿Advierte por qué?) Sabemos que el área A es

FIGURA 53



$$A = \tfrac{1}{2}(\text{base})(\text{altura})$$

Para determinar la altura h trazamos la recta perpendicular a la base cuya longitud es $p - 2x$, y utilizamos el hecho de que la perpendicular biseca a la base. Por el Teorema de Pitágoras, tenemos

$$\begin{aligned} h^2 &= x^2 - \left(\frac{p-2x}{2}\right)^2 = x^2 - \frac{1}{4}(p^2 - 4px + 4x^2) \\ &= px - \frac{1}{4}p^2 = \frac{4px - p^2}{4} \\ h &= \sqrt{\frac{4px - p^2}{4}} = \frac{\sqrt{p}}{2}\sqrt{4x - p} \end{aligned}$$

El área A está dada por

$$A = \frac{1}{2} \cdot (p - 2x)\frac{\sqrt{p}}{2}\sqrt{4x - p} = \frac{\sqrt{p}}{4}(p - 2x)\sqrt{4x - p}$$

(b) El dominio de A se determina como sigue. Debido a la expresión $\sqrt{4x - p}$, necesitamos que

$$\begin{aligned} 4x - p &> 0 \\ x &> \frac{p}{4} \end{aligned}$$

Como $p - 2x$ es un lado del triángulo, también necesitamos

$$\begin{aligned} p - 2x &> 0 \\ -2x &> -p \\ x &< \frac{p}{2} \end{aligned}$$

Así, el dominio de A es $p/4 < x < p/2$, o $(p/4, p/2)$, y la función es

$$A(x) = \frac{\sqrt{p}}{4}(p - 2x)\sqrt{4x - p} \qquad \frac{p}{4} < x < \frac{p}{2}$$

Ahora resuelva el problema 9.

EJEMPLO 5 *Pagos mínimos e intereses para tarjetas de crédito*

(a) Los propietarios de tarjetas de crédito emitidas por bancos, tiendas de departamentos, compañías petroleras, etc., reciben un estado de cuenta mensual donde se les indica la cantidad mínima que deben pagar antes de cierta fecha. La cantidad mínima a pagar depende de la cantidad total en deuda. Una compañía emisora de tarjetas de crédito utiliza las siguientes reglas: para una cantidad menor de \$10.00, hay que pagar el total. Para una deuda mínima de \$10.00 pero menor que \$500.00, el pago mínimo son \$10.00. Hay un pago mínimo de \$30.00 para una deuda mínima de \$500.00 pero menor de \$1000.00, un pago mínimo de \$50.00 en una deuda de al menos \$1000.00 pero menor de \$1500.00 y un pago mínimo de \$70.00 en deudas mayores o iguales a \$1500.00. Determine la función f que describe el pago mínimo para una deuda de x dólares. Haga la gráfica de f.

(b) El propietario de la tarjeta paga cualquier cantidad entre el mínimo y la cantidad total que debe, y la empresa emisora le carga un interés del 1.5% al mes por los primeros \$1000.00 de deuda y un 1% al mes sobre cualquier saldo no pagado mayor de \$1000.00. Determine la función g que proporcione la cantidad de interés mensual cargada a un saldo de x dólares. Haga la gráfica de g.

Solución (a) La función f que describe el pago mínimo de una deuda de x dólares es

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x < 10 \\ 10 & \text{si } 10 \le x < 500 \\ 30 & \text{si } 500 \le x < 1000 \\ 50 & \text{si } 1000 \le x < 1500 \\ 70 & \text{si } 1500 \le x \end{cases}$$

Para hacer la gráfica de esta función procedemos como sigue: para $0 \le x < 10$ trazamos $y = x$; para $10 \le x < 500$, trazamos la función constante $y = 10$; para $500 \le x < 1000$, trazamos la función constante $y = 30$ y así sucesivamente. La figura 54 muestra la gráfica de f.

FIGURA 54

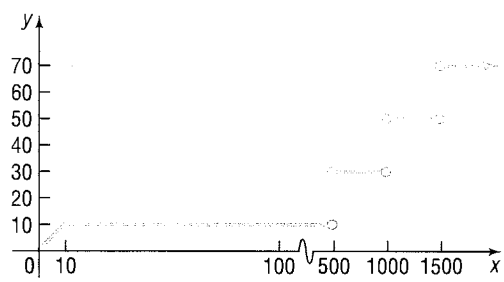
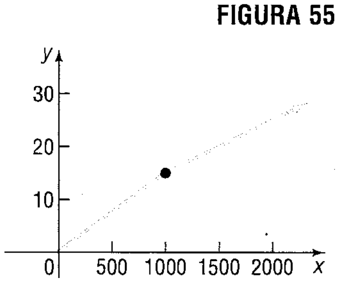


FIGURA 55



(b) Si $g(x)$ es la cantidad de interés mensual cargado a un saldo de x, entonces $g(x) = 0.015x$ para $0 \le x \le 1000$. El saldo no pagado sobre \$1000 es $x - 1000$. Si la deuda es $x > 1000$, el interés será $0.015(1000) + 0.01(x - 1000) = 15 + 0.01x - 10 = 5 + 0.01x$, de modo que

$$g(x) = \begin{cases} 0.015x & \text{si } 0 \le x \le 1000 \\ 5 + 0.01x & \text{si } x > 1000 \end{cases}$$

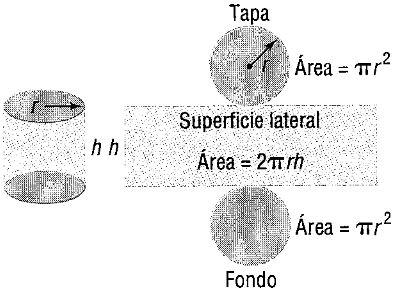
Véase la figura 55.

EJEMPLO 7 *Determinación del costo de una lata*

Una compañía fabricante de latas de aluminio requiere producir una lata cilíndrica con capacidad de 500 centímetros cúbicos $\left(\frac{1}{2}\text{ litro}\right)$. La tapa y el fondo de la lata serán fabricados con una aleación especial de aluminio que cuesta \$0.05 por centímetro cuadrado. Los lados de la lata serán de un material que cuesta \$0.02 por centímetro cuadrado. Exprese el costo del material necesario para hacer la lata como una función de su radio r.

Solución La figura 56 ilustra la situación. Observe que el material necesario para producir una lata cilíndrica, de altura h y radio r, consta de un rectángulo de área $2\pi rh$ y dos círculos, cada uno de área πr^2. El costo total C (en centavos) por la fabricación de la lata es

FIGURA 56



$$
\begin{aligned}
C &= \text{Costo de la tapa y el fondo} + \text{Costo de la superficie lateral}\\
&= \underbrace{2(\pi r^2)}_{\substack{\text{Área total}\\ \text{de la tapa}\\ \text{y del fondo}}} \quad \underbrace{(5)}_{\substack{\text{Área costo}\\ \text{unitario}}} \quad + \underbrace{(2\pi rh)}_{\substack{\text{Área}\\ \text{total del}\\ \text{lado}}} \quad \underbrace{(2)}_{\substack{\text{Área costo}\\ \text{unitario}}}\\
&= 10\pi r^2 + 4\pi rh
\end{aligned}
$$

Pero tenemos una restricción adicional: la altura h y el radio r deben ser elegidos de modo que el volumen V de la lata sea de 500 centímetros cúbicos. Como $V = \pi r^2 h$, tenemos que

$$500 = \pi r^2 h \quad \text{o} \quad h = \frac{500}{\pi r^2}$$

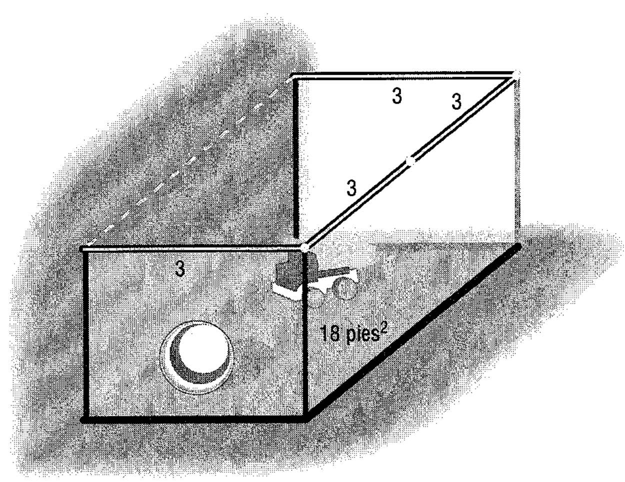
Así, el costo C, en centavos, como función del radio r es

$$C(r) = 10\pi r^2 + 4\pi r\left(\frac{500}{\pi r^2}\right) = 10\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

EJEMPLO 8 *Fabricación de un corral para bebé*

Un fabricante de corrales para bebé crea un modelo cuadrado que se puede abrir en una esquina y quedar unido a la pared de una casa, formando ángulos rectos. Si cada lado mide 3 pies, la configuración abierta duplica el área disponible para que el bebé pueda jugar, de 9 a 18 pies cuadrados. *Véase* la figura 57.

FIGURA 57



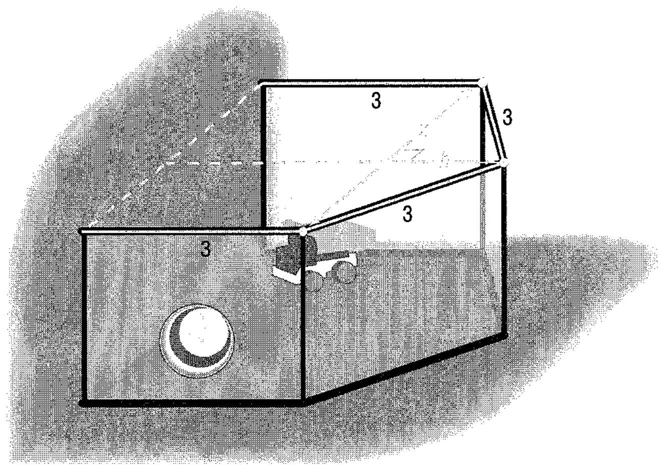
Ahora, suponga que se colocan bisagras en las esquinas exteriores para permitir una configuración como la de la figura 58.

(a) Expresar el área A de esta configuración como una función de la distancia x entre los dos lados paralelos.

(b) Determinar el dominio de A. (c) Determinar A si $x = 5$.

(d) Hacer la gráfica de $A = A(x)$. ¿Para cuál valor de x es máxima el área?*

FIGURA 58



Solución (a) Consulte la figura 58. El área que buscamos está constituida por el área de un rectángulo (con anchura 3 y longitud x) y el área de un triángulo isósceles (con base x y dos lados iguales de longitud 3). Determinamos la altura h del triángulo mediante el Teorema de Pitágoras:

$$h^2 = 3^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 9 - \frac{x^2}{4} = \frac{36 - x^2}{4}$$

$$h = \tfrac{1}{2}\sqrt{36 - x^2}$$

El área encerrada por el corral es

$$A = \text{área del rectángulo} + \text{área del triángulo} = 3x + \tfrac{1}{2}x\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{36 - x^2}\right)$$

$$A(x) = 3x + \frac{x\sqrt{36 - x^2}}{4}$$

Así, hemos expresado el área A como una función de x.

(b) Para determinar el dominio de A, primero observamos que $x > 0$, puesto que se trata de una longitud. Además, la expresión bajo el signo de radical debe ser positiva, de modo que

$$36 - x^2 > 0$$

$$x^2 < 36$$

$$-6 < x < 6$$

*Adaptado del *Proceedings, Summer Conference for College Teachers on Applied Mathematics* (University of Missouri, Rolla), 1971.

Al combinar estas restricciones, tenemos que el dominio de A es $0 < x < 6$, o $(0, 6)$.

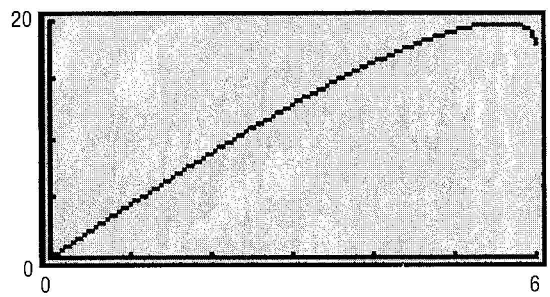
(c) Si $x = 5$, el área es

$$A(5) = 3(5) + \frac{5}{4}\sqrt{36 - (5)^2} \approx 19.15 \text{ pies cuadrados}$$

Por lo tanto, si la anchura del corral es de 5 pies, su área es de 19.15 pies cuadrados.

(d) El área máxima está cerca de los 19.81 pies cuadrados, lo cual se obtiene cuando x se aproxima a 5.58 pies. *Véase* la figura 59.

FIGURA 59



Ejercicio 2.6

1. *Volumen de un cilindro* El volumen V de un cilindro circular recto de altura h y radio r es $V = \pi r^2 h$. Si la altura mide el doble del radio, exprese el volumen V como una función de r.

2. *Volumen de un Cono* El volumen V de un cono circular recto es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Si la altura mide el doble del radio, exprese el volumen V como una función de r.

3. *Ecuación de demanda* El precio p y la cantidad vendida x de cierto producto cumplen la ecuación de demanda

$$p = -\tfrac{1}{6}x + 100 \qquad 0 \le x \le 600$$

Exprese el ingreso R como una función de x. (Recuerde, $R = xp$.)

4. *Ecuación de demanda* El precio p y la cantidad vendida x de cierto producto cumplen la ecuación de demanda

$$p = -\tfrac{1}{3}x + 100 \qquad 0 \le x \le 300$$

Exprese el ingreso R como una función de x.

5. *Ecuación de demanda* El precio p y la cantidad vendida x de cierto producto cumplen la ecuación de demanda

$$x = -5p + 100 \qquad 0 \le p \le 20$$

Exprese el ingreso R como una función de x.

6. *Ecuación de demanda* El precio p y la cantidad vendida x de cierto producto cumplen la ecuación de demanda

$$x = -20p + 500 \qquad 0 \le p \le 25$$

Exprese el ingreso R como una función de x.

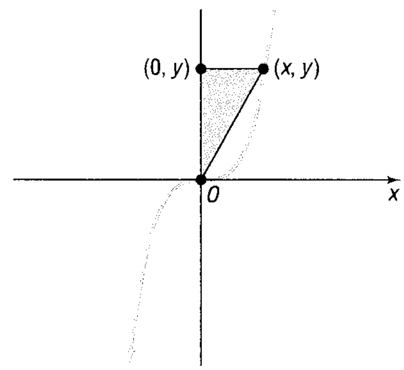
7. *Cercar un campo rectangular.* Un agricultor dispone de 400 yardas de cerca y desea rodear un área rectangular con ella.
(a) Exprese el área A del rectángulo como una función de su anchura x.
(b) ¿Cuál es el dominio de A?
(c) Haga la gráfica de $A = A(x)$. ¿Para cuáles valores de x es mayor el área?

8. *Cercar un campo rectangular adyacente a un río.* Un agricultor dispone de 3000 pies de cerca para rodear un campo rectangular. Un lado del campo está a lo largo de un río, de modo que sólo hay que cercar tres lados.
(a) Exprese el área A del rectángulo como una función de x, donde x es la longitud del lado paralelo al río.
(b) Haga la gráfica de $A = A(x)$. ¿Para cuáles valores de x es mayor el área?

9. Un cable de longitud x se dobla para formar un círculo.
(a) Exprese la circunferencia del círculo como una función de x.
(b) Exprese el área del círculo como una función de x.

10. Un cable de longitud x se dobla para formar un cuadrado.
(a) Exprese el perímetro del cuadrado como una función de x.
(b) Exprese el área del cuadrado como una función de x.

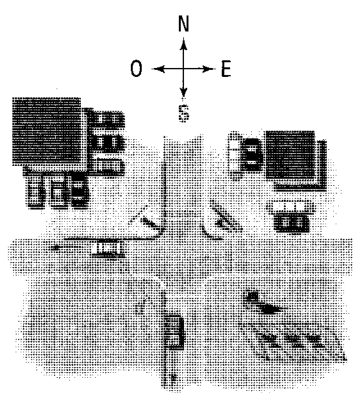
11. Un triángulo rectángulo tiene un vértice sobre la gráfica de $y = x^3$, $x > 0$, en el punto (x,y); otro vértice está en el origen y el tercero en la parte positiva del eje y, en $(0,y)$, como muestra la figura de la derecha. Expprese el área del triángulo como una función de x.



12. Un triángulo rectángulo tiene un vértice sobre la gráfica de $y = 9 - x^2$, $x > 0$, en el punto (x,y); otro vértice está en el origen y el tercero en la parte positiva del eje x, en $(x, 0)$. Exprese el área del triángulo como una función de x.

13. Sea $P = (x, y)$ un punto sobre la gráfica de $y = x^2 - 8$.
(a) Exprese la distancia d que hay desde P al origen como una función de x.
(b) ¿Cuánto vale d si $x = 0$? (c) ¿Cuánto vale d si $x = 1$?

14. Sea $P = (x, y)$ un punto sobre la gráfica de $y = x^2 - 8$.
(a) Exprese la distancia d que hay desde P al punto $(0, -1)$ como una función de x.
(b) ¿Cuánto vale d si $x = 0$? (c) ¿Cuánto vale d si $x = -1$?



15. Sea $P = (x, y)$ un punto sobre la gráfica de $y = \sqrt{x}$. Exprese la distancia d que hay desde P al punto $(1, 0)$ como una función de x.

16. Sea $P = (x, y)$ un punto sobre la gráfica de $y = 1/x$. Exprese la distancia d que hay desde P al origen como una función de x.

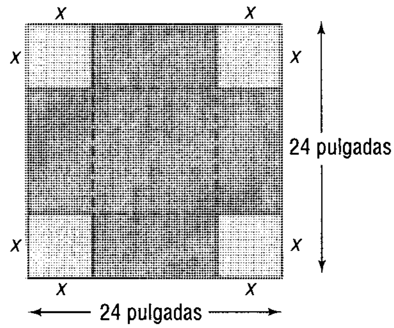
17. Dos autos parten de un crucero al mismo tiempo. Uno se dirige hacia el sur, con una velocidad constante de 30 millas por hora; el otro se dirige hacia al oeste con una velocidad constante de 40 millas por hora (*véase* la figura). Exprese la distancia d entre los autos como una función del tiempo t. [*Nota*: Los autos inician su marcha en $t = 0$.]

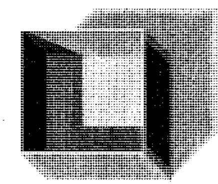
18. Dos autos se aproximan a un crucero. Uno está a 2 millas al sur del crucero y se mueve a una velocidad constante de 30 millas por hora. En el mismo instante, el otro auto está a 3 millas al este del crucero y se mueve a una velocidad constante de 40 millas por hora.
(a) Exprese la distancia d entre los autos como una función del tiempo t. [*Nota*: En $t = 0$, los autos están 2 millas al sur y 3 millas al este del crucero, respectivamente.]
(b) Haga la gráfica de $d = d(t)$. ¿Para cuál valor de t es mínima d?

19. *Construcción de una caja abierta.* Hay que fabricar una caja abierta de base cuadrada utilizando una pieza cuadrada de cartulina de 24 pulgadas por lado, cortando un cuadrado de cada una de las esquinas y doblando los lados (*véase* la figura).

(a) Exprese el volumen V de la caja como una función de la longitud x del lado del cuadrado recortado en cada esquina.

(b) Haga la gráfica de $V = V(x)$. ¿Para cuál valor de x es máximo V?





20. *Construcción de una caja abierta.* Una caja abierta, con base cuadrada, debe tener un volumen de 10 pies cúbicos.

(a) Exprese la cantidad A de material necesario para hacer dicha caja como una función de la longitud x de un lado de la base cuadrada.

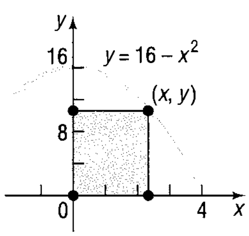
(b) Haga la gráfica de $A = A(x)$. ¿Para cuál valor de x es mínimo A?

21. *Construcción de una caja cerrada.* Una caja cerrada, con base cuadrada, debe tener un volumen de 10 pies cúbicos.

(a) Exprese la cantidad A de material necesario para hacer dicha caja como una función de la longitud x de un lado de la base cuadrada.

(b) Haga la gráfica de $A = A(x)$. ¿Para cuál valor de x es mínimo A?

22. *Esferas.* El volumen V de una esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$; el área S de la superficie de la esfera es $S = 4\pi r^2$. Exprese el volumen V como una función del área S de la superficie. Si se duplica el área, ¿en qué forma cambia el volumen?

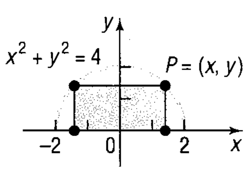


23. Un rectángulo tiene una esquina en la gráfica de $y = 16 - x^2$, otra en el origen, otra en la parte positiva del eje y y la cuarta en la parte positiva del eje x (*véase* la figura).

(a) Exprese el área A del rectángulo como una función de x.

(b) ¿Cuál es el dominio de A?

(c) Haga la gráfica de $A = A(x)$. ¿Para cuál valor de x es máximo A?



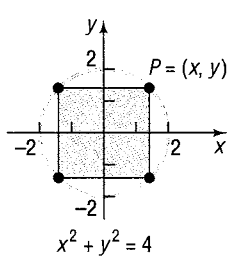
24. Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de radio 2 (*véase* la figura). Sea $P = (x, y)$ el punto del primer cuadrante que es vértice del rectángulo y está sobre el círculo.

(a) Exprese el área A del rectángulo como una función de x.

(b) Exprese el perímetro p del rectángulo como una función de x.

(c) Haga la gráfica de $A = A(x)$. ¿Para cuál valor de x es máximo A?

(d) Haga la gráfica de $p = p(x)$. ¿Para cuál valor de x es máximo p?



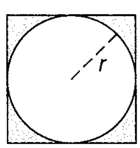
25. Un rectángulo está inscrito en un círculo de radio 2 (*véase* la figura). Sea $P = (x, y)$ el punto del primer cuadrante que es vértice del rectángulo y está sobre el círculo.

(a) Exprese el área A del rectángulo como una función de x.

(b) Exprese el perímetro p del rectángulo como una función de x.

(c) Haga la gráfica de $A = A(x)$. ¿Para cuál valor de x es máximo A?

(d) Haga la gráfica de $p = p(x)$. ¿Para cuál valor de x es máximo p?



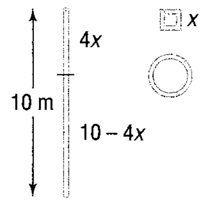
26. Un círculo de radio r está inscrito en un cuadrado (*véase* la figura).

(a) Exprese el área A del cuadrado como una función del radio r del círculo.

(b) Exprese el perímetro p del cuadrado como una función de x.

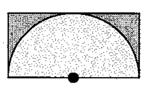
27. *Costo de una lata.* Una lata en forma de cilindro circular recto debe tener un volumen de 500 centímetros cúbicos. La tapa y el fondo utilizan un material que cuesta 6 centavos por centímetro cuadrado, mientras que la superficie lateral utiliza un material que cuesta 4 centavos el centímetro cuadrado.
(a) Exprese el costo total C del material como una función del radio r del cilindro. (Consulte la figura 56.)
(b) Haga la gráfica de $C = C(r)$. ¿Para cuál valor de r es mínimo el costo C?

28. *Material necesario para hacer un tambor.* Un tambor cilíndrico de acero debe tener un volumen de 100 pies cúbicos.
(a) Exprese la cantidad A de material necesario para fabricar el tambor como una función de su radio r.
(b) ¿Cuánto material se necesita si el tambor debe medir 3 pies de radio?
(c) ¿Si debe tener 4 pies de radio?
(d) ¿Y de 5 pies de radio?
(e) Haga la gráfica de $A = A(r)$. ¿Para cuál valor de r es mínimo A?

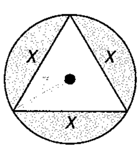


29. Un cable de 10 metros de longitud se cortará en dos partes. Una parte servirá para formar un cuadrado y la otra para formar una círculo (*véase* la figura).
(a) Exprese el área total A encerrada por el cable como una función de la longitud x de un lado del cuadrado.
(b) ¿Cuál es el dominio de A?
(c) Haga la gráfica de $A = A(x)$. ¿Para cuál valor de x es mínimo A?

30. Un cable de 10 metros de longitud se cortará en dos partes. Una parte servirá para formar un triángulo equilátero y la otra para formar un círculo.
(a) Exprese el área total A encerrada por el cable como una función de la longitud x de un lado del triángulo equilátero.
(b) ¿Cuál es el dominio de A?
(c) Haga la gráfica de $A = A(x)$. ¿Para cuál valor de x es mínimo A?



31. Un semicírculo de radio r está inscrito en un rectángulo de modo que el diámetro del semicírculo es el largo del rectángulo (*véase* la figura).
(a) Exprese el área A del rectángulo como una función del radio r del semicírculo.
(b) Exprese el perímetro p del rectángulo como una función de r.



32. Un triángulo equilátero está inscrito en un círculo de radio r. *Véase* la figura. Exprese la circunferencia C del círculo como una función de la longitud x de un lado del triángulo. [*Sugerencia*: Muestre primero que $r^2 = x^2/3$.]

33. Un triángulo equilátero está inscrito en un círculo de radio r. *Véase* la figura. Exprese el área A dentro del círculo pero fuera del triángulo, como una función de la longitud x de un lado del triángulo.

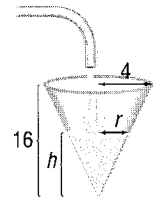
34. *Costo de transporte.* Una compañía de camiones transporta diversos artículos entre Chicago y Nueva York, que distan 960 millas. La compañía cobra, por cada libra, \$0.50 por milla para las primeras 100 millas, \$0.40 por milla para las siguientes 300 millas, \$0.25 por milla para las siguientes 400 millas, y no cobra por las restantes 160 millas.
(a) Haga la gráfica de la relación entre el costo del transporte y el millaje en toda la ruta de 960 millas.
(b) Determine el costo como una función del millaje para el transporte proporcionado entre 100 y 400 millas desde Chicago.
(c) Determine el costo como una función del millaje para el transporte proporcionado entre 400 y 800 millas desde Chicago.

35. *Costo de renta de autos.* Un auto económico rentado en forma semanal cuesta \$95.00 la semana*. Los días adicionales cuestan \$24.00 cada uno hasta que la tasa diaria excede la tasa semanal, en cuyo caso se aplica esta última. Determine el costo C de renta de un auto económico como una función definida por partes, dependiendo del número x de días utilizados, donde $7 \le x \le 14$. Haga la gráfica de esta función. [*Nota*: Toda fracción de un día cuenta como un día completo.]

36. Resuelva el problema anterior pero ahora para un auto de lujo que cuesta \$219.00 por semana, y los días adicionales cuestan \$45.00 cada uno.

**Fuente:* National Car Rental®, 1995.

37. Se vacía agua en un recipiente que tiene forma de cono circular recto con radio de 4 pies y altura de 16 pies (*véase* la figura). Exprese el volumen V del agua en el cono como una función de la altura h del agua. [*Nota*: El volumen V de un cono de radio r y altura h es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.]



38. *Impuesto federal sobre ingresos.* La siguiente tabla tiene dos tipos de tasa de impuesto para 1994. Si x es igual a la cantidad en la forma 1040, línea 37 y y es igual a la deuda por impuesto, construya una función f para cada tarifa.

TIPOS DE TASAS DE IMPUESTO PARA 1994

TIPO X: UTILICE ESTE TIPO SI ES SOLTERO

Si la cantidad en la forma 1040, línea 37, es: Mayor que —	Pero menor que —	Escriba en la forma 1040, línea 38	de la cantidad sobre —
$0	$22,750	---- 15%	$0
22,750	55,100	$3,412.50 + 28%	22,750
55,100	115,000	12,470.50 + 31%	55,100
115,000	250,000	31,039.50 + 36%	115,000
250,000	-----	79,639.50 + 39.6%	250,000

TIPO Y-1: UTILICE ESTE TIPO SI ES CASADO O VIUDO CALIFICADO

Si la cantidad en la forma 1040, línea 37, es: Mayor que —	Pero menor que —	Escriba en la forma 1040, línea 38	de la cantidad sobre —
$0	$38,000	---- 15%	$0
38,000	91,850	$5,700.00 + 28%	38,000
91,850	140,000	20,778.00 + 31%	91,850
140,000	250,000	35,704.50 + 36%	140,000
250,000	-----	75,304.50 + 39.6%	250,000

Repaso del capítulo

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Función

Regla o correspondencia entre dos conjuntos de números reales de modo que a cada número x del primer conjunto, el dominio, le corresponde exactamente un número y en el segundo conjunto. El rango es el conjunto de valores y de la función para los valores x del dominio. x es la variable independiente y y la variable dependiente.

Una función f se puede definir de manera implícita mediante una ecuación que relacione x con y, o de manera explícita escribiendo $y = f(x)$.

Una función también se caracteriza como un conjunto de pares ordenados (x,y) o $(x,f(x))$, de modo que dos pares distintos no tengan el mismo primer elemento.

Notación de función

$y = f(x)$

f es un símbolo para la regla que define a la función.

x es el argumento, o variable independiente.

y es la variable dependiente.

$f(x)$ es el valor de la función en x, o la imagen de x

Domino

De no ser especificado, el dominio de una función f es el máximo conjunto de números reales para los que la regla define un número real.

Criterio de la recta vertical

Un conjunto de puntos en el plano es la gráfica de una función si, y sólo si, toda recta vertical corta a la gráfica en un punto, cuando mucho.

Función par f

$f(-x) = f(x)$ para toda x del dominio ($-x$ también debe estar en el dominio).

Función impar f

$f(-x) = -f(x)$ para toda x del dominio ($-x$ también debe estar en el dominio).

Función uno a uno f

Si $x_1 \neq x_2$, entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$ para cualquier elección de x_1 y x_2 en el dominio.

Criterio de la recta horizontal

Si todas las rectas horizontales cortan la gráfica de una función f a lo más en un punto, entonces f es uno a uno.

Función inversa f^{-1} de f

Dominio de f = Rango de f^{-1}; rango de f = dominio de f^{-1}
$f^{-1}(f(x)) = x$ y $f(f^{-1}(x)) = x$.
Las gráficas de f y f^{-1} son simétricas con respecto a la recta $y = x$.

FUNCIONES IMPORTANTES

Función lineal

$f(x) = mx + b$ La gráfica es una línea recta con pendiente m y ordenada al origen b.

Función constante

$f(x) = b$ La gráfica es una recta horizontal con ordenada al origen b (*véase* la figura 11).

Función identidad

$f(x) = x$ La gráfica es una línea recta con pendiente 1 y ordenada al origen 0 (*véase* la figura 12).

Función cuadrada

$f(x) = x^2$ La gráfica es una parábola cuya intersección con los ejes es (0,0) (*véase* la figura 13).

Función cúbica

$f(x) = x^3$ *Véase* la figura 14.

Función raíz cuadrada

$f(x) = \sqrt{x}$ *Véase* la figura 15.

Función recíproca

$f(x) = 1/x$ *Véase* la figura 16.

Función valor absoluto

$f(x) = |x|$ *Véase* la figura 17.

CÓMO HACER PARA

Determinar el dominio y el rango de una función a partir de su gráfica.

Hallar el dominio de una función dada su ecuación.

Determinar si una función es par o impar sin hacer la gráfica.

Hacer la gráfica de ciertas funciones mediante corrimientos, compresiones, alargamientos y/o reflexiones (*véase* la tabla 9).

Encontrar la composición de dos funciones.

Determinar la inversa de ciertas funciones uno a uno (*véase* el procedimiento de la página 60).

Hacer la gráfica de f^{-1} dada la gráfica de f.

Construir funciones en aplicaciones, incluyendo funciones definidas por partes.

LLENE LOS ESPACIOS EN BLANCO

1. Si f es una función definida mediante la ecuación $y = f(x)$, entonces x es la variable ________ y y la variable ________.
2. Un conjunto de puntos en el plano xy es la gráfica de una función si, y sólo si, ninguna recta ________ contiene más de un punto del conjunto.
3. Una función ________ f es aquella donde $f(-x) = f(x)$ para toda x en el dominio de f; una función ________ f es aquella donde $f(-x) = -f(x)$ para toda x en el dominio de f.
4. La gráfica de una función f es conocida. Entonces, la gráfica de $y = f(x - 2)$ se puede obtener mediante un corrimiento ________ de la gráfica de f hacia la ________ una distancia de 2 unidades.
5. Si $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x^3$, entonces ________ $= (x + 1)^3$.
6. Si toda recta horizontal corta a la gráfica de una función f en no más de un punto, entonces f es una función ________.
7. Si f^{-1} denota la inversa de una función f, entonces las gráficas de f y f^{-1} son simétricas con respecto a la recta ________.

CIERTO O FALSO

C F 1. Las rectas verticales cortan a la gráfica de una función en no más de un punto.

C F 2. La intersección del eje y con la gráfica de la función $y = f(x)$ cuyo dominio consta de todos los números reales es $f(0)$.

C F 3. Las funciones pares tienen gráficas que son simétricas con respecto al origen.

C F 4. La gráfica de $y = f(-x)$ es la reflexión con respecto al eje y de la gráfica de $y = f(x)$.

C F 5. $f(g(x)) = f(x) \cdot g(x)$

C F 6. Si f y g son funciones inversas, entonces el dominio de f es igual al dominio de g.

C F 7. Si f y g son funciones inversas, entonces sus gráficas son simétricas con respecto a la recta $y = x$.

EJERCICIOS DE REPASO

1. Dado que f es una función lineal, $f(4) = -5$, y $f(0) = 3$, escriba la ecuación que la define.
2. Dado que g es una función lineal con pendiente $= -4$ y $g(-2) = 2$, escriba la ecuación que la define.
3. La función f se define como

$$f(x) = \frac{Ax + 5}{6x - 2}$$

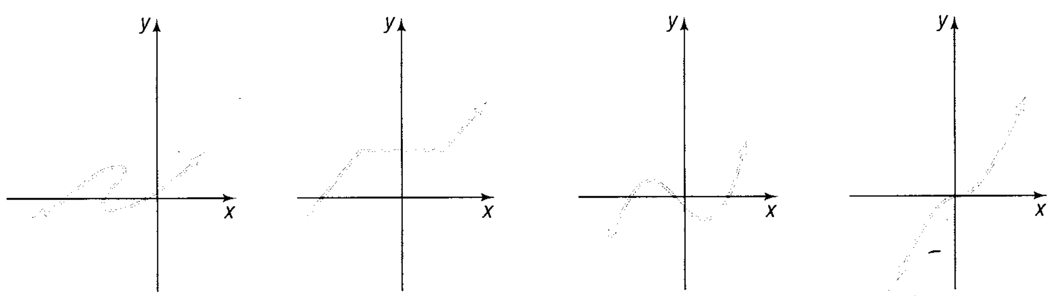
Si $f(1) = 4$, determine A.

4. La función g se define como

$$g(x) = \frac{A}{x} + \frac{8}{x^2}$$

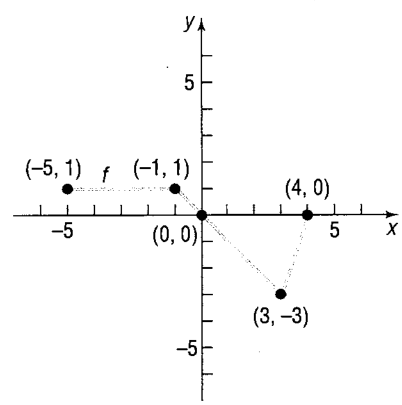
Si $g(-1) = 0$, determine A.

5. (a) Indique si las siguientes son gráficas de funciones.
   (b) ¿Cuáles son gráficas de funciones uno a uno?



A B C D

6. Utilice la gráfica anexa de la función f para determinar:
   (a) El dominio y el rango de f.
   (b) Los intervalos donde f es creciente.
   (c) Los intervalos donde f es constante.
   (d) Las intersecciones de la gráfica con los ejes.



En los problemas del 7 al 12, determine lo siguiente para cada función:
(a) $f(-x)$ *(b)* $-f(x)$ *(c)* $f(x+2)$ *(d)* $f(x-2)$

7. $f(x) = \dfrac{3x}{x^2-4}$ **8.** $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$ **9.** $f(x) = \sqrt{x^2-4}$ **10.** $f(x) = |x^2-4|$

11. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2}$ **12.** $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$

En los problemas del 13 al 18, determine si la función dada es par, impar o de ninguno de estos tipos, sin trazar la gráfica.

13. $f(x) = x^3 - 4x$ **14.** $g(x) = \dfrac{4+x^2}{1+x^4}$ **15.** $h(x) = \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{1}{x^2} + 1$ **16.** $F(x) = \sqrt{1-x^3}$

17. $G(x) = 1 - x + x^3$ **18.** $H(x) = 1 + x + x^2$

En los problemas del 19 al 30, determine el dominio de cada función.

19. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-9}$ **20.** $f(x) = \dfrac{3x^2}{x-2}$ **21.** $f(x) = \sqrt{2-x}$ **22.** $f(x) = \sqrt{x+2}$

23. $h(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{|x|}$ **24.** $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$ **25.** $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2x-3}$ **26.** $F(x) = \dfrac{1}{x^2-3x-4}$

27. $G(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ 1/x & \text{si } x > 1 \end{cases}$ **28.** $H(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } 0 < x < 4 \\ x-4 & \text{si } 4 \le x \le 8 \end{cases}$

29. $f(x) = \begin{cases} 1/(x-2) & \text{si } x > 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \\ 3x & \text{si } 0 \le x < 2 \end{cases}$ **30.** $g(x) = \begin{cases} |1-x| & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ x+1 & \text{si } 1 < x \le 3 \end{cases}$

En los problemas del 31 al 50:
(a) Determine el dominio de cada función. *(b) Localice las intersecciones con los ejes.*
(c) Haga la gráfica de cada función. *(d) Utilizando la gráfica determine el rango.*

31. $F(x) = |x| - 4$ **32.** $f(x) = |x| + 4$ **33.** $g(x) = -|x|$ **34.** $g(x) = \frac{1}{2}|x|$

35. $h(x) = \sqrt{x-1}$ **36.** $h(x) = \sqrt{x} - 1$ **37.** $f(x) = \sqrt{1-x}$ **38.** $f(x) = -\sqrt{x}$

39. $F(x) = \begin{cases} x^2+4 & \text{si } x < 0 \\ 4-x^2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$ **40.** $H(x) = \begin{cases} |1-x| & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ |x-1| & \text{si } x > 2 \end{cases}$ **41.** $h(x) = (x-1)^2 + 2$

42. $h(x) = (x+2)^2 - 3$ **43.** $g(x) = (x-1)^3 + 1$ **44.** $g(x) = (x+2)^3 - 8$

45. $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} & \text{si } x \ge 4 \\ x & \text{si } 0 < x < 4 \end{cases}$ **46.** $f(x) = \begin{cases} 3|x| & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{1-x} & \text{si } 0 \le x \le 1 \end{cases}$ **47.** $g(x) = \dfrac{1}{x-1} + 1$

48. $g(x) = \dfrac{1}{x+2} - 2$ **49.** $h(x) = [\![-x]\!]$ **50.** $h(x) = -[\![x]\!]$

En los problemas del 51 al 56, la función f es uno a uno. Determine la inversa de cada función y verifique su respuesta. Encuentre el dominio y el rango de f *y* f^{-1}.

51. $f(x) = \dfrac{2x+3}{5x-2}$ **52.** $f(x) = \dfrac{2-x}{3+x}$ **53.** $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

54. $f(x) = \sqrt{x-2}$ **55.** $f(x) = \dfrac{3}{x^{1/3}}$ **56.** $f(x) = x^{1/3} + 1$

En los problemas del 57 al 62, para las funciones f y g dadas, determine:

(*a*) $(f \circ g)(2)$ (*b*) $(g \circ f)(-2)$ (*c*) $(f \circ f)(4)$ (*d*) $(g \circ g)(-1)$

57. $f(x) = 3x - 5;\quad g(x) = 1 - 2x^2$

58. $f(x) = 4 - x;\quad g(x) = 1 + x^2$

59. $f(x) = \sqrt{x + 2};\quad g(x) = 2x^2 + 1$

60. $f(x) = 1 - 3x^2;\quad g(x) = \sqrt{4 - x}$

61. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4};\quad g(x) = 3x - 2$

62. $f(x) = \dfrac{2}{1 + 2x^2};\quad g(x) = 3x$

En los problemas del 63 al 68, determine $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, y $g \circ g$ para cada par de funciones.

63. $f(x) = \dfrac{2 - x}{x};\quad g(x) = 3x + 1$

64. $f(x) = \dfrac{2x}{x + 1};\quad g(x) = \dfrac{2x}{x - 1}$

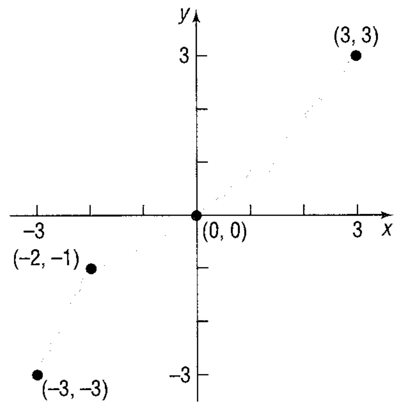
65. $f(x) = 3x^2 + x + 1;\quad g(x) = |3x|$

66. $f(x) = \sqrt{3x};\quad g(x) = 1 + x + x^2$

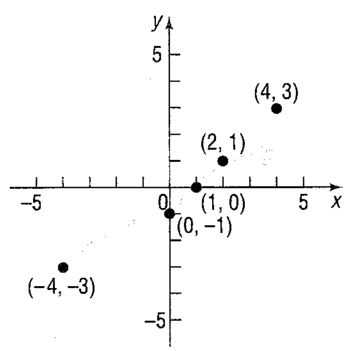
67. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1};\quad g(x) = \dfrac{1}{x}$

68. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3};\quad g(x) = \sqrt{3 - x^2}$

69. Para la gráfica de la función f anexa:
(a) Trace la gráfica de $y = f(-x)$
(b) Trace la gráfica de $y = -f(x)$.
(c) Trace la gráfica de $y = f(x + 2)$.
(d) Trace la gráfica de $y = f(x) + 2$.
(e) Trace la gráfica de $y = f(2 - x)$.
(f) Trace la gráfica de f^{-1}.

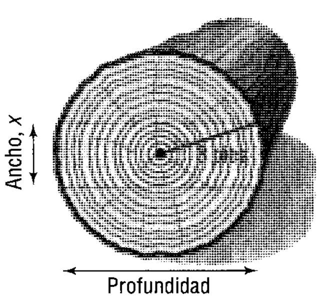


70. Repita el problema 69 para la gráfica de la función g anexa.



71. La temperatura T del aire es (en forma aproximada) una función lineal de la altitud h, para altitudes de hasta 10,000 metros sobre la superficie de la Tierra. Si la temperatura en la superficie es de 30°C y a 10,000 metros es de 5°C, determine la función $T = T(h)$.

72. *Velocidad como función del tiempo* La velocidad v (en pies por segundo) de un auto es una función lineal del tiempo t (en segundos) para $10 \le t \le 30$. Si después de cada segundo, la velocidad del auto ha aumentado en 5 pies por segundo, y si después de 20 segundos es de 80 pies por segundo, ¿cuál será la velocidad del auto a los 30 segundos? Determine la función $v = v(t)$.



73. La fortaleza de una tabla rectangular de madera es proporcional al producto de su ancho y el cubo de su profundidad (*véase* la figura). Si hay que cortar una tabla de un tronco que tiene forma cilíndrica y radio de 3 pies, exprese la fortaleza S de la tabla como una función del ancho x. ¿Cuál es el dominio de S?

TEMA 2

CAPÍTULO 3

FUNCIONES RACIONALES Y POLINOMIALES

Agradecemos al profesor Carlos Alberto Mejía Colindres por la elaboración de las secciones *Funciones con radicales* y *Funciones seccionadas*.

Panorama El puente Golden Gate

El puente Golden Gate, un puente colgante, enmarca la entrada a la bahía de San Francisco. Sus torres de 746 pies de altura están separadas por una distancia de 4200 pies. El puente está suspendido de dos enormes cables de 3 pies de diámetro; el ancho de la calzada es de 90 pies y ésta se encuentra a 220 pies aproximadamente sobre el nivel del agua. Los cables tienen forma parabólica y tocan a la calzada en el centro del puente.

Encuentre la altura del cable a una distancia de 1000 pies desde el centro del puente.

[Ejemplo 9 en la sección 3.1]

En el capítulo 2 hicimos las gráficas de funciones lineales $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$; la función cuadrática $f(x) = x^2$; y la función cúbica $f(x) = x^3$. Cada una de estas funciones pertenece a la clase de las *funciones polinomiales*, las que estudiaremos un poco más en este capítulo. También estudiaremos las *funciones racionales*, que son cocientes de funciones polinomiales. En este capítulo ponemos especial énfasis en las gráficas de funciones polinomiales y racionales. Dicho énfasis demostrará la importancia de la evaluación de polinomios (sección 3.5 y 3.6). La sección 3.7 trata acerca de los polinomios que tienen coeficientes que son números complejos.

3.1 Funciones cuadráticas

Una **función cuadrática** es una función de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{1}$$

donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$. El dominio de una función cuadrática lo constituyen todos los números reales.

Muchas aplicaciones requieren cierto conocimiento de las funciones cuadráticas. Por ejemplo, suponga que un comerciante determina que la ecuación que relaciona el número x de calculadoras vendidas al precio p por calculadora está dada por

$$x = 15{,}000 - 750p$$

Entonces el ingreso R obtenido de la venta de x calculadoras al precio p por calculadora es

$$\begin{aligned} R &= xp \\ &= (15{,}000 - 750p)p \\ &= -750p^2 + 15{,}000p \end{aligned}$$

La figura 1 ilustra la gráfica de esta función de ingreso, cuyo dominio es $0 \leq p \leq 20$, ya que x y p deben ser no negativos.

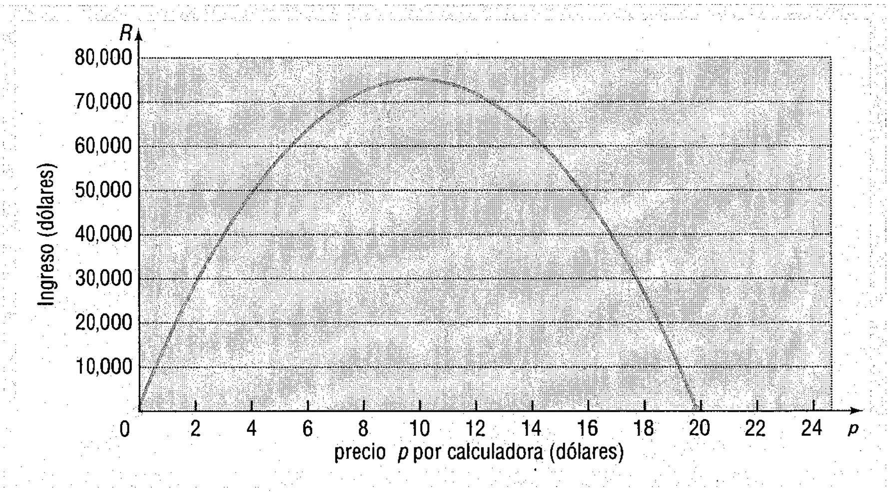
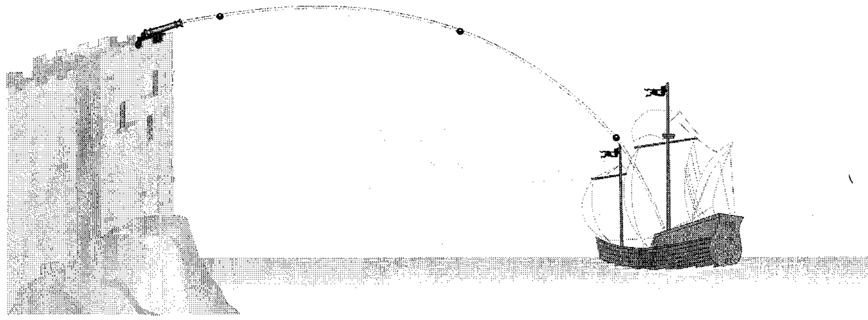


FIGURA 1
Gráfica de una función de ingreso:
$R = -750p^2 + 15{,}000p$

Otra situación en la que aparece una función cuadrática involucra el movimiento de un proyectil. Con base en la segunda ley de movimiento de Newton (fuerza es igual a masa por aceleración, $F = ma$), puede demostrarse que, pasando por alto la resistencia del aire, la trayectoria de un proyectil lanzado hacia arriba con cierta inclinación respecto de la horizontal, es la gráfica de una función cuadrática. Para una ilustración *véase* la figura 2.

FIGURA 2
Trayectoria de una bala de cañón



Graficación de funciones cuadráticas

Ya sabemos cómo hacer la gráfica de funciones cuadráticas. Por ejemplo, con base en el estudio de la sección 2.3, podemos hacer la gráfica de funciones cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$. La figura 3 ilustra las gráficas de $f(x) = ax^2$ para $a = 1$, $a = 3$ y $a = \frac{1}{2}$, dibujadas en el mismo conjunto de ejes de coordenadas. Observe que la elección de un valor mayor de a en $f(x) = ax^2$ tiene como resultado una gráfica "más estrecha" o "más angosta".

FIGURA 3

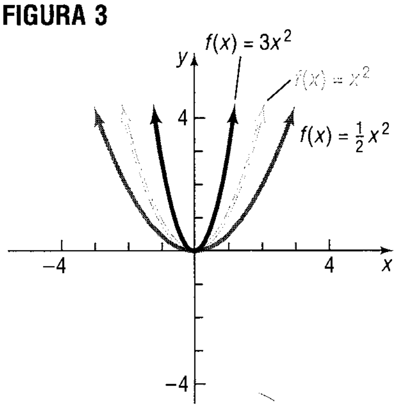


FIGURA 4

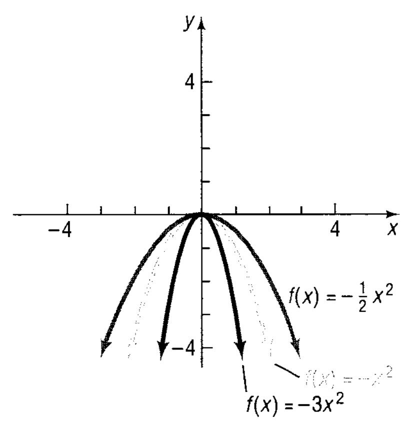
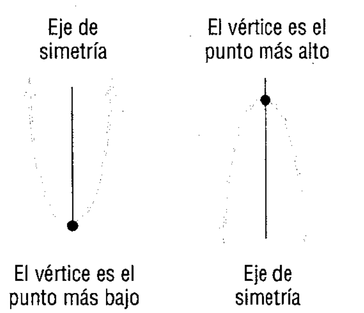


FIGURA 5
Gráficas de una función cuadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$



(a) Abre hacia arriba **(b)** Abre hacia abajo

Las gráficas de $f(x) = ax^2$ para $a < 0$ son sólo reflexiones alrededor del eje x de las gráficas correspondientes de $f(x) = |a|x^2$. *Véase* la figura 4.

Las gráficas en las figuras 3 y 4 son las comunes de todas las funciones cuadráticas y las llamamos **parábolas**. Observe la figura 5 donde están dibujadas dos parábolas, la de la izquierda abre **hacia arriba** y tiene un punto más bajo; la de la derecha abre **hacia abajo** y tiene un punto más alto. Los puntos más bajo y más alto de una parábola se llaman **vértices**. La recta vertical que pasa por el vértice en cada parábola en la figura 5 se llama **eje de simetría** (por lo común abreviado a **eje**) de la parábola. Como la parábola es simétrica con respecto a su eje, éste puede ser utilizado para ayudar a la graficación de la parábola.

Las parábolas mostradas en la figura 5 son las gráficas de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Note que los ejes de coordenadas no están incluidos en la figura. Dependiendo de los valores de a, b y c, los ejes podrían ser colocados en cualquier parte. La información importante es que, salvo por compresión o alargamiento, la forma de la gráfica de una función cuadrática se verá como una de las parábolas de la figura 5.

En el ejemplo siguiente utilizamos técnicas de la sección 2.3 para hacer la gráfica de una función cuadrática de $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Para hacerlo debemos completar el cuadrado (analizado en el apéndice A.3) y escribir la función f en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

EJEMPLO 1

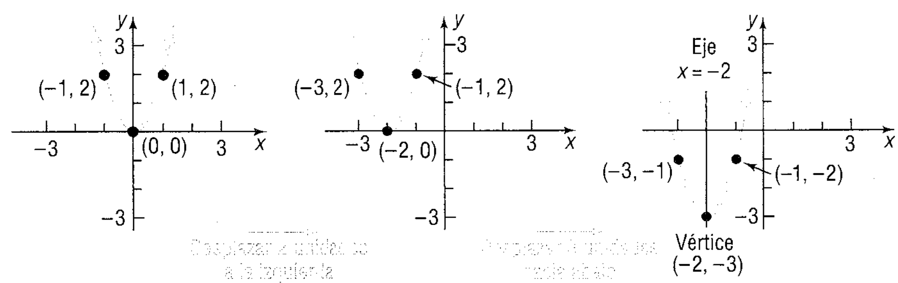
Hacer la gráfica de la función: $f(x) = 2x^2 + 8x + 5$

Solución Empezamos completando el cuadrado en el lado derecho:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 8x + 5 \\ &= 2(x^2 + 4x) + 5 \\ &= 2(x^2 + 4x + 4) + 5 - 8 \\ &= 2(x + 2)^2 - 3 \qquad (2) \end{aligned}$$

La gráfica de f puede ser obtenida en tres etapas, como se muestra en la figura 6. Ahora compare esta gráfica con la de la figura 5(a). La gráfica de $f(x) = 2x^2 + 8x + 5$ es una parábola que abre hacia arriba y tiene su vértice (punto más bajo) en $(-2, -3)$. Su eje de simetría es la recta $x = -2$.

FIGURA 6



(a) $y = 2x^2$ (b) $y = 2(x + 2)^2$ (c) $y = 2(x - 2)^2$

Hacer la gráfica de $f(x) = 2x^2 + 8x + 5$ y utilizar TRACE para localizar su vértice.

Ahora resuelva el problema 17.

El método utilizado en el ejemplo 1 puede ser aplicado para hacer la gráfica de cualquier función $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{ax} + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

Si hacemos $h = -b/2a$ y $k = (4ac - b^2)/4a$, esta última ecuación puede ser reescrita en la forma

$$f(x) = a(x - h)^2 + k \tag{3}$$

La gráfica de f es la parábola $y = ax^2$ recorrida horizontalmente h unidades y en sentido vertical k unidades. Como resultado de esto, el vértice es (h, k) y la gráfica abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$. El eje de simetría es la recta vertical $x = h$.

Por ejemplo, compare la ecuación (3) con la ecuación (2) del ejemplo 1.

$$f(x) = 2(x + 2)^2 - 3$$
$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

Concluimos que $a = 2$, de modo que la gráfica abre hacia arriba. También, encontramos que $h = -2$ y $k = -3$, de manera que su vértice está en $(-2, -3)$.

No se necesita completar el cuadrado para obtener el vértice. En casi todos los casos, es más fácil obtener el vértice de una función cuadrática f recordando que su coordenada x es $h = -b/2a$. Luego, la coordenada y puede encontrarse evaluando f en $-b/2a$.

Estos resultados se resumen a continuación:

Características de la gráfica de una función cuadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\text{Vértice } = \left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right) \qquad \text{Eje: la recta } x = \frac{-b}{2a} \tag{4}$$

La parábola abre hacia arriba si $a > 0$ y abre hacia abajo si $a < 0$.

EJEMPLO 2 Localización del vértice (sin hacer la gráfica)

Sin hacer la gráfica, localizar el vértice y el eje de la parábola definida por $f(x) = -3x^2 + 6x + 1$. ¿Abre hacia arriba o hacia abajo?

Solución Para esta función cuadrática $a = -3$, $b = 6$ y $c = 1$. La coordenada x del vértice es

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-6}{-6} = 1$$

Por lo tanto, la coordenada y del vértice es

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f(1) = -3 + 6 + 1 = 4$$

El vértice está ubicado en el punto $(1, 4)$. El eje de simetría es la recta $x = 1$. Por último, ya que $a = -3 < 0$, la parábola abre hacia abajo.

La información acumulada en el ejemplo 2, junto con la localización de las intersecciones con los ejes, por lo común proporciona lo necesario para hacer la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. La intersección-y es el valor de f en $x = 0$, esto es, $f(0) = c$. Las intersecciones-x, si las hay, se encuentran resolviendo la ecuación

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

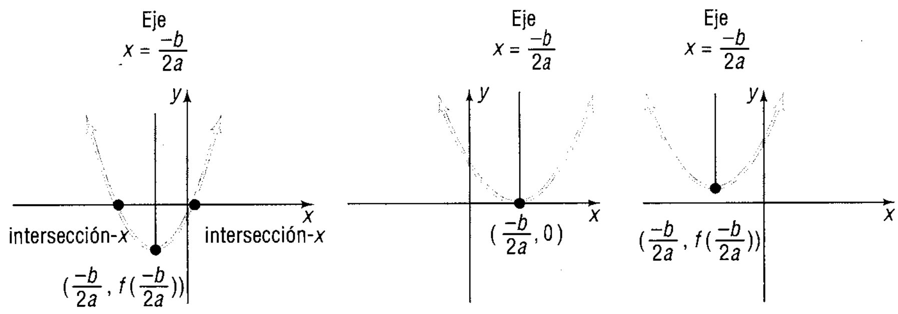
Esta ecuación tiene dos, una, o ninguna solución real, dependiendo de si el discriminante $b^2 - 4ac$ es positivo, cero o negativo. Por tanto, tiene sus correspondientes intersecciones-x, como sigue:

Intersecciones-x de una función cuadrática

1. Si el discriminante $b^2 - 4ac > 0$, la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene dos intersecciones-x distintas de modo que cruzará el eje x en dos lugares.
2. Si el discriminante $b^2 - 4ac = 0$, la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene una intersección-x y toca al eje x con su vértice.
3. Si el discriminante $b^2 - 4ac < 0$, la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$ no tiene intersección-x así que no corta ni toca al eje x.

La figura 7 ilustra estas posibilidades para parábolas que abren hacia arriba.

FIGURA 7
$f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$



(a) $b^2 - 4ac > 0$
Dos intersecciones-x

(b) $b^2 - 4ac = 0$
Una intersección-x

(c) $b^2 - 4ac < 0$
No hay intersecciones-x

EJEMPLO 3 *Graficación de una función cuadrática usando su vértice, su eje y sus intersecciones*

Usar la información del ejemplo 2 y las ubicaciones de las intersecciones para hacer la gráfica de $f(x) = -3x^2 + 6x + 1$.

Solución En el ejemplo 2 encontramos que el vértice está en $(1, 4)$ y que el eje de simetría es $x = 1$. La intersección-y se encuentra haciendo $x = 0$. Por tanto, la intersección-y es $f(0) = 1$. Las intersecciones-x se encuentran haciendo $f(x) = 0$, lo cual tiene como resultado la ecuación

$$-3x^2 + 6x + 1 = 0$$

El discriminante $b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(-3)(1) = 36 + 12 = 48 > 0$, de modo que la ecuación tiene dos soluciones reales y la gráfica dos intersecciones-x. Utilizando la fórmula cuadrática, encontramos

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 + \sqrt{48}}{-6} = \frac{-6 + 4\sqrt{3}}{-6} = -0.15$$

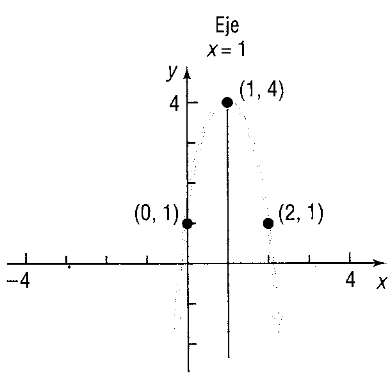
y

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 - \sqrt{48}}{-6} = \frac{-6 - 4\sqrt{3}}{-6} = 2.15$$

Las intersecciones-x son aproximadamente -0.15 y 2.15.

La gráfica está ilustrada en la figura 8. Note cómo usamos la intersección-y, y el eje de simetría, $x = 1$, para obtener el punto adicional $(2, 1)$ de la gráfica.

FIGURA 8
$f(x) = -3x^2 + 6x + 1$



Verificación: Hacer la gráfica de $f(x) = -3x^2 + 6x + 1$. Utilice TRACE para localizar las dos intersecciones-x y el vértice.

Ahora resuelva el problema 25.

Si la gráfica de una función cuadrática tiene una intersección-x o ninguna, podrá ser necesario marcar algunos puntos adicionales para obtener la gráfica.

EJEMPLO 4 *Graficación de una función cuadrática usando su vértice, su eje y sus intersecciones*

Hacer la gráfica de $f(x) = x^2 - 6x + 9$ determinando si su gráfica abre hacia arriba o hacia abajo y encontrando su vértice, su eje de simetría, su intersección-y y sus intersecciones-x, si las hay.

Solución Para $f(x) = x^2 - 6x + 9$, tenemos $a = 1$, $b = -6$, y $c = 9$. Como $a = 1 > 0$, la parábola abre hacia arriba. La coordenada x del vértice es

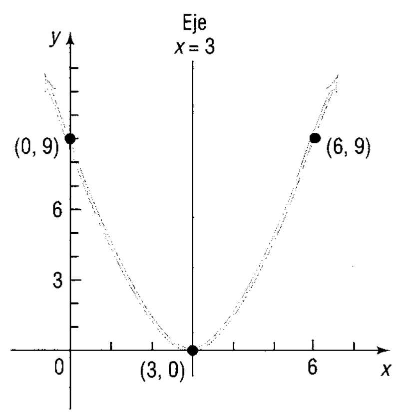
$$\frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = 3$$

La coordenada y del vértice es

$$f(3) = 9 - 6 \cdot 3 + 9 = 0$$

De modo que el vértice está en $(3, 0)$. El eje de simetría es la recta $x = 3$. La intersección-y es $f(0) = 9$. Como el vértice $(3, 0)$ está en el eje x, la gráfica toca al eje x en la intersección-x. Usando el eje de simetría y la intersección-y en $(0, 9)$, podemos localizar el punto $(6, 9)$ de la gráfica. *Véase* la figura 9.

FIGURA 9
$f(x) = x^2 - 6x + 9$



EJEMPLO 5 *Graficación de una función cuadrática usando su vértice, su eje y sus intersecciones*

Hacer la gráfica de $f(x) = 2x^2 + x + 1$ determinando si su gráfica abre hacia arriba o hacia abajo y encontrando su vértice, su eje de simetría, su intersección-y y sus intersecciones-x, si las hay.

Solución Para $f(x) = 2x^2 + x + 1$, tenemos $a = 2$, $b = 1$ y $c = 1$. Como $a = 2 > 0$, la parábola abre hacia arriba. La coordenada x del vértice es

$$\frac{-b}{2a} = -\frac{1}{4}$$

La coordenada y del vértice es

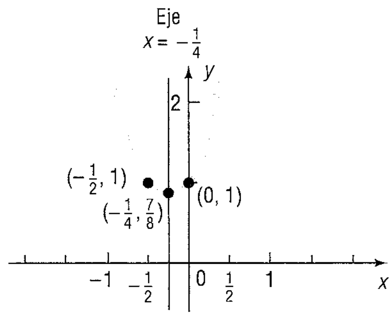
$$f(-\tfrac{1}{4}) = 2(\tfrac{1}{16}) + (-\tfrac{1}{4}) + 1 = \tfrac{7}{8}$$

Así, el vértice está en $(-\frac{1}{4}, \frac{7}{8})$. El eje de simetría es la recta $x = -\frac{1}{4}$. La intersección-y es $f(0) = 1$. La intersección (o intersecciones)-x, si las hay, cumplen la ecuación

$$2x^2 + x + 1 = 0$$

Ya que el discriminante $b^2 - 4ac = 1 - 8 = -7 < 0$, esta ecuación no tiene solución real, y así la gráfica no tiene intersecciones-x. Utilizamos el punto $(0, 1)$ y el eje de simetría $x = -\frac{1}{4}$ para localizar el punto $(-\frac{1}{2}, 1)$ de la gráfica. *Véase* la figura 10.

FIGURA 10
$f(x) = 2x^2 + x + 1$



Resumen

Existen dos maneras de hacer la gráfica de una función cuadrática:

1. Completar el cuadrado y aplicar técnicas de desplazamiento (ejemplo 1).
2. Utilizar los resultados dados en el recuadro (4) para encontrar el vértice y el eje de simetría y para determinar si la gráfica abre hacia arriba o hacia abajo. Después localizar la intersección-y y las intersecciones-x, si las hay (ejemplos del 2 al 5).

Ahora resuelva el problema 31.

Aplicaciones

Ya hemos visto que la gráfica de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola con vértice en $(-b/2a, f(-b/2a))$. Este vértice es el punto más alto de la gráfica si $a < 0$ y el más bajo si $a > 0$. Si el vértice es el punto más alto ($a < 0$), entonces $f(-b/2a)$ es el **valor máximo** de f. Si el vértice es el punto más bajo ($a > 0$), entonces $f(-b/2a)$ es el **valor mínimo** de f. Estas ideas propician el desarrollo de muchas aplicaciones.

En una tienda donde se venden calculadoras se ha encontrado que cuando las calculadoras se venden en un precio de p dólares por unidad, el ingreso R como una función del precio p es

$$R(p) = -750p^2 + 15{,}000p$$

¿Cuál debe ser el precio unitario para poder maximizar el ingreso? Si se cobra ese precio, ¿cuál será el ingreso máximo?

El ingreso R es

$$R(p) = -750p^2 + 15{,}000p = ap^2 + bp + c$$

La función R es una función cuadrática con $a = -750$, $b = 15{,}000$, y $c = 0$. Ya que $a < 0$, el vértice es el punto más alto de la parábola. Por lo tanto, el ingreso es máximo cuando el precio es

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-15{,}000}{2(-750)} = \frac{-15{,}000}{-1500} = \$10$$

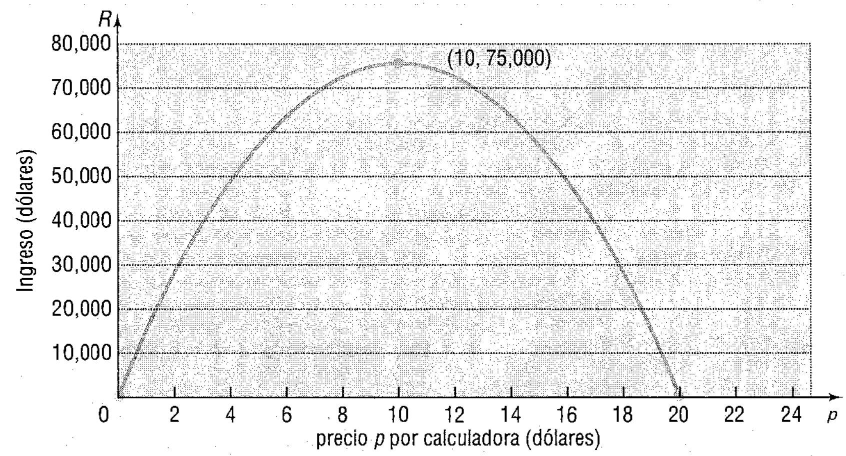


FIGURA 11
$R(p) = -750p^2 + 15{,}000p$

El ingreso máximo R es

$$R(10) = -750(10)^2 + 15{,}000(10) = \$75{,}000$$

Véase la figura 11 para una ilustración.

Un proyectil es disparado desde un acantilado a 500 pies por encima del agua con una inclinación de 45° respecto a la horizontal, la velocidad del disparo es de 400 pies por segundo. La altura h por encima del agua está dada por

$$h(x) = \frac{-32x^2}{(400)^2} + x + 500$$

donde x es la distancia horizontal del proyectil desde la base del acantilado.

(a) Encontrar la altura máxima del proyectil.
(b) ¿A qué distancia desde la base del acantilado chocará el proyectil con el agua?

La figura 12, de la página 90, ilustra la situación.

(a) La altura del proyectil está dada por una función cuadrática:

$$h(x) = \frac{-32x^2}{(400)^2} + x + 500 = \frac{-1}{5000}x^2 + x + 500$$

Estamos buscando el valor máximo de h y, puesto que éste es obtenido en el vértice, calculamos

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2(-1/5000)} = \frac{5000}{2} = 2500$$

La altura máxima del proyectil es

$$h(2500) = \frac{-1}{5000}(2500)^2 + 2500 + 500 = -1250 + 2500 + 500 = 1750 \text{ pies}$$

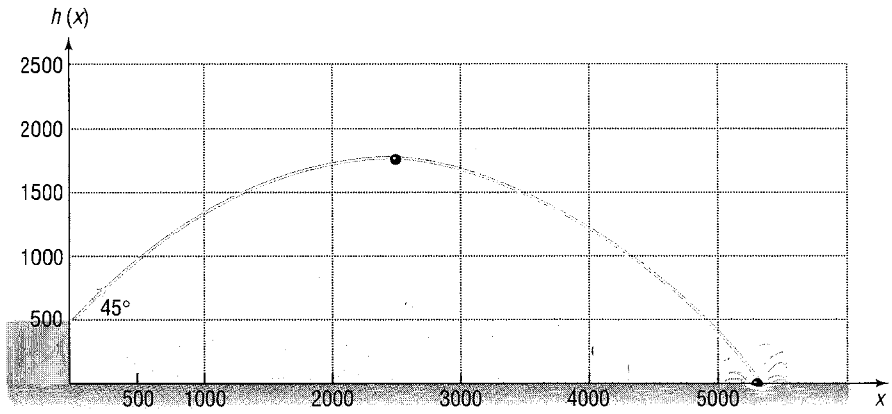


FIGURA 12

(b) El proyectil chocará con el agua cuando su altura sea cero. Para determinar la distancia x recorrida necesitamos resolver la ecuación

$$h(x) = \frac{-1}{5000}x^2 + x + 500 = 0$$

Usamos la fórmula cuadrática con

$$b^2 - 4ac = 1 - 4\left(\frac{-1}{5000}\right)(500) = 1.4$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1.4}}{2(-1/5000)} = \begin{cases} -458 \\ 5458 \end{cases}$$

Desechamos la solución negativa y encontramos que el proyectil chocará con el agua a una distancia de 5458 pies a partir de la base del acantilado.

Exploración: Hacer la gráfica de:

$$h(x) = \frac{-1}{5000}x^2 + x + 500 \qquad 0 \leq x \leq 5500$$

Utilice TRACE para dibujar la trayectoria del proyectil; tomando nota de su altura máxima y de la distancia que hay desde la base del acantilado hasta el punto en que choca con el agua. Compare sus resultados con los obtenidos en el texto. ¿A qué distancia desde la base del acantilado está el proyectil cuando su altura es de: (i) 1000 pies? (ii) ¿1500 pies? (iii) ¿2000 pies?

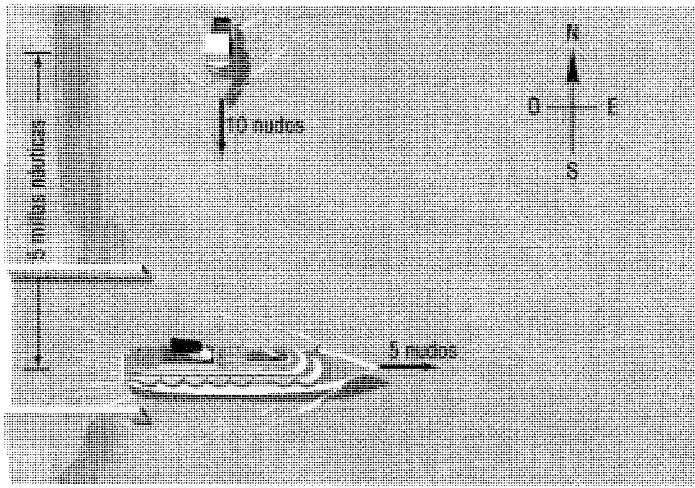
Ahora resuelva el problema 55.

EJEMPLO 8 *Navegación*

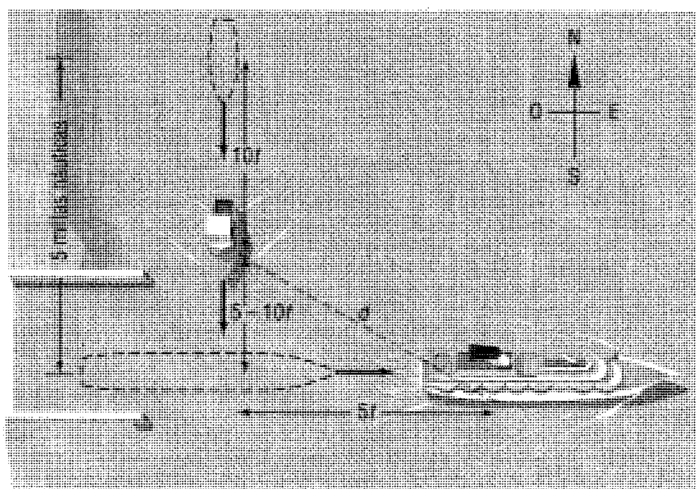
Un crucero sale del puerto de Miami rumbo al este a una velocidad constante de 5 nudos (1 nudo = 1 milla náutica por hora). A las cinco de la tarde, el crucero se encuentra a 5 millas náuticas al sur de un yate que se mueve hacia el sur a una velocidad constante de 10 nudos. ¿En qué momento están más cercanas las dos embarcaciones?

Solución Empecemos con una ilustración que describa la posición relativa de cada embarcación a las 5:00 P.M. *Véase* la figura 13(a). Luego de transcurrido el tiempo t (en horas), el crucero se ha movido $5t$ millas náuticas y el yate se ha movido hacia el sur $10t$ millas náuticas. La figura 13(b) ilustra la posición relativa de cada

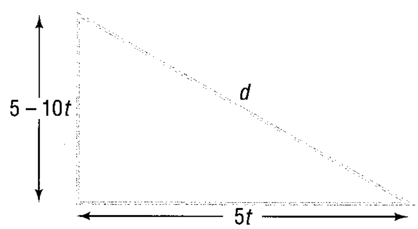
FIGURA 13



(a) Posición a las 5:00 PM



(b) Posición en el tiempo t



(c)

embarcación después de t horas. La figura 13(c) muestra un triángulo rectángulo trazado a partir de la figura 13(b). Por el teorema de Pitágoras, el cuadrado de la distancia d entre las embarcaciones después del tiempo t es

$$\begin{aligned} d^2 &= (5 - 10t)^2 + (5t)^2 \\ &= 125t^2 - 100t + 25 \end{aligned}$$

Ahora, la distancia d será mínima cuando d^2 sea mínima. Ya que d^2 es una función cuadrática de t, se deduce que d^2, y de aquí d, es un mínimo cuando

$$t = \frac{-b}{2a} = \frac{100}{2(125)} = \frac{2}{5} \text{ hora.}$$

Por lo tanto, las embarcaciones están más cercanas después de $\frac{2}{5}(60) = 24$ minutos, esto es, a las 5:24 de la tarde.

En un puente colgante los cables principales forman una parábola ya que es la única manera de lograr que el peso total del puente se distribuya de modo uniforme. El Golden Gate de San Francisco es un ejemplo de un puente colgante.

El puente Golden Gate

El Golden Gate enmarca la entrada a la bahía de San Francisco. Sus torres de 746 pies de altura están separadas por una distancia de 4200 pies. El puente está suspendido de dos enormes cables que miden 3 pies de diámetro; el ancho de la calzada es de 90 pies y ésta se encuentra aproximadamente a 220 pies del nivel del agua. Los cables forman una parábola y tocan la calzada en el centro del puente. Encuentre la altura de los cables a una distancia de 1000 pies del centro del puente.

Solución Empezamos seleccionando la ubicación de los ejes de coordenadas de modo que el eje x coincida en la calzada y el origen coincida en el centro del puente. Como resultado de esto, las torres gemelas quedarán verticales (altura $746 - 220 = 526$ pies por arriba de la calzada) y ubicadas a 2100 pies del centro. También, los cables de forma parabólica se extenderán desde las torres, abriendo hacia arriba, y tendrán su vértice en (0, 0). Como se ilustra en la figura 14, la manera en que seleccionamos la colocación de los ejes nos permite identificar la ecuación de una parábola como $y = ax^2$, $a > 0$. También podemos ver que los puntos $(-2100, 526)$ y $(2100, 526)$ están en la gráfica.

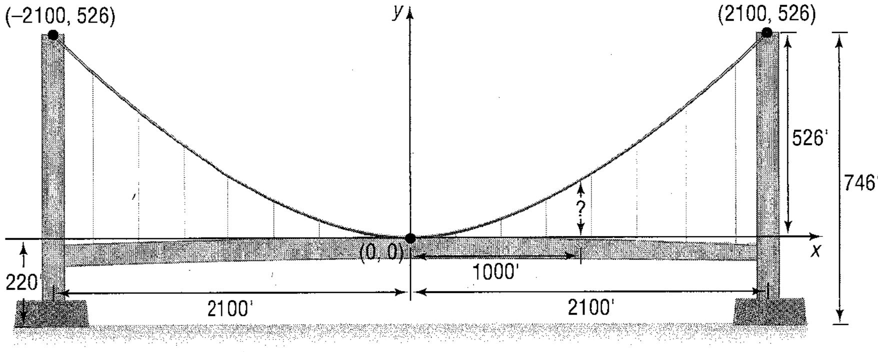


FIGURA 14

Con base en estos datos podemos encontrar el valor de a en $y = ax^2$:

$$y = ax^2$$
$$526 = a(2100)^2$$
$$a = \frac{526}{(2100)^2}$$

Así, la ecuación de la parábola es

$$y = \frac{526}{(2100)^2}x^2$$

La altura del cable cuando $x = 1000$ es

$$y = \frac{526}{(2100)^2}(1000)^2 \approx 119.3 \text{ pies}$$

Por tanto, el cable está a 119.3 pies de altura a una distancia de 1000 pies del centro del puente.

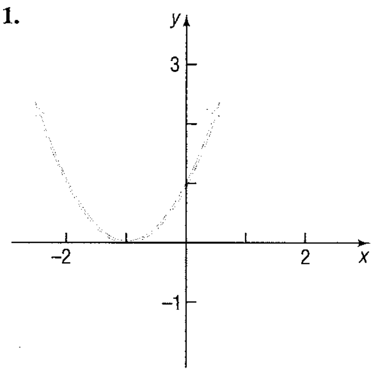
Ejercicio 3.1

En los problemas del 1 al 8 asocie cada gráfica con una de las siguientes funciones:

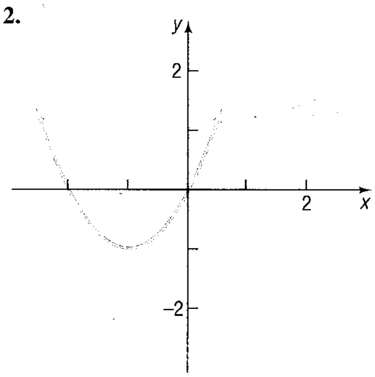
A. $y = x^2 - 1$ *B.* $y = -x^2 - 1$ *C.* $y = x^2 - 2x + 1$ *D.* $y = x^2 + 2x + 1$

E. $y = x^2 - 2x + 2$ *F.* $y = x^2 + 2x$ *G.* $y = x^2 - 2x$ *H.* $y = x^2 + 2x + 2$

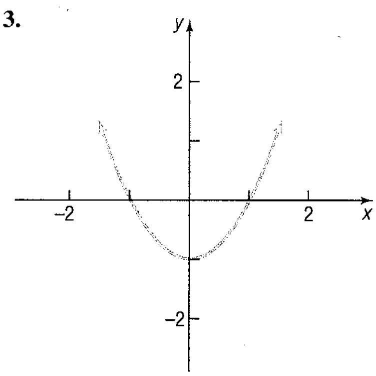
1.



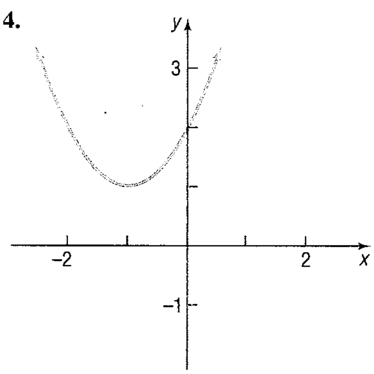
2.

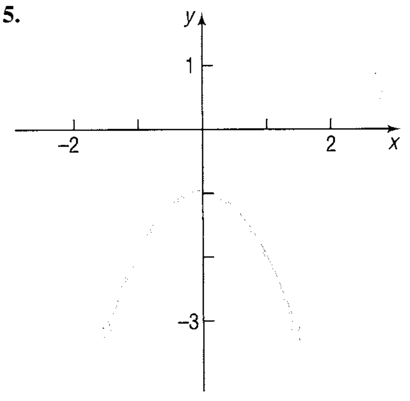


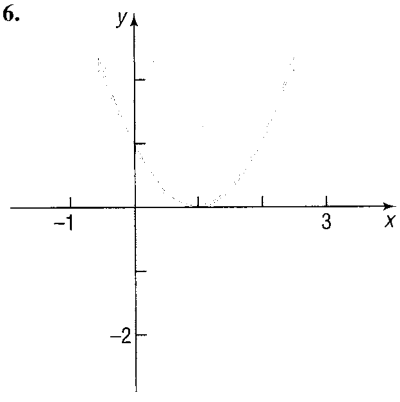
3.

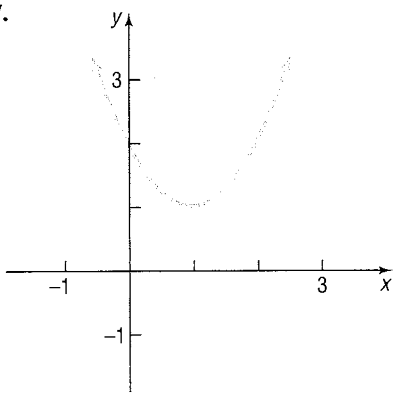


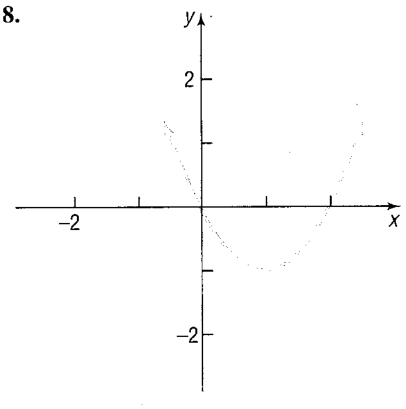
4.



5.


6.


7.


8.


En los problemas del 9 al 24, haga la gráfica de la función f iniciando con la gráfica de $y = x^2$ y utilizando corrimientos, compresión, alargamiento y/o reflexión.

9. $f(x) = \frac{1}{4}x^2$
10. $f(x) = 2x^2$
11. $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2$
12. $f(x) = 2x^2 - 3$
13. $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2$
14. $f(x) = 2x^2 + 4$
15. $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 1$
16. $f(x) = -2x^2 - 2$
17. $f(x) = x^2 + 4x + 2$
18. $f(x) = x^2 - 6x - 1$
19. $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$
20. $f(x) = 3x^2 + 6x$
21. $f(x) = -x^2 - 2x$
22. $f(x) = -2x^2 + 6x + 2$
23. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 1$
24. $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - 1$

En los problemas del 25 al 38, haga la gráfica de cada función cuadrática determinando si su gráfica abre hacia arriba o hacia abajo y encuentre su vértice, el eje de simetría, la intersección-y, e intersecciones-x si las hay.

25. $f(x) = x^2 + 2x - 8$
26. $f(x) = x^2 - 2x - 3$
27. $f(x) = -x^2 - 3x + 4$
28. $f(x) = -x^2 + x + 2$
29. $f(x) = x^2 + 2x + 1$
30. $f(x) = -x^2 + 4x - 4$
31. $f(x) = 2x^2 - x + 2$
32. $f(x) = 4x^2 - 2x + 1$
33. $f(x) = -2x^2 + 2x - 3$
34. $f(x) = -3x^2 + 3x - 2$
35. $f(x) = 3x^2 + 6x + 2$
36. $f(x) = 2x^2 + 5x + 3$
37. $f(x) = -4x^2 - 6x + 2$
38. $f(x) = 3x^2 - 8x + 2$

En los problemas del 39 al 44, determine si la función cuadrática dada tiene un valor máximo o mínimo y luego encuentre ese valor.

39. $f(x) = 2x^2 + 12x - 3$ **40.** $f(x) = 4x^2 - 8x + 3$ **41.** $f(x) = -x^2 + 10x - 4$

42. $f(x) = -2x^2 + 8x + 3$ **43.** $f(x) = -3x^2 + 12x + 1$ **44.** $f(x) = 4x^2 - 4x$

45. En un conjunto de ejes coordenados, haga la gráfica de la familia de parábolas $f(x) = x^2 + 2x + c$ para $c = -3$, $c = 0$ y $c = 1$. Describa las características de un miembro de esta familia.

46. En los mismos ejes coordenados, haga la gráfica de la familia de parábolas $f(x) = x^2 + cx + 1$ para $c = -4$, $c = 0$ y $c = 4$. Describa las características generales de esta familia.

47. Haga la gráfica de $y = x^2 + 1$. Después haga la gráfica de $y = x^2 + x + 1$, seguida por $y = x^2 + 2x + 1$, seguida por $y = x^2 + 3x + 1$. ¿Qué sucede? ¿Advierte algún patrón?

48. Haga la gráfica de $y = x^2 + x + 1$. Después haga la gráfica de $y = 2x^2 + x + 1$, seguida por $y = 3x^2 + x + 1$, seguida por $y = 4x^2 + x + 1$. ¿Qué sucede? ¿Advierte algún patrón?

49. *Maximización de ingresos.* Suponga que el fabricante de una secadora de ropa ha encontrado que cuando el precio por unidad es p dólares, el ingreso R (en dólares) es

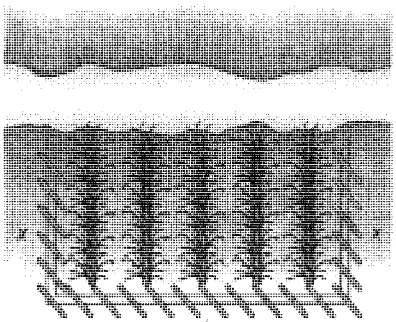
$$R = -4p^2 + 4000p$$

¿Qué precio unitario debe establecerse para maximizar el ingreso?¿Cuál es el ingreso máximo?

50. *Maximización de ingresos.* Una compañía de tractores ha encontrado que el ingreso por sus ventas de tractores para trabajo pesado es una función del precio por unidad p. Si el ingreso R es

$$R = -\frac{1}{2}p^2 + 1900p$$

¿cuál es el precio unitario p que debe cobrarse para maximizar el ingreso? ¿Cuál es el ingreso máximo?



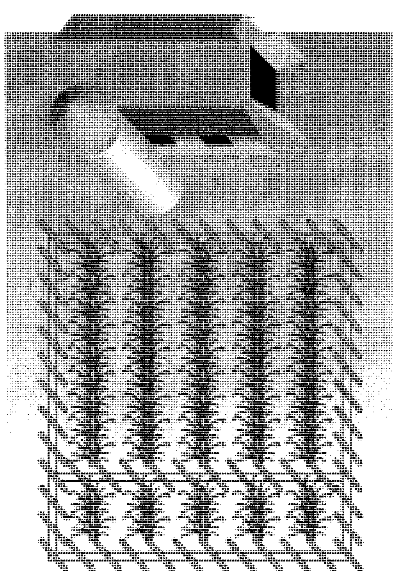
4000 − 2*x*

51. *Rectángulos con perímetro fijo.* ¿Cuál es la mayor área rectangular que puede rodearse con 400 pies de cerca? ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

52. *Rectángulos con perímetro fijo.* ¿Cuáles son las dimensiones de un rectángulo con perímetro fijo P que darán como resultado el área más grande?

53. *Cómo aprovechar al máximo una cerca.* Un granjero tiene 4000 metros de cerca y quiere bordear un terreno rectangular que colinda con un río. Si él no cerca el lado que está a lo largo del río, ¿cuál es la mayor área que puede cercar? (*Véase* la figura.)

54. *Cómo aprovechar al máximo una cerca.* Un granjero tiene 2000 metros de cerca y quiere cercar un terreno circular que colinda con una carretera recta. Si no cerca el lado que está a lo largo de la carretera, ¿cuál es la mayor área que puede abarcar?



55. *Cómo aprovechar al máximo una cerca.* Un granjero tiene 10,000 metros de cerca para bordear un campo rectangular y después dividirlo en dos terrenos con una cerca paralela a uno de los lados (*véase* la figura). ¿Cuál es la mayor área que puede ser cercada?

56. *Cómo aprovechar al máximo una cerca.* Un granjero tiene 10,000 metros de cerca para encerrar un campo rectangular y después dividirlo en tres terrenos con dos cercas paralelas a uno de los lados. ¿Cuál es la mayor área que puede ser encerrada?

57. *Análisis del movimiento de un proyectil.* Un proyectil es disparado desde un acantilado. El disparo se hace a 200 pies por arriba del nivel del agua con inclinación de 45° respecto de la horizontal y velocidad de 50 pies por segundo. La altura del proyectil sobre el agua está dada por

$$h(x) = \frac{-32x^2}{(50)^2} + x + 200$$

donde x es la distancia horizontal del proyectil a la base del acantilado.

(a) Encuentre la altura máxima del proyectil.

(b) ¿A qué distancia de la base del acantilado el proyectil chocará con el agua?

(c) Utilice TRACE para dibujar la trayectoria del proyectil; tome nota de su altura máxima y de la distancia que hay desde la base del acantilado hasta donde choca el proyectil contra el agua. Compare sus resultados con los obtenidos en las partes (a) y (b). ¿Cuándo es de 100 pies sobre el agua la altura del proyectil?, ¿a qué distancia está del acantilado?

58. *Análisis del movimiento de un proyectil.* Un proyectil es disparado con una inclinación de 45° respecto de la horizontal y con velocidad de 100 pies por segundo. La altura h del proyectil está dada por

$$h(x) = \frac{-32x^2}{(100)^2} + x$$

donde x es la distancia horizontal del proyectil desde el punto de disparo.

(a) Encuentre la altura máxima que alcanza el proyectil.

(b) ¿A qué distancia desde el punto de disparo chocará el proyectil contra el suelo?

(c) Utilice TRACE para dibujar la trayectoria del proyectil; tomando nota de su altura máxima y de la distancia que hay desde el punto de disparo al punto en donde choca contra el suelo. Compare sus resultados con los obtenidos en las partes (a) y (b). ¿Cuándo la altura del proyectil es de 50 pies por arriba del suelo? ¿Qué distancia ha recorrido horizontalmente?

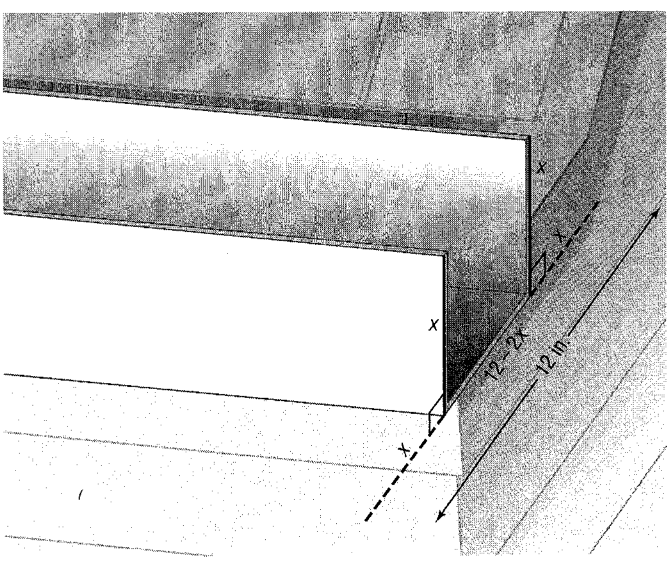
59. *Navegación.* Una aeronave mantiene una velocidad constante de 10 nudos en dirección norte. A las 4:00 PM, el radar de la nave detecta un destructor a 100 millas náuticas directamente hacia el este. Si el destructor lleva rumbo oeste a velocidad de 20 nudos, ¿cuándo estarán más cerca las dos naves? (1 nudo = 1 milla náutica por hora.)

60. *Control de tráfico aéreo.* Un controlador de tráfico aéreo ve en su pantalla dos aeronaves a la misma altitud. Una, un Piper Cub, lleva rumbo oeste a 150 millas por hora; la otra, un jet Lear, está a 15 millas directamente al norte del Piper y lleva rumbo sur a 400 millas por hora. ¿Qué tanto se acercarán las dos aeronaves?

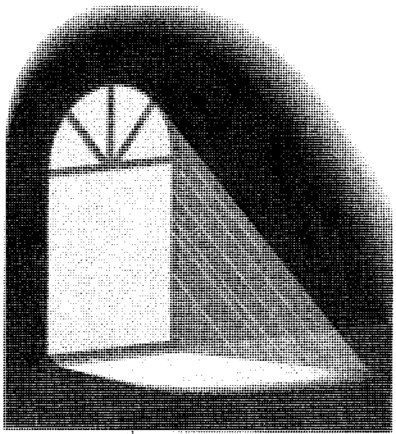
61. *Puente colgante* Un puente colgante con peso distribuido uniformemente a lo largo de su longitud tiene dos torres gemelas que se alzan 75 metros sobre una carretera y están separadas 400 metros. Los cables de forma parabólica están suspendidos de la parte superior de cada torre y tocan la carretera en el centro del puente. Encuentre la altura de los cables en un punto a 100 metros del centro. (Suponga que el camino es plano.)

62. *Arquitectura.* Un arco parabólico tiene una amplitud de 120 pies y una altura máxima de 25 pies. Elija ejes de coordenadas rectangulares adecuados y encuentre la ecuación de la parábola. Después calcule la altura del arco en los puntos que están a 10, 20 y 40 pies del centro.

63. *Construcción de canalones.* Un canalón para captar agua de lluvia es fabricado con hojas de aluminio de 12 pulgadas de ancho, doblando los lados 90° hacia arriba. ¿Qué profundidad proporciona la mayor área de sección transversal y con ello permite el mayor flujo de agua?

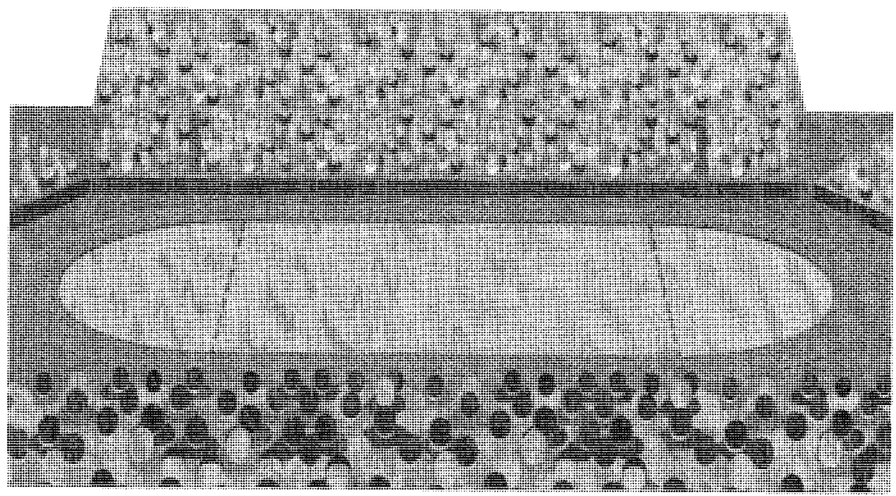


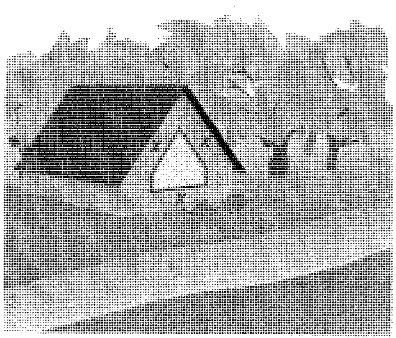
64. *Navegación.* A las 4:00 PM un crucero deja el puerto de Miami con dirección este a una velocidad constante de 15 nudos. Al mismo tiempo, un bote de recreo ubicado 100 millas náuticas al noreste del puerto de Miami se dirige directamente hacia el sur a una velocidad constante de 12 nudos. ¿A qué hora estarán más cerca las embarcaciones? ¿Qué tan próximos? (Exprese su respuesta en millas náuticas; 1 nudo = 1 milla náutica por hora.)



65. *Ventana normanda.* Una ventana normanda tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo de diámetro igual al ancho del rectángulo (*véase* la figura). Si el perímetro de la ventana es de 20 pies, ¿cuáles dimensiones permitirán la recepción de más luz (maximizar el área)? [*Nota*: La circunferencia del círculo = $2\pi r$; área del círculo = πr^2, donde r es el radio del círculo.]

66. *Construcción de un estadio.* Una pista y el área de un campo de juego tienen la forma de un rectángulo con un semicírculo en cada extremo (*véase* la figura). El perímetro interior de la pista será de 1500 metros. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del rectángulo de modo que su área sea máxima?





67. *Arquitectura.* Una ventana especial tiene la forma de un rectángulo coronado por un triángulo equilátero (*véase* la figura). Si el perímetro de la ventana mide 16 pies, ¿cuáles son las dimensiones que dejan entrar la mayor cantidad de luz? [*Nota:* el área de un triángulo equilátero = $(\sqrt{3}/4)x^2$, donde x es la longitud de un lado del triángulo.]

68. *Análisis del movimiento de un proyectil.* Un proyectil es disparado con inclinación de 45° respecto de la horizontal y velocidad inicial de v_0 pies por segundo. Si el punto de disparo es el origen, el eje x la horizontal y el eje y la vertical, entonces la altura y (en pies) después de que una distancia horizontal x ha sido recorrida es aproximadamente

$$y = \frac{-32x^2}{v_0^2} + x$$

(a) Encuentre la altura máxima en términos de la velocidad inicial v_0.
(b) Si la velocidad inicial se duplica, ¿qué le pasa a la altura máxima?
(c) Suponiendo que el terreno es plano, ¿a qué distancia del punto de disparo caerá el proyectil si la velocidad inicial es de 64 pies por segundo?

69. Un club de vuelos especiales cobra a sus miembros \$400.00 anuales. Por cada miembro nuevo, arriba de 60, la tarifa para todos se reduce en \$5.00. ¿Cuál es el número de socios con el que se obtiene el máximo ingreso?

70. Una agencia de renta de automóviles tiene 24 automóviles idénticos. El propietario de la agencia determina que todos los autos pueden ser rentados a un precio de \$10.00 diarios. Sin embargo, por cada \$2.00 de aumento en la renta, uno de los autos deja de rentarse. ¿Cuál es el precio de renta que maximiza el ingreso?

71. La gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene vértice en $x = 0$ y pasa por los puntos (0, 2) y (1, 8). Encuentre a, b y c.

72. La gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene vértice en $x = 1$ y pasa por los puntos (0, 1) y (-1, -8). Encuentre a, b y c.

73. *Reacciones químicas.* Una reacción química autocatalizadora tiene como resultado la formación de un compuesto que provoca que la razón de formación aumente. Si la razón de reacción V está dada por

$$V(x) = kx(a - x) \qquad 0 \le x \le a$$

donde k es una constante positiva, a la cantidad inicial del compuesto y x la cantidad variable del compuesto, ¿para qué valor de x la reacción tiene una razón máxima?

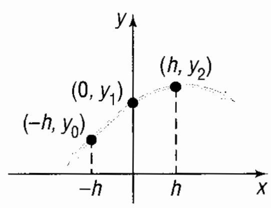
74. Un rectángulo tiene un vértice sobre la recta $y = 10 - x$, $x > 0$, otro en el origen, uno sobre el eje positivo x y uno más sobre el eje positivo y. Encuentre la mayor área A que puede ser encerrada por este rectángulo.

75. *Cálculo: Regla de Simpson.* La figura muestra la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$. Suponga que los puntos $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$ y (h, y_2) están sobre la gráfica. Puede demostrarse que el área encerrada por la parábola, el eje x y las rectas $x = -h$ y $x = h$ es

$$\text{Área} = \frac{h}{3}(2ah^2 + 6c)$$

Demostrar que esta área también puede ser obtenida mediante

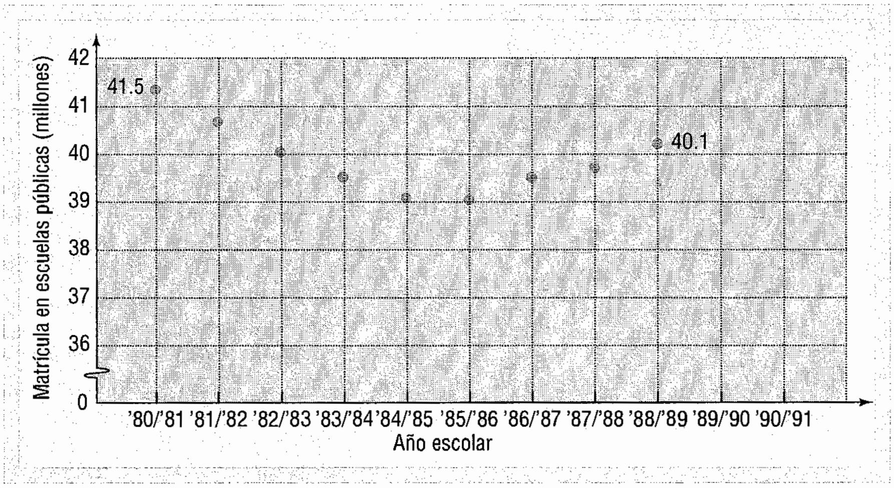
$$\text{Área} = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$



76. Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son enteros impares. Si x es un entero, demuestre que $f(x)$ debe ser un entero impar. [*Nota:* x es un entero par o impar.]

77. Construya una función cuadrática que abra hacia abajo y tenga una sola intersección-x. Compárela con las de sus compañeros. ¿Cuáles son sus semejanzas? ¿Cuáles sus diferencias?

78. La figura ilustra información verdadera acerca de la matrícula en todas las escuelas públicas estadounidenses (tanto de nivel elemental como de nivel medio) para los años académicos de 1980–1981 a 1988–1989. Suponga que los puntos están sobre los de una parábola y que una matrícula mínima de 39 millones ocurrió entre 1984–1985 y 1985–1986. Encuentre una ecuación para esta parábola y, suponiendo que la tendencia continúa, utilícela para predecir la matrícula de escuelas públicas estadounidenses en 1991–1992. Investigue cuál fue la matrícula real en ese periodo. Compare su proyección y escriba brevemente sus impresiones.



Funciones polinomiales

Función polinomial

Una **función polinomial** es una función de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad (1)$$

donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son números reales y n es un entero no negativo. El dominio lo constituyen todos los números reales.

Así, una función polinomial es una cuya regla está dada por un polinomio en una variable. El **grado** de una función polinomial es el grado del polinomio en una variable.

EJEMPLO 1 *Identificación de funciones polinomiales*

Determinar cuáles de las funciones siguientes son polinomiales. Para aquellas que lo sean encuentre su grado; para las que no lo sean indique por qué no lo son.

(a) $f(x) = 2 - 3x^4$ (b) $g(x) = \sqrt{x}$ (c) $h(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x^3 - 1}$

(d) $F(x) = 0$ (e) $G(x) = 8$

Solución

(a) f es una función polinomial de grado 4.

(b) g no es una función polinomial. La variable x está elevada a la potencia $\frac{1}{2}$ que no es un entero no negativo.

(c) h no es una función polinomial. Es el cociente de dos polinomios y el polinomio en el denominador es de grado positivo.

(d) F es la función polinomial cero; no se le asigna grado alguno.

(e) G es una función constante diferente de cero, una función polinomial de grado cero.

Ahora resuelva los problemas 1 y 5.

Ya hemos analizado en detalle funciones polinomiales de grado 0, 1 y 2. *Véase* la tabla 1 para un resumen de las características de las gráficas de estas funciones polinomiales.

TABLA 1

GRADO	FORMA	NOMBRE	GRÁFICA
Sin grado	$f(x) = 0$	Función cero	El eje x
0	$f(x) = a_0, \quad a_0 \neq 0$	Función constante	Recta horizontal con intersección-y en a_0
1	$f(x) = a_1x + a_0, \quad a_1 \neq 0$	Función lineal	Recta no vertical, no horizontal con pendiente a_1 e intersección-y a_0
2	$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_2 \neq 0$	Función cuadrática	Parábola: la gráfica abre hacia arriba si $a_2 > 0$; abre hacia abajo si $a_2 < 0$

Funciones potencia

Primero, consideremos una clase especial de función polinomial llamada *función potencia.*

Función potencia de grado n

Una **función potencia de grado n** es de la forma

$$f(x) = ax^n \tag{2}$$

donde a es un número real, $a \neq 0$, y $n > 0$ es un entero.

La gráfica de una función potencia de grado 1, $f(x) = ax$, es una recta, con pendiente a, que pasa por el origen. La gráfica de una función potencia de grado 2, $f(x) = ax^2$, es una parábola, con vértice en el origen, que abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$.

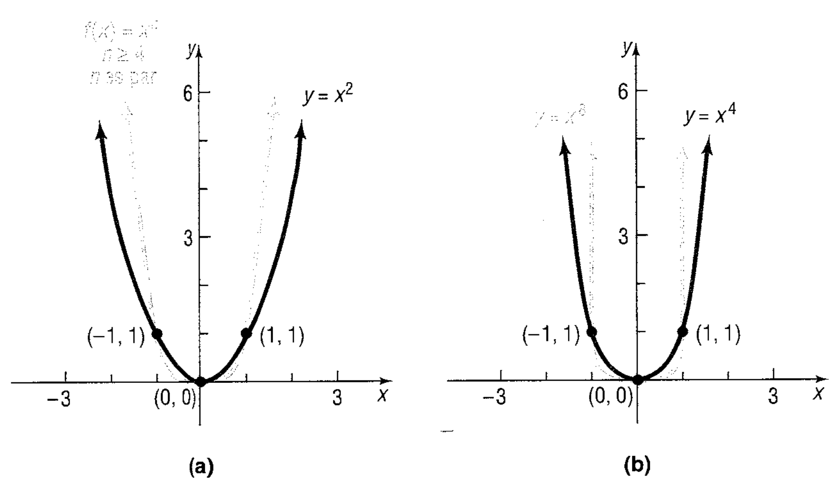
Si sabemos cómo hacer la gráfica de una función potencia de la forma $f(x) = x^n$, entonces una compresión o un alargamiento y, tal vez, una reflexión con respecto al eje x, nos permitirán obtener la gráfica de $g(x) = ax^n$. En consecuencia, nos debemos concentrar en la graficación de funciones potencia de la forma $f(x) = x^n$.

Empecemos con funciones potencia de grado par de la forma $f(x) = x^n$, $n \geq 2$ y n es par. El dominio de f es el conjunto de todos los números reales y su rango el conjunto de los números reales no negativos. Esta función es par (¿advierte por qué?), de aquí que su gráfica sea simétrica con respecto al eje y. Su gráfica siempre contiene al origen y a los puntos $(-1, 1)$ y $(1, 1)$.

Si $n = 2$, la gráfica es la conocida parábola $y = x^2$ que abre hacia arriba, con vértice en el origen. Si $n \geq 4$, la gráfica de $f(x) = x^n$, siendo n par, estará más cercana al eje x que la parábola $y = x^2$ si $-1 < x < 1$, y más alejada del eje x que la parábola $y = x^2$ si $x < -1$ o si $x > 1$. La figura 15(a) ilustra esta conclusión. La figura 15(b) muestra una comparación de las gráficas de $y = x^4$ y $y = x^8$.

De la figura 15 podemos apreciar que cuando n se incrementa la gráfica de $f(x) = x^n$, $n \geq 2$ y par, tiende a ser plana cerca del origen y a crecer rápidamente conforme x se aleja del cero. Para n grande, puede parecer que cerca del origen la gráfica coincide con el eje x pero no es así; la gráfica en realidad sólo toca al eje x en el origen (*véase* la tabla 2). También, para n grande, puede parecer que

FIGURA 15



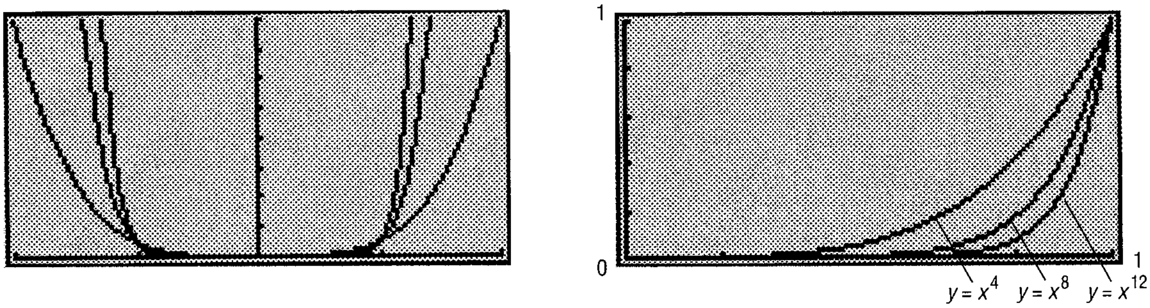
$x < -1$ o para $x > 1$ la gráfica es vertical pero tampoco es así; lo que sucede es que aumenta muy rápido en esos intervalos. Si la gráfica se amplificara muchas veces, estas distinciones serían claras.

TABLA 2

	$x = 0.1$	$x = 0.3$	$x = 0.5$
$f(x) = x^8$	10^{-8}	0.0000656	0.0039063
$f(x) = x^{20}$	10^{-20}	$3.487 \cdot 10^{-11}$	0.000001
$f(x) = x^{40}$	10^{-40}	$1.216 \cdot 10^{-21}$	$9.095 \cdot 10^{-13}$

Visualizando los conceptos. Hacer la gráfica $y = x^4$, $y = x^8$ y $y = x^{12}$ utilizando una pantalla con $-2 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 16$. Luego hacer la gráfica de cada una otra vez utilizando en la pantalla $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. *Véase* la figura 16.

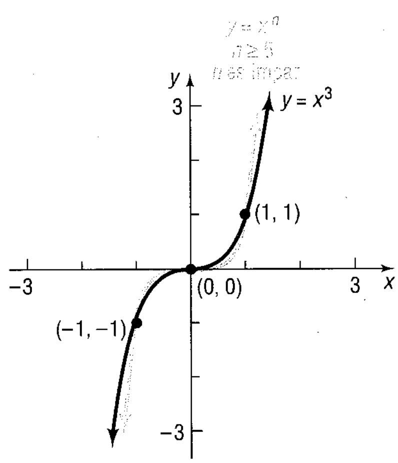
FIGURA 16



Ahora consideremos las funciones potencia de grado impar de la forma $f(x) = x^n$, $n \geq 3$ e impar. El dominio y el rango de f son el conjunto de los números reales. Esta función potencia es una función impar (¿advierte por qué?), de aquí que su gráfica sea simétrica con respecto al origen. Su gráfica siempre contiene al origen y a los puntos $(-1, -1)$ y $(1, 1)$.

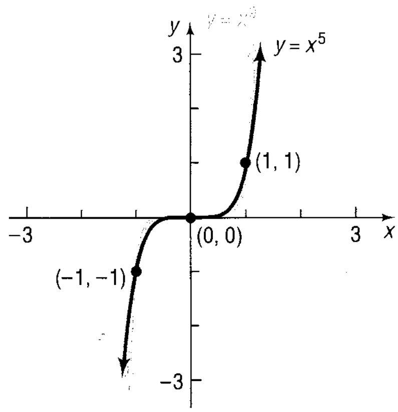
La gráfica de $f(x) = x^n$ cuando $n = 3$ se ha mostrado varias veces y se repite en la figura 17. Si $n \geq 5$, la gráfica de $f(x) = x^n$, siendo n impar, está más cercana al eje x que la de $y = x^3$ si $-1 < x < 1$ y más alejada del eje x que la de $y = x^3$ si $x < -1$ o si $x > 1$. La figura 17 también ilustra esta conclusión.

FIGURA 17



La figura 18 muestra una comparación de las gráficas de $y = x^5$ de $y = x^9$.

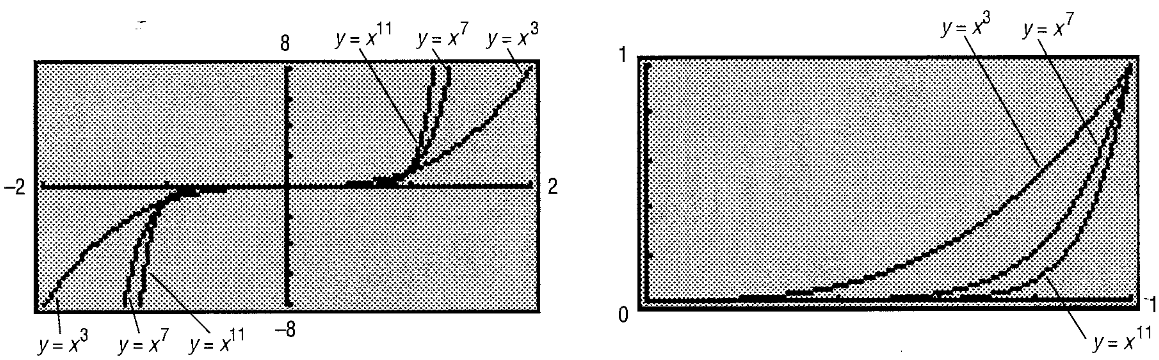
FIGURA 18



De las figuras 17 y 18, podemos ver que conforme aumenta n la gráfica de $f(x) = x^n$, $n \geq 3$ e impar, tiende a ser plana cerca del origen y es muy vertical cuando x se aleja del cero.

Visualización del concepto. Hacer la gráfica de $y = x^3$, $y = x^7$ y $y = x^{11}$ utilizando en la pantalla $-2 \leq x \leq 2$, $-8 \leq y \leq 8$. Luego hacer la gráfica de cada una otra vez usando en la pantalla $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. *Véase* la figura 19.

FIGURA 19



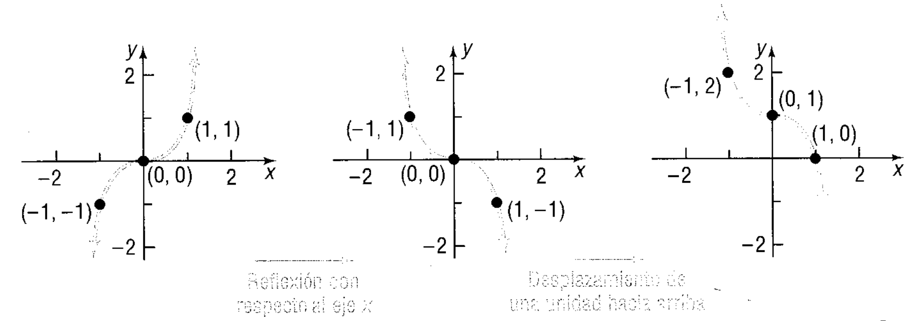
Los métodos de desplazamiento, compresión, alargamiento y reflexión, estudiados en la sección 2.3, cuando se utilizan junto con los hechos que se acaban de presentar nos permiten hacer la gráfica de una gran variedad de polinomios.

EJEMPLO 2 *Graficación de funciones polinomiales utilizando desplazamientos, reflexiones y semejanzas*

Hacer la gráfica de: $f(x) = 1 - x^5$

Solución La figura 20 muestra los pasos necesarios.

FIGURA 20



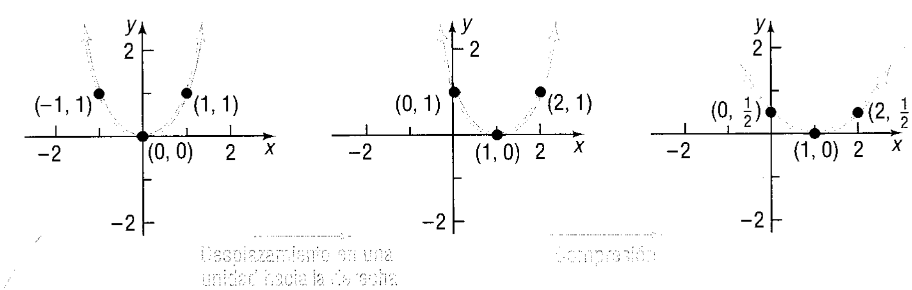
(a) $y = x^5$ **(b)** $y = -x^5$ **(c)** $y = -x^5 + 1 = 1 - x^5$

EJEMPLO 3 *Graficación de funciones polinomiales utilizando desplazamientos, reflexiones y semejanzas*

Hacer la gráfica de: $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^4$

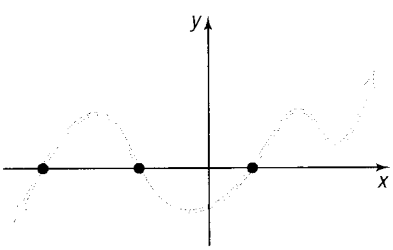
Solución La figura 21 muestra los pasos necesarios.

FIGURA 21

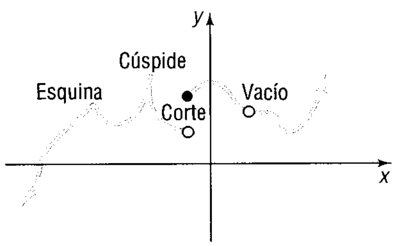


(a) $y = x^4$ **(b)** $y = (x-1)^4$ **(c)** $y = \frac{1}{2}(x-1)^4$

FIGURA 22



(a) Gráfica de una función polinomial: suave y continua.



(b) No puede ser la gráfica de una función polinomial.

Ahora resuelva el problema 15.

Graficación de otros polinomios

Para hacer la gráfica de la mayoría de las funciones polinomiales de grado 3 o superior se necesitan técnicas que van más allá del objetivo de este libro. Si toma un curso de cálculo aprenderá que la gráfica de toda función polinomial es suave y continua. Por **suave** queremos decir que la gráfica no tiene esquinas o cúspides; **continua** significa que la gráfica no tiene cortes ni vacíos y que puede ser dibujada sin interrupciones. *Véanse* las figuras 22(a) y 22(b).

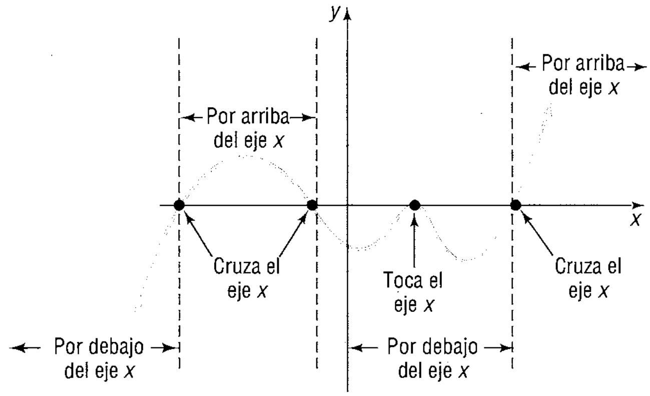
La figura 23 muestra la gráfica de una función polinomial con cuatro intersecciones-x. Observe que en las intersecciones-x la gráfica debe cruzar o tocar al eje x. En consecuencia, entre intersecciones-x consecutivas la gráfica está por arriba o por debajo del eje x. Pronto haremos uso de esta característica de la gráfica de un polinomio.

Si se factoriza completamente una función polinomial f, es fácil resolver la ecuación $f(x) = 0$ y localizar las intersecciones-x de la gráfica. Por ejemplo, si $f(x) = (x-1)^2(x+3)$, entonces las soluciones de la ecuación

$$f(x) = (x-1)^2(x+3) = 0$$

son fáciles de identificar como 1 y -3. En general, si f es una función polinomial y r es un número real para el cual $f(r) = 0$, entonces r es llamado **cero** (real) **de f**,

FIGURA 23



o raíz de f. *Por tanto, los ceros reales de una función polinomial son las intersecciones-x de su gráfica.* También, si $x - r$ es un factor de un polinomio f, entonces $f(r) = 0$ y así r es un cero de f. Si el mismo factor $x - r$ aparece más de una vez, entonces r es llamado **cero repetido,** o **múltiple, de f.** Para ser más precisos, tenemos la definición siguiente

Cero de multiplicidad m

Si $(x - r)^m$ es un factor de un polinomio f y $(x - r)^{m+1}$ no es factor de f, entonces r es llamada **cero de multiplicidad m de f.**

EJEMPLO 4 *Identificación de ceros y de sus multiplicidades*

Para el polinomio

$$f(x) = 5(x - 2)(x + 3)^2\left(x - \frac{1}{2}\right)^4$$

2 es un cero de multiplicidad 1

-3 es un cero de multiplicidad 2

$\frac{1}{2}$ es un cero de multiplicidad 4

Suponga que es posible factorizar una función polinomial y, como resultado de ello, localizar todas las intersecciones con el eje x de su gráfica (los ceros reales de la función). Como se mencionó antes, estas intersecciones-x dividen al eje x en intervalos abiertos, y en cada uno de tales intervalos la gráfica del polinomio estará por arriba o por debajo del eje x. *Veamos* un ejemplo.

EJEMPLO 5 *Graficación de polinomios usando sus intersecciones-x*

Para el polinomio: $f(x) = x^2(x - 2)$

(a) Encontrar las intersecciones-x y y de la gráfica de f.

(b) Utilizar las intersecciones-x para determinar los intervalos donde la gráfica de f está por arriba del eje x y los intervalos donde la gráfica de f está por debajo del eje x.

(c) Localizar otros puntos de la gráfica y conectarlos por medio de una curva suave.

Solución (a) La intersección-y es $f(0) = 0^2(0 - 2) = 0$. Las intersecciones-x satisfacen la ecuación

$$f(x) = x^2(x - 2) = 0$$

de la cual obtenemos

$$x^2 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0$$
$$x = 0 \qquad\qquad x = 2$$

Las intersecciones-x son 0 y 2.

(b) Las dos intersecciones-x dividen al eje x en tres intervalos:

$$-\infty < x < 0 \qquad 0 < x < 2 \qquad 2 < x < \infty$$

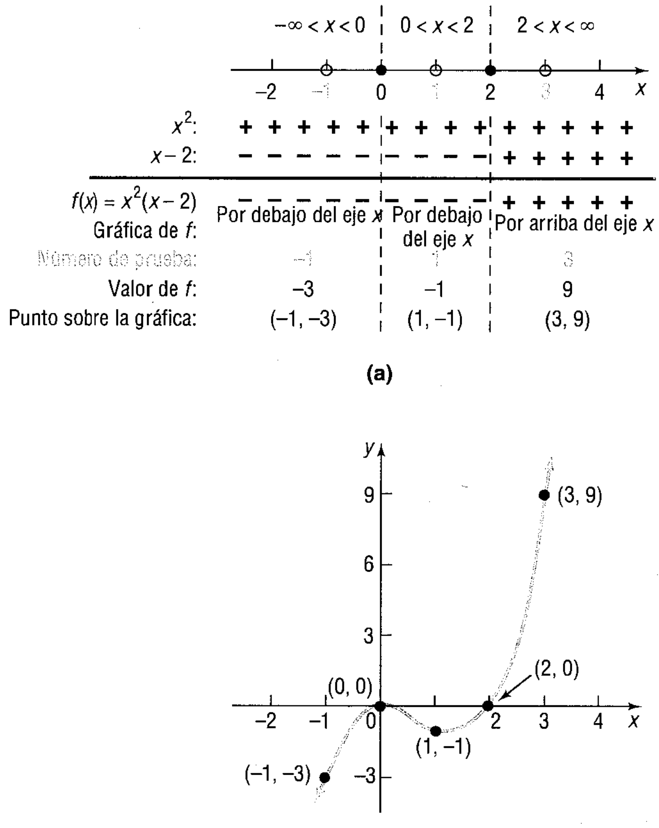
Ya que la gráfica de f cruza (o toca) al eje x sólo en $x = 0$ y $x = 2$, se deduce que la gráfica de f está por arriba del eje x [$f(x) > 0$] o por debajo del eje x [$f(x) < 0$] en cada uno de estos tres intervalos. Por tanto, necesitamos resolver las siguientes dos desigualdades:

$$f(x) = x^2(x - 2) > 0 \quad \text{y} \quad f(x) = x^2(x - 2) < 0$$

y construimos la figura 24(a). Por tanto, la gráfica de f está por arriba del eje x para $2 < x < \infty$ y por debajo del eje x para $-\infty < x < 0$ y $0 < x < 2$.

(c) Ya que utilizamos números de prueba, conocemos tres puntos adicionales de la gráfica: $(-1, -3)$, $(1, -1)$ y $(3, 9)$. La figura 24(b) ilustra estos puntos, las intersecciones y una curva suave y continua (la gráfica de f) que los conecta.

FIGURA 24



(b)

Observe que la gráfica de f en la figura 24(b) *cruza* el eje x en $x = 2$, *un cero de multiplicidad 1*. También note que la gráfica de f *toca* al eje x en $x = 0$, un *cero de multiplicidad 2*, ya que la gráfica está por debajo del eje x a ambos lados de (0, 0).

Esto sugiere el resultado siguiente:

Si r es un cero de multiplicidad par	El signo de $f(x)$ no cambia de un lado al otro de r.	La gráfica **toca** al eje x en r.
Si r es un cero de multiplicidad impar	El signo de $f(x)$ cambia de un lado al otro de r.	La gráfica **cruza** al eje x en r.

Ahora resuelva el problema 19.

Observe otra vez la figura 24(b). No podemos estar seguros de qué tan abajo va realmente la gráfica en el intervalo $0 < x < 2$. Pero sabemos que en algún punto en el intervalo $0 < x < 2$ la gráfica de f debe cambiar de dirección (de decreciente a creciente). Los puntos en los cuales una gráfica cambia de dirección son llamados **puntos de retorno.** En cálculo, tales puntos se denominan **máximos locales** o **mínimos locales,** y se dan técnicas para localizarlos. Así que no le preguntaremos acerca de la localización de puntos de retorno en sus gráficas. En lugar de eso, usaremos el siguiente resultado de cálculo que nos dice el número máximo de puntos de retorno que la gráfica de un polinomio puede tener.

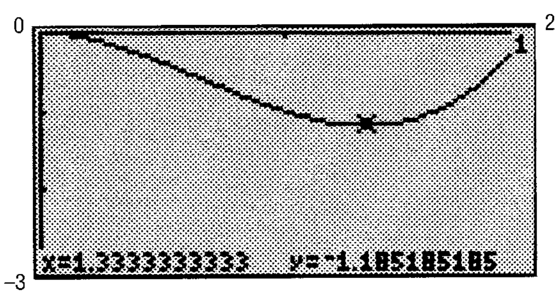
Teorema

Si f es una función polinomial de grado n, entonces tiene cuando mucho $n - 1$ puntos de retorno.

Por ejemplo, la gráfica de $f(x) = x^2(x - 2)$ mostrada en la figura 24(b), es la gráfica de un polinomio de grado 3 y tiene $3 - 1 = 2$ puntos de retorno: uno en (0, 0) y el otro en algún punto del intervalo $0 < x < 2$.

Exploración: Un dispositivo de graficación puede ser utilizado para localizar los puntos de retorno de una gráfica. Hacer la gráfica de $y = x^2(x - 2)$. Utilizar TRACE para aproximar la localización del punto de retorno en el intervalo $0 < x < 2$. *Véase* la figura 25.

FIGURA 25



Una última observación acerca de la figura 24(b): observe que la gráfica de $f(x) = x^2(x - 2)$ se parece un poco a la de $y = x^3$. En efecto, para valores grandes de x, ya sean positivos o negativos, hay poca diferencia. Para que usted los vea, utilice su calculadora para comparar los valores de $f(x) = x^2(x - 2)$ y $y = x^3$ para $x = -100{,}000$ y $x = 100{,}000$.

Teorema Para valores grandes de x, ya sean positivos o negativos, la gráfica del polinomio

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

se parece a la gráfica de la función potencia

$$y = a_n x^n$$

El siguiente recuadro resume algunas características de la gráfica de una función polinomial.

Resumen: Gráfica de una función polinomial $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$

Grado del polinomio f: n
Número máximo de puntos de retorno: $n - 1$
En un cero de multiplicidad par: la gráfica de f toca al eje x
En un cero de multiplicidad impar: la gráfica de f cruza al eje x
Entre ceros consecutivos, la gráfica de f está por arriba o por debajo del eje x.
Para valores grandes de x, la gráfica de f se comporta como la gráfica de $y = a_n x^n$.

EJEMPLO 6 *Análisis de la gráfica de una función polinomial*

Para el polinomio: $f(x) = x^3 + x^2 - 12x$

(a) Encontrar las intersecciones-x y las intersecciones-y de la gráfica de f.
(b) Determinar si la gráfica cruza o toca al eje x en cada una de sus intersecciones.
(c) Encontrar la función potencia a la que la gráfica de f se parece para valores grandes de x.
(d) Determine el número máximo de puntos de retorno en la gráfica de f.
(e) Utilice las intersecciones-x y números de prueba para encontrar los intervalos donde la gráfica de f está por arriba del eje x y los intervalos donde la gráfica está por debajo del eje x.
(f) Poner toda la información junta y conectar los puntos por medio de una curva suave y continua para obtener la gráfica de f.

Solución (a) La intersección-y es $f(0) = 0$. Para determinar las intersecciones-x, si las hay, factorizamos f:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 12x = x(x^2 + x - 12) = x(x + 4)(x - 3)$$

Resolviendo la ecuación $f(x) = x(x + 4)(x - 3) = 0$, encontramos que las intersecciones-x, o ceros de f, son -4, 0, y 3.

(b) Ya que cada cero de f es de multiplicidad 1, la gráfica de f cruza al eje x en cada intersección-x.

(c) La gráfica de f se parece a la de la función potencia $y = x^3$ para valores grandes de x.

(d) La gráfica de f tendrá como máximo dos puntos de retorno.

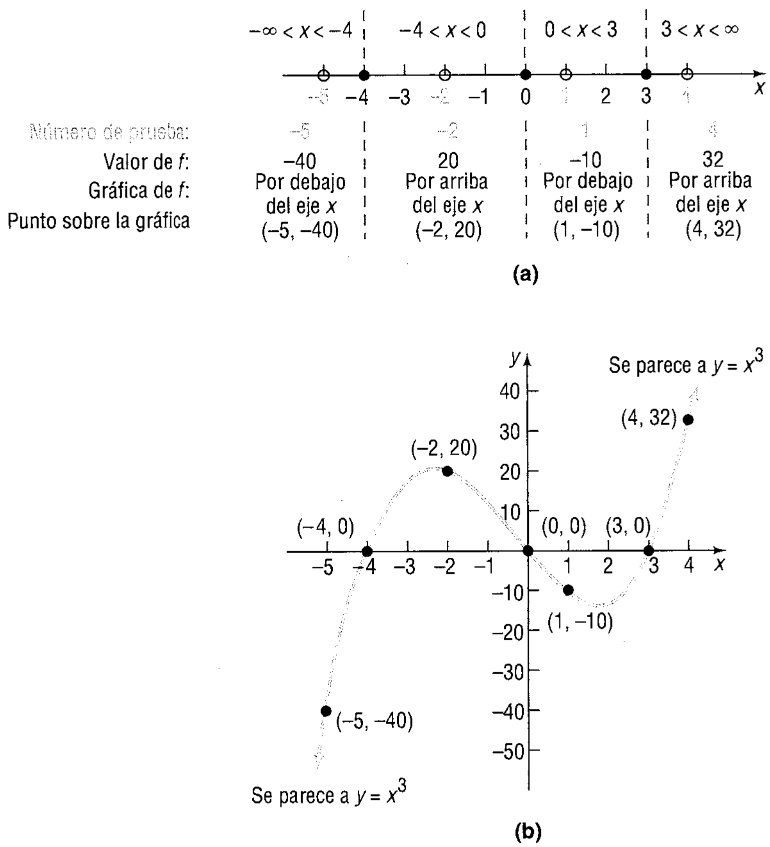
(e) Las tres intersecciones-x lo dividen en cuatro intervalos:

$$-\infty < x < -4 \qquad -4 < x < 0 \qquad 0 < x < 3 \qquad 3 < x < \infty$$

Para determinar el signo de $f(x)$ en cada intervalo, seleccionamos números de prueba y construimos la figura 26(a).

(f) La gráfica de f está dada en la figura 26(b).

FIGURA 26
$f(x) = x^3 + x^2 - 12x$



Verificación: Hacer la gráfica de $y = x^3 + x^2 - 12x$. Compararla con la que aparece en la figura 26. Utilizar TRACE para localizar los dos puntos de retorno.

EJEMPLO 7 *Análisis de la gráfica de una función polinomial*

Seguir las instrucciones del ejemplo 6 para el polinomio siguiente:

$$f(x) = x^2(x - 4)(x + 1)$$

Solución (a) La intersección-y es $f(0) = 0$. Las intersecciones-x satisfacen la ecuación

$$f(x) = x^2(x - 4)(x + 1) = 0$$

De modo que

$$x^2 = 0 \quad \text{o} \quad x - 4 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0$$
$$x = 0 \qquad\qquad x = 4 \qquad\qquad x = -1$$

Las intersecciones-x son -1, 0 y 4.

(b) La intersección 0 es un cero de multiplicidad 2, de modo que la gráfica de f tocará al eje x en 0; 4 y -1 son ceros de multiplicidad 1, de modo que la gráfica de f cruzará al eje x en 4 y -1.

(c) La gráfica de f se parece a la función potencia $y = x^4$ para valores grandes de x.

(d) La gráfica de f tendrá cuando mucho tres puntos de retorno.

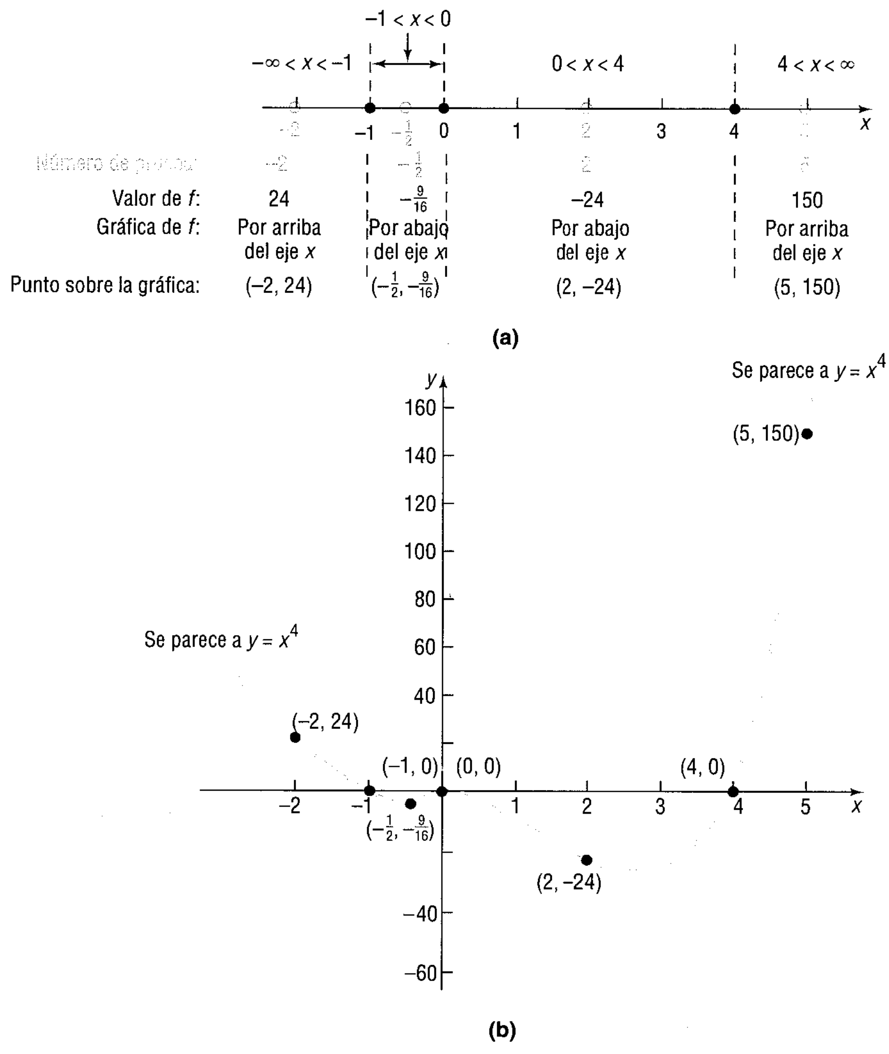
(e) Las tres intersecciones-x dividen al eje x en cuatro intervalos:

$$-\infty < x < -1 \qquad -1 < x < 0 \qquad 0 < x < 4 \qquad 4 < x < \infty$$

Para determinar el signo de $f(x)$ en cada intervalo, seleccionamos números de prueba y construimos la figura 27(a).

(f) La gráfica de f está dada en la figura 27(b)

FIGURA 27
$f(x) = x^2(x - 4)(x + 1)$



Verificación: Hacer la gráfica de $y = x^2\,(x - 4)(x + 1)$. Compararla con la que aparece en la figura 27. Utilizar TRACE para localizar los dos puntos de retorno además del (0, 0).

Ahora resuelva el problema 37.

EJEMPLO 4 Uso de un dispositivo de graficación para hacer la gráfica de una función polinomial

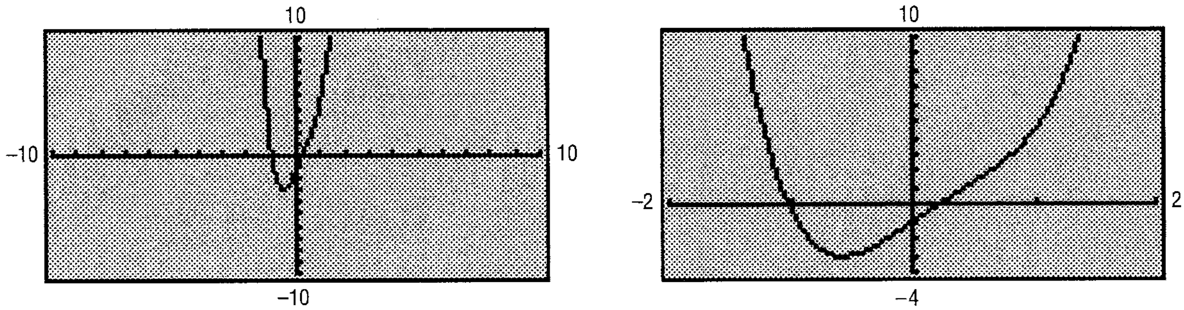
Hacer la gráfica: $f(x) = \pi x^4 - \sqrt{7}x^3 + 5x - 1$

Solución Empecemos haciendo las observaciones siguientes:

1. La intersección-y es $f(0) = -1$
2. La gráfica se comportará como $y = x^4$ para valores grandes de x.
3. La gráfica no tendrá más de cuatro intersecciones-x ni más de tres puntos de retorno.

Estas observaciones nos ayudan para establecer la pantalla en nuestro primer intento de dibujar la gráfica completa. *Véase* la figura 28(a). La figura 28(b) muestra la gráfica completa.

FIGURA 28



Utilizando TRACE, encontramos que las intersecciones-x, redondeadas a dos decimales, son -1.01 y 0.20. (Consulte el apéndice B, sección B.5, *Aproximaciones.*) El único punto de retorno se encuentra en $(-0.57, -3.02)$, redondeado a dos decimales.

Resumen

Para bosquejar la gráfica de una función polinomial $y = f(x)$, se deben seguir los siguientes:

Pasos para hacer la gráfica de un polinomio

PASO 1: (a) Encontrar las intersecciones-x, si las hay, resolviendo la ecuación $f(x) = 0$.
(b) Encontrar las intersecciones-y haciendo $x = 0$ y calculando el valor de $f(0)$.

PASO 2: Determinar si la gráfica de f cruza o toca al eje x en cada intersección-x.

PASO 3: Encontrar la función potencia a la que la gráfica de f se parece para valores grandes de x.

PASO 4: Determinar el número máximo de puntos de retorno en la gráfica de f.

PASO 5: Utilizar las intersecciones-x y números de prueba para encontrar los intervalos donde la gráfica de f está por arriba del eje x y los intervalos donde la gráfica está por debajo del eje x.

PASO 6: Trazar los puntos obtenidos en los pasos 1 y 5, y utilizar la información restante para conectarlos mediante una curva suave y continua.

Ejercicio 3.2

En los problemas del 1 al 10 determine cuáles funciones son polinomiales. Para las que lo sean indique el grado y para las que no, diga por qué no lo son.

1. $f(x) = 4x + x^3$

2. $f(x) = 5x^2 + 4x^4$

3. $g(x) = \dfrac{1 - x^2}{2}$

4. $h(x) = 3 - \dfrac{1}{2}x$

5. $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$

6. $f(x) = x(x - 1)$

7. $g(x) = x^{3/2} - x^2 + 2$

8. $h(x) = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)$

9. $F(x) = 5x^4 - \pi x^3 + \dfrac{1}{2}$

10. $F(x) = \dfrac{x^2 - 5}{x^3}$

En los problemas del 11 al 18 utilice la gráfica de $y = x^4$ para hacer la gráfica de cada función.

11. $f(x) = (x+1)^4$
12. $f(x) = x^4 + 2$
13. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$
14. $f(x) = -x^4$
15. $f(x) = 2(x+1)^4 + 1$
16. $f(x) = 3 - (x+2)^4$
17. $f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^4 - 1$
18. $f(x) = 1 - 2(x+1)^4$

En los problemas del 19 al 28, para cada función polinomial enliste cada cero real y su multiplicidad. Determine si la gráfica cruza o toca al eje x en cada intersección-x.

19. $f(x) = 3(x-7)(x+3)^2$
20. $f(x) = 4(x+4)(x+3)^3$
21. $f(x) = 4(x^2+1)(x-2)^3$
22. $f(x) = 2(x-3)(x+4)^3$
23. $f(x) = -2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2(x^2+4)^2$
24. $f(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2(x-1)^3$
25. $f(x) = (x-5)^3(x+4)^2$
26. $f(x) = (x+\sqrt{3})^2(x-2)^4$
27. $f(x) = 3(x^2+8)(x^2+9)^2$
28. $f(x) = -2(x^2+3)^3$

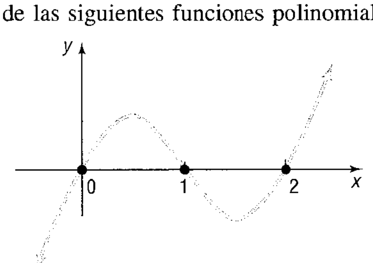
En los problemas del 29 al 50, para cada función polinomial f:

(*a*) *Encuentre las intersecciones-x y las intersecciones-*y *de f.*
(*b*) *Determine si la gráfica de f cruza o toca el eje x en cada intersección-x.*
(*c*) *Encuentre la función potencia a la que la gráfica de f se parece para valores grandes de x.*
(*d*) *Determine el número máximo de puntos de retorno en la gráfica de f.*
(*e*) *Utilice las intersecciones-x y números de prueba para encontrar los intervalos donde la gráfica de f está por arriba del eje x y donde está por debajo del eje x.*
(*f*) *Trace los puntos obtenidos en las partes* (*a*) *y* (*e*), *y utilice la información restante para conectarlos por medio de una curva suave y continua.*

29. $f(x) = (x-1)^2$
30. $f(x) = (x-2)^3$
31. $f(x) = x^2(x-3)$
32. $f(x) = x(x+2)^2$
33. $f(x) = 6x^3(x+4)$
34. $f(x) = 5x(x-1)^3$
35. $f(x) = -4x^2(x+2)$
36. $f(x) = -\frac{1}{2}x^3(x+4)$
37. $f(x) = x(x-2)(x+4)$
38. $f(x) = x(x+4)(x-3)$
39. $f(x) = 4x - x^3$
40. $f(x) = x - x^3$
41. $f(x) = x^2(x-2)(x+2)$
42. $f(x) = x^2(x-3)(x+4)$
43. $f(x) = x^2(x-2)^2$
44. $f(x) = x^3(x-3)$
45. $f(x) = x^2(x-3)(x+1)$
46. $f(x) = x^2(x-3)(x-1)$
47. $f(x) = x(x+2)(x-4)(x-6)$
48. $f(x) = x(x-2)(x+2)(x+4)$
49. $f(x) = x^2(x-2)(x^2+3)$
50. $f(x) = x^2(x^2+1)(x+4)$

51. Consulte la ilustración. ¿Cuáles de las siguientes funciones polinomiales podría tener esta gráfica? (Puede ser posible más de una respuesta.)

(a) $y = -4x(x-1)(x-2)$
(b) $y = x^2(x-1)^2(x-2)$
(c) $y = 3x(x-1)(x-2)$
(d) $y = x(x-1)^2(x-2)^2$
(e) $y = x^3(x-1)(x-2)$
(f) $y = -x(1-x)(x-2)$



52. Consulte la ilustración. ¿Cuáles de las siguientes funciones polinomiales podría tener esta gráfica? (Puede ser posible más de una respuesta.)

(a) $y = 2x^3(x-1)(x-2)^2$

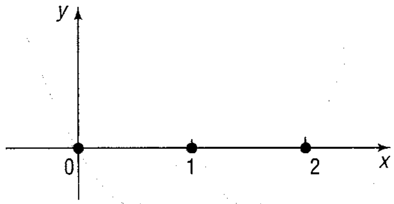
(b) $y = x^2(x-1)(x-2)$

(c) $y = x^3(x-1)^2(x-2)$

(d) $y = x^2(x-1)^2(x-2)^2$

(e) $y = 5x(x-1)^2(x-2)$

(f) $y = -2x(x-1)^2(2-x)$



53. Consulte la ilustración. ¿Cuáles de las siguientes funciones polinomiales podría tener esta gráfica? (Puede ser posible más de una respuesta.)

(a) $y = \frac{1}{2}(x^2-1)(x-2)$

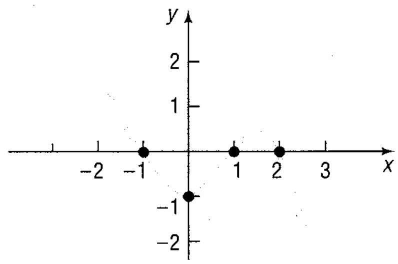
(b) $y = -\frac{1}{2}(x^2+1)(x-2)$

(c) $y = (x^2-1)\left(1-\frac{x}{2}\right)$

(d) $y = -\frac{1}{2}(x^2-1)^2(x-2)$

(e) $y = \left(x^2+\frac{1}{2}\right)(x^2-1)(2-x)$

(f) $y = -(x-1)(x-2)(x+1)$



54. Consulte la ilustración. ¿Cuáles de las siguientes funciones polinomiales podría tener esta gráfica? (Puede ser posible más de una respuesta.)

(a) $y = -\frac{1}{2}(x^2-1)(x-2)(x+1)$

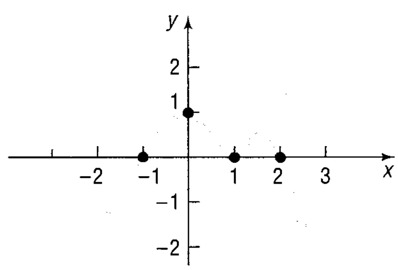
(b) $y = -\frac{1}{2}(x^2+1)(x-2)(x+1)$

(c) $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2(x-1)(x-2)$

(d) $y = (x-1)^2(x+1)\left(1-\frac{x}{2}\right)$

(e) $y = -(x-1)^2(x-2)(x+1)$

(f) $y = -\left(x^2+\frac{1}{2}\right)(x-1)^2(x+1)(x-2)$



En los problemas del 55 al 60 haga la gráfica de cada función polinomial. Aproxime las intersecciones-x, si las hay, y redondee los puntos de retorno a dos decimales.

55. $y = \pi x^3 + \sqrt{2}x^2 - x - 2$

56. $y = -2x^3 + \pi x^2 + \sqrt{3}x + 1$

57. $y = 2x^4 - \pi x^3 + \sqrt{5}x - 4$

58. $y = -1.2x^4 + 0.5x^2 - \sqrt{3}x + 2$

59. $y = -2x^5 - \sqrt{2}x^2 - x - \sqrt{2}$

60. $y = \pi x^5 + \pi x^4 + \sqrt{3}x + 1$

61. ¿La gráfica de un polinomio, puede no tener intersección-y? Explique su respuesta.

62. Escriba un párrafo breve que proporcione una estrategia general para hacer la gráfica de una función polinomial. Asegúrese de mencionar lo siguiente: grado, intersecciones con los ejes y puntos de retorno.

63. Construya un polinomio que tenga las características siguientes: que cruce el eje x en -1 y 4, toque al eje x en 0 y 2 y esté por arriba del eje x entre 0 y 2. Dé su polinomio a un compañero de clase y pídale que le haga una crítica.

64. Construya dos polinomios, que no sean del mismo grado, con las características siguientes: que crucen el eje x en -2, toquen al eje x en 1 y estén por arriba del eje x entre -2 y 1. Dé sus polinomios a un compañero de clase y pídale que le haga una crítica.

65. La gráfica de una función polinomial siempre es suave y continua. Mencione una función estudiada antes que sea suave pero no continua, y una función que sea continua pero no suave.

66. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos con respecto a la gráfica del polinomial $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$? (Dé una razón para sus conclusiones.)
   (a) Corta al eje y solamente en un punto.
   (b) Corta al eje x en un máximo de tres puntos.
   (c) Corta al eje x al menos una vez.
   (d) Para valores grandes de x, se comporta como la gráfica de $y = x^3$.
   (e) Es simétrica con respecto al origen.
   (f) Contiene al origen.

Funciones racionales

Los cocientes de números enteros son llamados *números racionales.* De manera semejante, cocientes de funciones polinomiales son llamados *funciones racionales.*

Funciones racionales

Una **función racional** es una función de la forma

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

donde p y q son funciones polinomiales y q no es el polinomio cero. El dominio de una función racional está constituido por todos los números reales excepto aquellos donde el denominado q sea cero.

EJEMPLO 1 Determinación del dominio de una función racional

(a) El dominio de $R(x) = \dfrac{2x^2 - 4}{x + 5}$ consiste de todos los números reales x excepto -5.

(b) El dominio de $R(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ consiste de todos los números reales x excepto -2 y 2.

(c) El dominio de $R(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$ consiste de todos los números reales.

(d) El dominio de $R(x) = \dfrac{-x^2 + 2}{3}$ consiste de todos los números reales x excepto 1.

(e) El dominio de $R(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ consiste de todos los números reales x excepto 1.

Es importante observar que las funciones

$$R(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad \text{y} \quad f(x) = x + 1$$

no son iguales, ya que el dominio de R es $\{x | x \neq 1\}$ y el dominio de f son todos los números reales.

Ahora resuelva el problema 3.

Si $R(x) = p(x)/q(x)$ es una función racional y p y q no tienen factores comunes, entonces se dice que la función racional R está en su **mínima expresión.** Se considerará a lo largo de esta sección que todas las funciones racionales están en su mínima expresión.

Para una función racional $R(x) = p(x)/q(x)$ que esté en su mínima expresión, los ceros, si los hay, del numerador son las intersecciones-x de la gráfica de R y así jugarán un papel importante en la graficación de R. Los ceros del denominador de R [esto es, los números x, si los hay, para los cuales $q(x) = 0$], aunque no están en el dominio de R, también juegan un papel importante en su gráfica. En breve analizaremos ese papel.

Ya hemos estudiado las características de la función racional $f(x) = 1/x$. La siguiente función racional que nos ocupa es $H(x) = 1/x^2$.

EJEMPLO 2 *Graficación de $y = \dfrac{1}{x^2}$*

Hacer la gráfica: $H(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Solución El dominio de $H(x) = 1/x^2$ consiste de todos los números reales x excepto el cero. Por tanto, la gráfica no tiene intersección-y, ya que x nunca puede ser igual a cero. La gráfica no tiene intersección-x, ya que la ecuación $H(x) = 0$ no tiene solución. Por lo tanto, la gráfica de H no cruzará a los ejes de coordenadas. Puesto que

$$H(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2} = H(x)$$

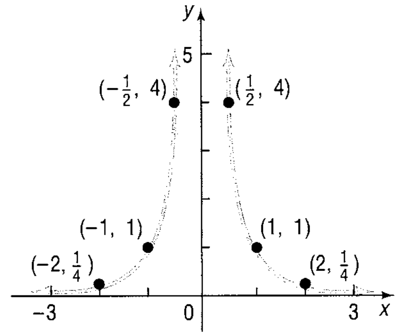
TABLA 3

x	$H(x) = 1/x^2$
$\frac{1}{100}$	10,000
$\frac{1}{10}$	100
$\frac{1}{2}$	4
1	1
2	$\frac{1}{4}$
10	$\frac{1}{100}$
100	$\frac{1}{10,000}$

H es una función par, de modo que su gráfica es simétrica con respecto al eje y. La tabla 3 muestra el comportamiento $H(x) = 1/x^2$ para números positivos x seleccionados (usaremos la simetría para obtener la gráfica de H cuando $x < 0$). En la tabla 3, observamos que, conforme los valores de x se aproximan (se acercan) a cero, los valores de $H(x)$ se incrementan cada vez más en sentido positivo. Cuando esto pasa decimos que H **no está acotada en la dirección positiva,** lo cual simbolizamos escribiendo $H \to \infty$ (se lee "H **tiende a infinito**"). En cálculo, el término **límite** es el utilizado para transmitir estos conceptos. Allí usamos los símbolos $\lim_{x \to 0} H(x) = \infty$, [se lee "el límite de $H(x)$ cuando x tiende a cero es igual a infinito"], para establecer que $H(x) \to \infty$ cuando $x \to 0$. Observe otra vez la tabla 3. Cuando $x \to \infty$, los valores de $H(x)$ se acercan a cero 0. En cálculo, esto es simbolizado $\lim_{x \to \infty} H = 0$. La figura 29 ilustra la gráfica.

Algunas veces las técnicas de desplazamiento, compresión, alargamiento y reflexión pueden ser utilizadas para hacer la gráfica de una función racional.

FIGURA 29
$H(x) = \frac{1}{x^2}$

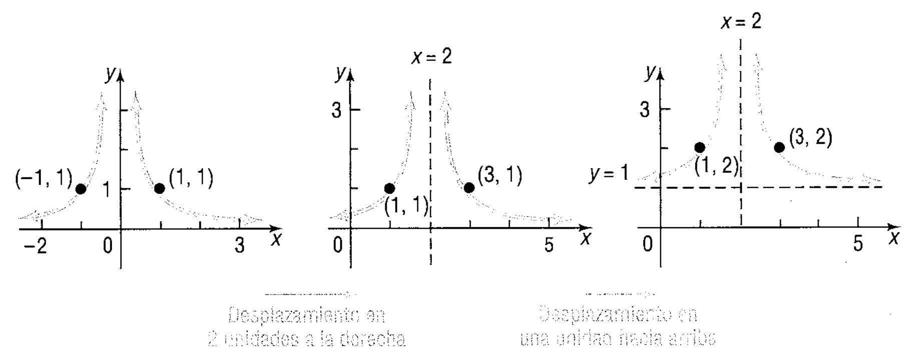


EJEMPLO 3 *Uso de desplazamientos, reflexiones y similaridad, para hacer la gráfica de una función*

Hacer la gráfica de la función racional: $R(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2} + 1$

Solución Primero, observamos que el dominio de R consiste de todos los números reales exceptuando a $x = 2$. Para hacer la gráfica de R, iniciamos con la gráfica de $y = 1/x^2$. Para conocer los pasos a seguir *véase* la figura 30.

FIGURA 30



(a) $y = \frac{1}{x^2}$ (b) $y = \frac{1}{(x-2)^2}$ (c) $y = \frac{1}{(x-2)^2} + 1$

Ahora resuelva el problema 19.

Asíntotas

En la figura 30(c), note que conforme x se vuelve "más" negativa, esto es, cuando se hace **no acotada en la dirección negativa** ($x \to -\infty$, se lee "x **tiende a menos infinito**"), los valores de $R(x)$ tienden a 1. En realidad, podemos concluir lo siguiente de la figura 30(c):

1. Cuando $x \to -\infty$, los valores de $R(x)$ tienden a 1. $[\lim_{x \to -\infty} R(x) = 1]$
2. Cuando x tiende a 2, los valores de $R(x) \to \infty$. $[\lim_{x \to 2} R(x) = \infty]$
3. Cuando $x \to \infty$, los valores de $R(x)$ tienden a 1. $[\lim_{x \to \infty} R(x) = 1]$

Este comportamiento de la gráfica está descrito por la recta vertical $x = 2$ y la recta horizontal $y = 1$. Estas rectas son llamadas *asíntotas* de la gráfica, lo cual definimos como sigue:

Sea R una función:

Asíntota horizontal

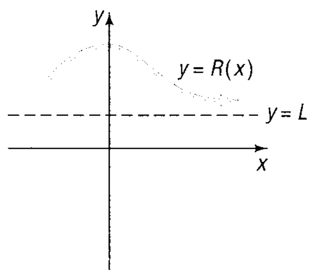
Si, cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to \infty$, los valores de $R(x)$ tienden a algún número fijo L, entonces la recta $y = L$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de R.

Asíntota vertical

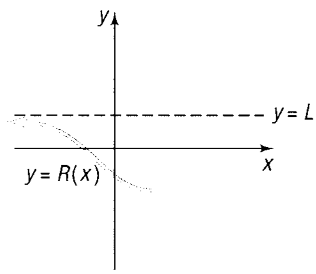
Si, cuando x se aproxima a algún número c, los valores $|R(x)| \to \infty$, entonces la recta $x = c$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de R.

Aunque las asíntotas de una función no son parte de su gráfica, proporcionan información acerca de la manera como se ve la gráfica. La figura 31 ilustra algunas posibilidades.

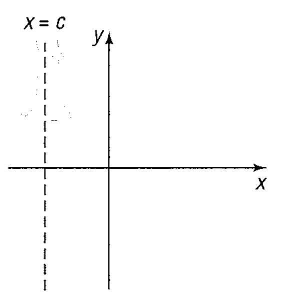
FIGURA 31



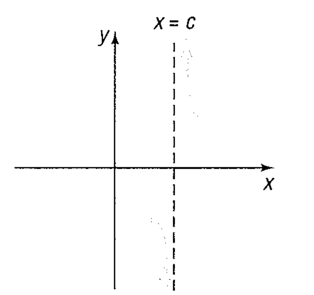
(a) Cuando $x \to \infty$,los valores de $R(x)$ se aproximan a L. Esto es, Los puntos sobre la gráfica de R están cada vez más cercanos a la recta $y = L$; $y = L$ es una asíntota horizontal.



(b) Cuando $x \to \infty$,los valores de $R(x)$ se aproximan a L. Esto es, Los puntos sobre la gráfica de R están cada vez más cercanos a la recta $y = L$; $y = L$ es una asíntota horizontal.



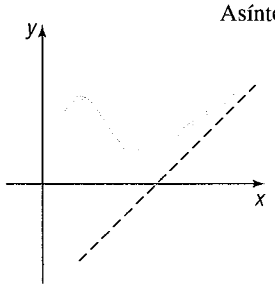
(c) Cuando x se aproxima a c, los valores de $|R(x)| \to \infty$, Esto es, los puntos sobre la gráfica de R están cada vez más cercanos a la recta $x = c$; $x = c$ es una asíntota vertical.



(d) Cuando x se aproxima a c, los valores de $|R(x)| \to \infty$, Esto es, los puntos sobre la gráfica de R están cada vez más cercanos a la recta $x = c$; $x = c$ es una asíntota vertical.

Así, una asíntota es una recta que se acerca cada vez más a cierta parte de la gráfica de una función pero nunca la toca. Sin embargo, otras partes de la gráfica de la función pueden cortar a una asíntota no vertical. La gráfica de la función nunca cortará a una asíntota vertical. Observe que una asíntota horizontal, cuando aparece, describe cierto comportamiento de la gráfica cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$, mientras una asíntota vertical, cuando aparece, describe cierto comportamiento de la gráfica cuando x se aproxima a algún número c.

FIGURA 32
Asíntota oblicua



Si una asíntota no es horizontal ni vertical, es llamada **oblicua.** La figura 32 muestra una asíntota oblicua.

Cómo encontrar asíntotas

Las asíntotas verticales, si las hay, de una función racional $R(x) = p(x)/q(x)$ se encuentran al factorizar el denominador $q(x)$. Suponga que $x - r$ es un factor del denominador. Ahora, cuando x se aproxima a r, simbolizado como $x \to r$, los valores de $x - r$ se aproximan a cero, provocando que el cociente se vuelva no acotado, esto es, causando que $|R(x)| \to \infty$. Con base en la definición, concluimos que la recta $x = r$ es una asíntota vertical.

Teorema de localización de asíntotas verticales

Una función racional $R(x) = p(x)/q(x)$ que se encuentre en su mínima expresión tendrá una asíntota vertical $x = r$ si $x - r$ es un factor del denominador q.

Por tanto, si r es un cero del denominador de una función racional $R(x) = p(x)/q(x)$ que está en su mínima expresión, entonces R tendrá la asíntota vertical $x = r$.

Advertencia: Si una función racional no está en su mínima expresión, una aplicación de este teorema puede resultar en un listado incorrecto de asíntotas horizontales.

EJEMPLO 4 *Determinación de asíntotas verticales*

Encontrar las asíntotas verticales, si las hay, de la gráfica de cada función racional.

(a) $R(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ (b) $F(x) = \dfrac{x + 3}{x - 1}$ (c) $H(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

Solución

(a) Los ceros del denominador $x^2 - 4$ son -2 y 2. En consecuencia, las rectas $x = -2$ y $x = 2$ son las asíntotas verticales de la gráfica de R.
(b) El único cero del denominador es 1. Por lo tanto, la recta $x = 1$ es la única asíntota vertical de la gráfica de F.
(c) El denominador no tiene ceros. De modo que la gráfica de H no tiene asíntotas verticales.

Como el ejemplo 4 lo señala, las funciones racionales pueden carecer de asíntotas verticales pero también pueden tener una o más de una asíntota vertical. Sin embargo, la gráfica de una función racional nunca cortará a ninguna de sus asíntotas verticales. (¿Advierte por qué?)

Exploración: Hacer la gráfica de las siguientes funciones racionales:

$$y = \frac{1}{x - 1} \qquad y = \frac{x}{x - 1} \qquad y = \frac{x^2}{x - 1} \qquad y = \frac{x^3}{x - 1}$$

Cada una tiene una asíntota vertical $x = 1$. Utilice TRACE para ver lo que sucede cuando x se aproxima a 1. Asegúrese de ver en ambos lados de $x = 1$.

El procedimiento para encontrar asíntotas horizontales y oblicuas es más complicado pues necesitamos conocer cómo se comportan los valores de una función cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to \infty$.

Si una función racional $R(x)$ es **propia,** esto es, si el grado del numerador es menor que el grado del denominador, entonces, cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to \infty$, los valores de $R(x)$ se aproximan a cero. En consecuencia, la recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de la gráfica.

Teorema Si una función racional es propia, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de su gráfica.

EJEMPLO 5 *Determinación de asíntotas horizontales*

Encontrar las asíntotas horizontales, si las hay, de la gráfica de

$$R(x) = \frac{x - 12}{4x^2 + x + 1}$$

Solución La función racional R es propia, ya que el grado del numerador (1) es menor que el del denominador (2). Concluimos que la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de la gráfica de R.

Para ver por qué $y = 0$ es una asíntota horizontal de la función R en el ejemplo 5, necesitamos investigar el comportamiento de R cuando x no está acotada. Cuando x no está acotada, el numerador de R, que es $x - 12$, puede ser aproximado por la función potencia $y = x$, mientras que el denominador de R, que es $4x^2 + x + 1$, puede ser aproximado por la función potencia $y = 4x^2$.

Por tanto,

$$R(x) = \frac{x - 12}{4x^2 + x + 1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Para } x \text{ no acotada}}}{\approx} \frac{x}{4x^2} = \frac{1}{4x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cuando } x \to -\infty \text{ o } x \to \infty}}{\longrightarrow} 0$$

Esto demuestra que la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de la gráfica de R.

Si una función racional $R(x)$ es **impropia,** esto es, si el grado del numerador es mayor o igual al grado del denominador, debemos utilizar la división larga para escribir la función racional como la suma de un polinomio $f(x)$ más una función racional propia $r(x)$. Esto es, escribimos

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = f(x) + r(x)$$

donde $f(x)$ es un polinomio y $r(x)$ una función racional propia. Ya que $r(x)$ es propia, entonces $r(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to \infty$. Por tanto,

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \to f(x) \qquad \text{cuando} \qquad x \to -\infty \text{ o cuando } x \to \infty$$

A continuación se enlistan las posibilidades:

1. Si $f(x) = b$, una constante, entonces la recta $y = b$ es una asíntota horizontal de la gráfica de R.
2. Si $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, entonces la recta $y = ax + b$ es una asíntota oblicua de la gráfica de R.
3. En todos los demás casos, la gráfica de R se aproxima a la gráfica de f y no hay asíntotas horizontal u oblicua.

Los ejemplos siguientes demuestran estas conclusiones.

EJEMPLO 6 *Determinación de asíntotas horizontales u oblicuas*

Encontrar las asíntotas horizontales u oblicuas, si las hay, de la gráfica de

$$H(x) = \frac{3x^4 - x^2}{x^3 - x^2 + 1}$$

Solución La función racional H es impropia, ya que el grado del numerador (4) es mayor que el del denominador (3). Para encontrar cualquier asíntota horizontal o vertical utilizamos la división larga:

$$
\begin{array}{r l}
 & 3x + 3 \\
x^3 - x^2 + 1 \,\big) & \overline{3x^4 \qquad\quad - x^2} \\
 & \underline{3x^4 - 3x^3 \qquad + 3x} \\
 & \qquad 3x^3 - x^2 - 3x \\
 & \qquad \underline{3x^3 - 3x^2 \qquad + 3} \\
 & \qquad\qquad 2x^2 - 3x - 3
\end{array}
$$

Por tanto,

$$H(x) = \frac{3x^4 - x^2}{x^3 - x^2 + 1} = 3x + 3 + \frac{2x^2 - 3x - 3}{x^3 - x^2 + 1}$$

Entonces, cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to \infty$, el denominador se comporta como sigue:

$$\frac{2x^2 - 3x - 3}{x^3 - x^3 + 1} \approx \frac{2x^2}{x^3} = \frac{2}{x} \to 0$$

Por tanto, cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to \infty$, tenemos $H(x) \to 3x + 3$. Concluimos que la gráfica de la función racional H tiene una asíntota oblicua $y = 3x + 3$.

EJEMPLO 7 *Determinación de asíntotas horizontales u oblicuas*

Encontrar las asíntotas horizontales u oblicuas, si las hay, de la gráfica de

$$R(x) = \frac{8x^2 - x + 2}{4x^2 - 1}$$

Solución La función racional R es impropia, ya que el grado del numerador (2) es igual al del denominador (2). Para encontrar cualquier asíntota horizontal u oblicua utilizamos la división larga:

$$
\begin{array}{r l}
 & 2 \\
4x^2 - 1 \,\big) & \overline{8x^2 - x + 2} \\
 & \underline{8x^2 \qquad - 2} \\
 & \qquad -x + 4
\end{array}
$$

Por tanto,

$$R(x) = \frac{8x^2 - x + 2}{4x^2 - 1} = 2 + \frac{-x + 4}{4x^2 - 1}$$

Entonces, cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to \infty$, el residuo se comporta como sigue:

$$\frac{-x + 4}{4x^2 - 1} \approx \frac{-x}{4x^2} = \frac{-1}{4x} \to 0$$

Por tanto, cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to \infty$, tenemos $R(x) \to 2$. Concluimos que $y = 2$ es una asíntota horizontal de la gráfica.

En el ejemplo 7 observe que el cociente 2 obtenido mediante la división, es el cociente de los coeficientes principales del polinomio numerador y el polinomio denominador $\left(\frac{8}{4}\right)$. Esto significa que podemos evitar el proceso de división larga para funciones racionales cuyos numerador y denominador *sean del mismo grado*, y concluir que el cociente de los coeficientes principales nos dará la asíntota horizontal.

Ahora resuelva el problema 35.

EJEMPLO 8 Determinación de asíntotas horizontales u oblicuas

Encontrar las asíntotas horizontales u oblicuas, si las hay, de la gráfica de

$$G(x) = \frac{2x^5 - x^3 + 2}{x^3 - 1}$$

Solución La función racional G es impropia ya que el grado del numerador (5) es mayor que el del denominador (3). Para encontrar cualquier asíntota horizontal u oblicua usamos la división larga:

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2 - 1 \\ \hline x^3 - 1 & 2x^5 - x^3 \qquad\quad + 2 \\ & \underline{2x^5 \qquad - 2x^2} \\ & \quad -x^3 + 2x^2 + 2 \\ & \quad \underline{-x^3 \qquad\quad + 1} \\ & \qquad\qquad 2x^2 + 1 \end{array}$$

Por tanto,

$$G(x) = \frac{2x^5 - x^3 + 2}{x^3 - 1} = 2x^2 - 1 + \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 1}$$

Entonces, cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to \infty$, el residuo se comportará como sigue:

$$\frac{2x^2 + 1}{x^3 - 1} \approx \frac{2x^2}{x^3} = \frac{2}{x} \to 0$$

Por tanto, cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to \infty$, tenemos que $G(x) \to 2x^2 - 1$. Concluimos que, para valores grandes de x, la gráfica de G se aproxima a la gráfica de $y = 2x^2 - 1$.

A continuación resumimos el procedimiento para encontrar asíntotas horizontales y oblicuas.

Cómo encontrar asíntotas horizontales y oblicuas de una función racional R

Considere la función racional

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0}$$

en la que el grado del numerador es n y el del denominador es m.

1. Si R es una función racional propia ($n < m$), la gráfica tendrá la asíntota horizontal $y = 0$ (el eje x).
2. Si R es impropia ($n \geq m$), utilizar división larga.
   (a) Si $n = m$, el cociente obtenido será un número L ($= a_n/b_m$) y la recta $y = L$ ($= a_n/b_m$) es una asíntota horizontal.
   (b) Si $n = m + 1$, el cociente obtenido es de la forma $ax + b$ (un polinomio de grado 1), entonces la recta $y = ax + b$ es una asíntota oblicua.
   (c) Si $n > m + 1$, el cociente es un polinomio de grado 2 o mayor, entonces R no tiene asíntota horizontal ni oblicua. En este caso, para una x no acotada, la gráfica de R se comportará como la gráfica del cociente.

Observación: La gráfica de una función racional puede tener o no una asíntota horizontal o una oblicua.

Ahora ya estamos preparados para hacer la gráfica de funciones racionales.

Graficación de funciones racionales

Comentamos anteriormente que el cálculo proporciona las herramientas necesarias para hacer la gráfica de una función polinomial de manera precisa. Lo mismo es cierto para las funciones racionales. De cualquier modo, siempre podemos reunir información suficiente de sus gráficas como para tener una idea de la forma general y posición de la gráfica.

En los ejemplos que siguen, analizaremos la gráfica de una función racional $R(x) = p(x)/q(x)$ aplicando los siguientes:

Pasos para la graficación de una función racional

PASO 1: Localizar las intersecciones, si las hay, de la gráfica. Las intersecciones-x de $R(x) = p(x)/q(x)$ satisfacen la ecuación $p(x) = 0$. La intersección-y, si existe, es $R(0)$.

PASO 2: Verificar la simetría. Reemplazar x por $-x$ en $R(x)$. Si $R(-x) = R(x)$, hay simetría con respecto al eje; Si $R(-x) = -R(x)$, hay simetría con respecto al origen.

PASO 3: Localizar las asíntotas verticales, si las hay, factorizando el denominador $q(x)$ de $R(x)$ e identificando sus ceros.

PASO 4: Localizar las asíntotas horizontal u oblicua, si las hay, usando el procedimiento dado anteriormente. Determine puntos, si los hay, en los cuales la gráfica de R corta a estas asíntotas.

PASO 5: Determinar en dónde la gráfica está por arriba del eje x y en dónde por debajo del eje x.

PASO 6: Hacer la gráfica de las asíntotas, si las hay, encontradas en los pasos 3 y 4. Marcar los puntos encontrados en los pasos 1, 4 y 5. Utilizar toda la información para conectar los puntos por medio de una curva suave.

Análisis de la gráfica de una función racional

Analizar la gráfica de la función racional: $R(x) = \dfrac{x-1}{x^2-4}$

Solución: Primero, factorizamos tanto el numerador como el denominador de R:

$$R(x) = \frac{x-1}{(x+2)(x-2)}$$

PASO 1: Localizamos las intersecciones-x encontrando los ceros del numerador. Por inspección, 1 es la única intersección-x. La intersección-y es $R(0) = \frac{1}{4}$.

PASO 2: Ya que

$$R(-x) = \frac{-x-1}{x^2-4}$$

concluimos que R no es par ni impar. Por tanto, no hay simetría con respecto al eje y ni con respecto al origen.

PASO 3: Localizamos las asíntotas verticales factorizando el denominador: $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$. Por tanto, la gráfica de R tiene dos asíntotas verticales: las rectas $x = -2$ y $x = 2$.

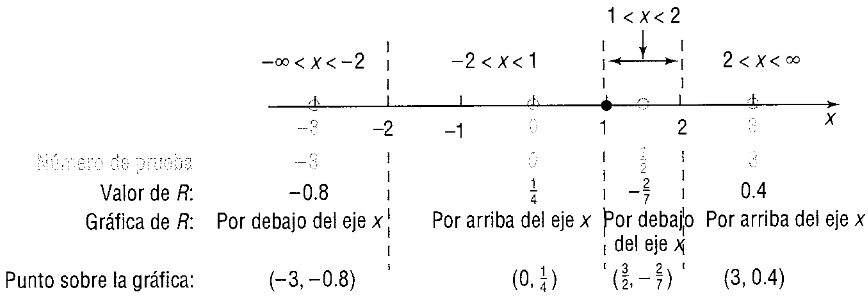
PASO 4: El grado del numerador es menor que el del denominador, de modo que R es propia y la recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de la gráfica. Para determinar si la gráfica de R corta a la asíntota horizontal, resolvemos la ecuación $R(x) = 0$. La única solución es $x = 1$, de modo que la gráfica de R corta a la asíntota horizontal en $(1, 0)$.

PASO 5: El cero del numerador, 1, y los ceros del denominador, -2 y 2, dividen al eje x en cuatro intervalos:

$$-\infty < x < -2 \qquad -2 < x < 1 \qquad 1 < x < 2 \qquad 2 < x < \infty$$

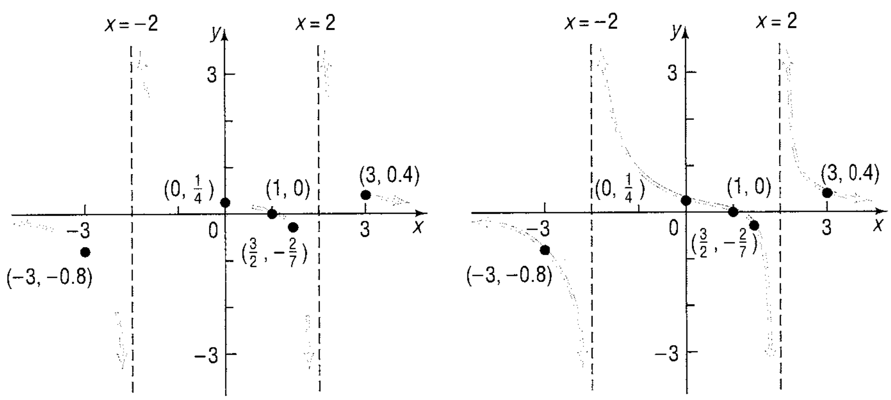
Ahora utilicemos la figura 33.

FIGURA 33



PASO 6: Empezamos trazando las asíntotas y marcando los puntos encontrados en los pasos 1, 4 y 5. *Véase* la figura 34(a). Luego, determinamos el comportamiento de la gráfica cerca de las asíntotas. Ya que el eje x es una asíntota horizontal y la gráfica está por debajo de él para $-\infty < x < -2$, podemos esbozar la parte de la gráfica colocando una flecha pequeña en la extrema izquierda y por debajo del eje x. Como la recta $x = -2$ es una asíntota vertical y la gráfica está por debajo del eje x para $-\infty < x < -2$, continuamos el bosquejo con una flecha en la parte inferior abajo del eje x y aproximándose por la izquierda a la recta $x = -2$. Explicaciones semejantes son válidas para las posiciones de otras partes de la gráfica. En particular, observe cómo utilizamos la información de que la gráfica está por arriba del eje x para $-2 < x < 1$, por debajo del eje x para $1 < x < 2$ y que $(1, 0)$ es una intersección-x para sacar en conclusión que la gráfica cruza el eje x en $(1, 0)$. La figura 34(b) muestra el bosquejo completo.

FIGURA 34
$R(x) = \dfrac{x-1}{x^2-4}$



(a) (b)

Verificación: Hacer la gráfica de $R(x) = (x - 1)/(x^2 - 4)$ y compararla con la que aparece en la figura 34(b).

Ahora resuelva el problema 37.

EJEMPLO 18 *Análisis de la gráfica de una función racional*

Analizar la gráfica de la función racional: $R(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

Solución PASO 1: La gráfica tiene dos intersecciones-x: -1 y 1. No hay intersección-y.

PASO 2: Ya que $R(-x) = -R(x)$, la función es impar y la gráfica es simétrica con respecto al origen.

PASO 3: La gráfica de $R(x)$ tiene a la recta $x = 0$ (el eje y) como una asíntota vertical.

PASO 4: La función racional R es impropia ya que el grado del numerador (2) es mayor que el del denominador (1). Para encontrar cualquier asíntota horizontal u oblicua utilizamos la división larga:

$$\begin{array}{r} x \\ x\overline{)x^2 - 1} \\ \underline{x^2 } \\ -1 \end{array}$$

El cociente es x, de modo que la recta $y = x$ es una asíntota oblicua de la gráfica. Para determinar si la gráfica de R corta a la asíntota $y = x$, resolvemos la ecuación $R(x) = x$:

$$\begin{aligned} R(x) = \frac{x^2 - 1}{x} &= x \\ x^2 - 1 &= x^2 \\ -1 &= 0 \quad \text{Imposible} \end{aligned}$$

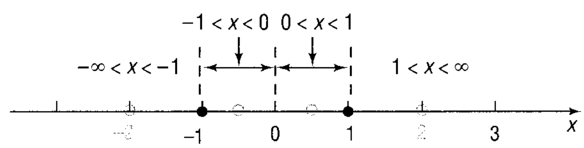
Concluimos que la ecuación $(x^2 - 1)/x = x$ no tiene solución, de modo que la gráfica de $R(x)$ no corta a la recta $y = x$.

PASO 5: Los ceros del numerador son -1 y 1; el denominador tiene como cero al número 0. Por tanto, dividimos el eje x en cuatro intervalos:

$$-\infty < x < -1 \qquad -1 < x < 0 \qquad 0 < x < 1 \qquad 1 < x < \infty$$

Ahora construimos la figura 35:

FIGURA 35

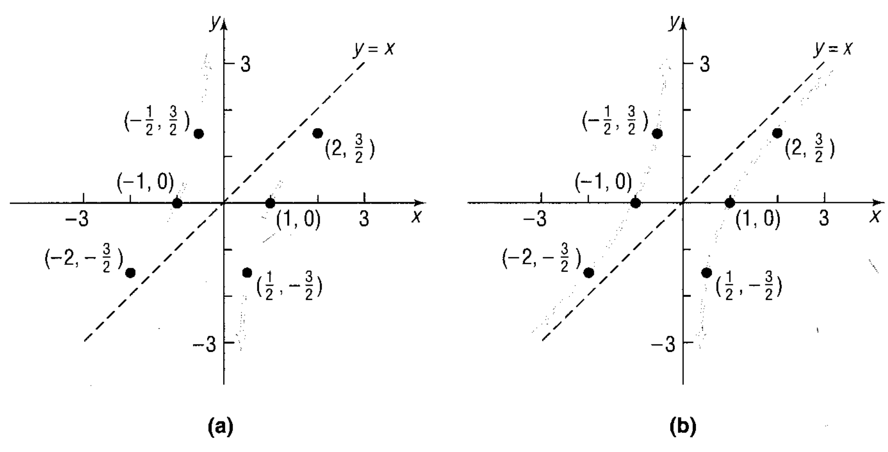


Valor de prueba:	-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
Valor de R:	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
Gráfica de R:	Por debajo del eje x	Por arriba del eje x	Por abajo del eje x	Por arriba del eje x
Punto sobre la gráfica:	$(-2, -\frac{3}{2})$	$(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$	$(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$	$(2, \frac{3}{2})$

PASO 6: La figura 36(a) muestra una gráfica parcial donde se utiliza la información que hemos reunido. La gráfica completa está dada en la figura 36(b).

FIGURA 36

$R(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$



Verificación: Hacer la gráfica $R(x) = (x^2 - 1)/x$ y compararla con la que aparece en la figura 36. ¿Podría predecirse que $y = x$ es una asíntota oblicua? Hacer la gráfica de $y = x$ y utilizar ZOOM-OUT. ¿Qué se observa?

Ahora resuelva el problema 45.

Análisis de la gráfica de una función racional

Analizar la gráfica de la función racional: $R(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^2}$

Solución

PASO 1: La gráfica no tiene intersección-x ni intersección-y.

PASO 2: Ya que $R(-x) = R(x)$, la función es par y la gráfica es simétrica con respecto al eje y.

PASO 3: La gráfica de $R(x)$ tiene a la recta $x = 0$ (el eje y) como una asíntota vertical.

PASO 4: La función racional R es impropia. Para encontrar cualquier asíntota horizontal u oblicua utilizamos la división larga:

$$\begin{array}{r} x^2 \\ x^2\overline{)\,x^4 + 1} \\ \underline{x^4 } \\ 1 \end{array}$$

El cociente de x^2, de modo que la gráfica no tiene asíntotas horizontales ni verticales. Sin embargo, la gráfica de R se aproximará a la gráfica de $y = x^2$ cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to \infty$.

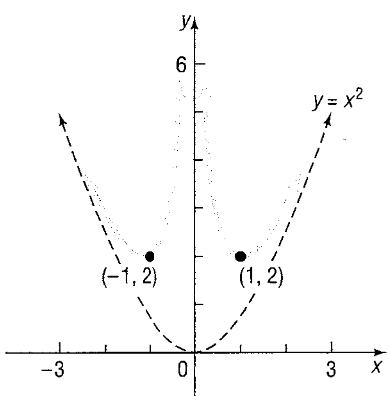
PASO 5: El numerador no tiene ceros, y el denominador tiene un solo cero en 0. Por tanto, dividimos el eje x en los siguientes dos intervalos: $-\infty < x < 0$ y $0 < x < \infty$. Luego construimos la figura 37:

FIGURA 37

	$-\infty < x < 0$	$0 < x < \infty$
Número de prueba:	−1	1
Valor de R:	2	2
Gráfica de R:	Por arriba del eje x	Por arriba del eje x
Punto sobre la gráfica:	(−1, 2)	(1, 2)

PASO 6: La figura 38 muestra la gráfica.

FIGURA 38
$R(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^2}$



Verificación: Hacer la gráfica de $R(x) = (x^4 + 1)/x^2$ y compararla con la que aparece en la figura 38. Utilizar TRACE para encontrar los dos puntos de retorno. Introducir $y = x^2$ y aplicar ZOOM-OUT. ¿Qué se ve?

Ahora resuelva el problema 43.

EJEMPLO 12 *Análisis de la gráfica de una función racional*

Analizar la gráfica de la función racional: $R(x) = \dfrac{3x^2 - 3x}{x^2 + x - 12}$

Solución Factorizamos R para obtener

$$R(x) = \frac{3x(x-1)}{(x+4)(x-3)}$$

PASO 1: La gráfica tiene dos intersecciones-x: 0 y 1. La intersección-y es $R(0) = 0$.

PASO 2: No hay simetría con respecto al eje y ni con respecto al origen.

PASO 3: La gráfica de R tiene dos asíntotas verticales: $x = -4$ y $x = 3$.

PASO 4: Ya que el grado del numerador es igual al del denominador, la gráfica tiene una asíntota horizontal. Para encontrarla, formamos el cociente del coeficiente principal del numerador (3) y el coeficiente principal del denominador (1). Por tanto, la gráfica de R tiene la asíntota horizontal $y = 3$. Para encontrar si la gráfica de R corta a la asíntota, resolvemos la ecuación $R(x) = 3$.

$$\begin{aligned} R(x) = \frac{3x^2 - 3x}{x^2 + x - 12} &= 3 \\ 3x^2 - 3x &= 3x^2 + 3x - 36 \\ -6x &= -36 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

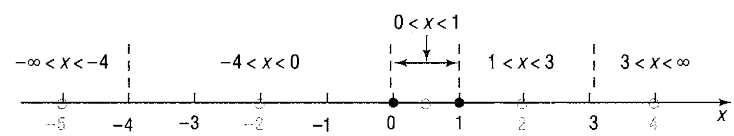
Por tanto, la gráfica corta a la recta $y = 3$ sólo en $x = 6$, y $(6, 3)$ es un punto de la gráfica de R.

PASO 5: Los ceros del numerador, 0 y 1, y los del denominador, -4 y 3, dividen al eje x en cinco intervalos:

$$-\infty < x < -4 \qquad -4 < x < 0 \qquad 0 < x < 1 \qquad 1 < x < 3 \qquad 3 < x < \infty$$

Ahora podemos construir la figura 39:

FIGURA 39



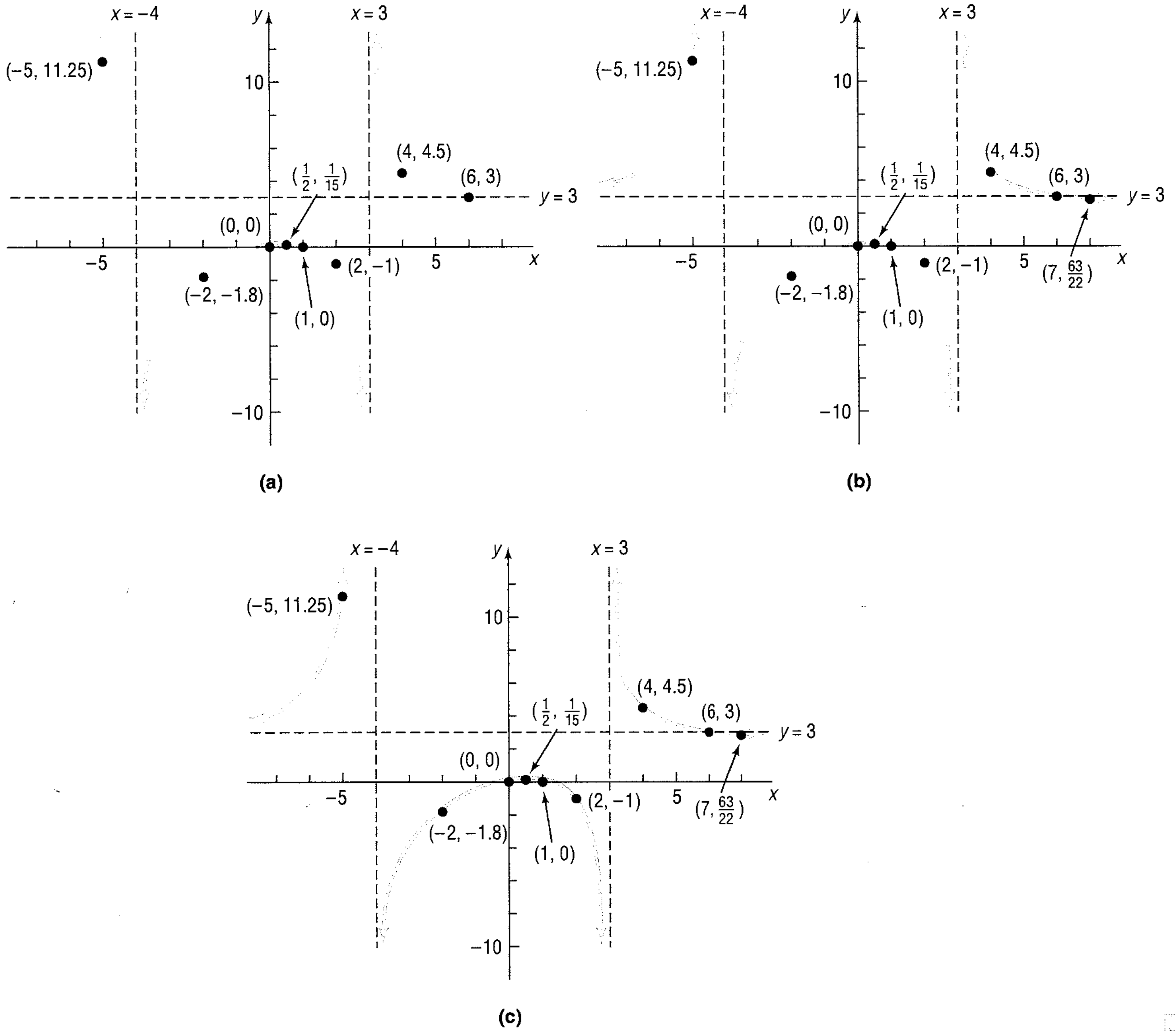
	$-\infty < x < -4$	$-4 < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < 3$	$3 < x < \infty$
Número de prueba	-5	-2	$\frac{1}{2}$	2	4
Valor de R:	11.25	-1.8	$\frac{1}{15}$	-1	4.5
Gráfica de R:	Por arriba del eje x	Por debajo del eje x	Por arriba del eje x	Por debajo del eje x	Por arriba del eje x
Punto sobre la gráfica:	$(-5, 11.25)$	$(-2, -1.8)$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{15})$	$(2, -1)$	$(4, 4.5)$

PASO 6: La figura 40(a) muestra una gráfica parcial. Observe que no hemos utilizado la información de que la recta $y = 3$ es una asíntota horizontal, ya que no sabemos aún si la gráfica de R cruza o toca la recta $y = 3$ en $(6, 3)$. Para saberlo, trazamos un punto adicional a la derecha de $(6, 3)$. Utilizamos $x = 7$ para determinar $R(7) = \frac{63}{22} < 3$. Por lo tanto, la gráfica cruza $y = 3$ en $x = 6$. Ya que $y = 3$ es

una asíntota de la gráfica, ésta se aproxima por arriba a la recta $y = 3$ cuando $x \to -\infty$ y se aproxima a la recta $y = 3$ por abajo cuando $x \to \infty$. *Véase* la figura 40(b). La gráfica terminada se muestra en la figura 40(c).

FIGURA 40

$$R(x) = \frac{3x^2 - 3x}{x^2 + x - 12}$$

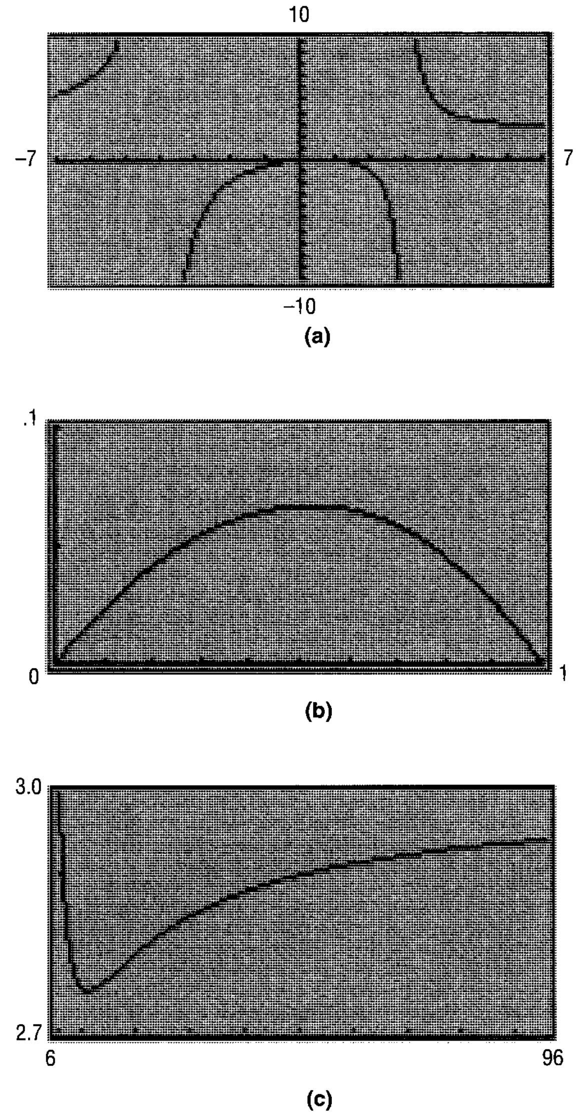


Exploración: La figura 41(a) muestra la gráfica de

$$R(x) = \frac{3x^2 - 3x}{x^2 + x - 12}$$

La figura 41(b) muestra el punto de retorno ubicado entre 0 y 1, esto es, (0.52, 0.06), redondeado a dos decimales. La figura 41(c) muestra el punto de retorno localizado a la derecha de $x = 6$, esto es, (11.47, 12.74), redondeado a dos decimales. También aquí se muestra una vista de la gráfica y de su asíntota horizontal $y = 3$.

FIGURA 41



(a)

(b)

(c)

Ejercicio 3.3

En los problemas del 1 al 10 encuentre el dominio de cada función racional.

1. $R(x) = \dfrac{4x}{x-3}$

2. $R(x) = \dfrac{5x^2}{3+x}$

3. $H(x) = \dfrac{-4x^2}{(x-2)(x+4)}$

4. $G(x) = \dfrac{6}{(x+3)(4-x)}$

5. $F(x) = \dfrac{3x(x-1)}{2x^2-5x-3}$

6. $Q(x) = \dfrac{-x(1-x)}{3x^2+5x-2}$

7. $R(x) = \dfrac{x}{x^3-8}$

8. $R(x) = \dfrac{x}{x^4-1}$

9. $H(x) = \dfrac{3x^2+x}{x^2+4}$

10. $G(x) = \dfrac{x-3}{x^4+1}$

En los problemas del 11 al 16 utilice la gráfica mostrada para encontrar:

(*a*) *El dominio y el rango de cada función.*

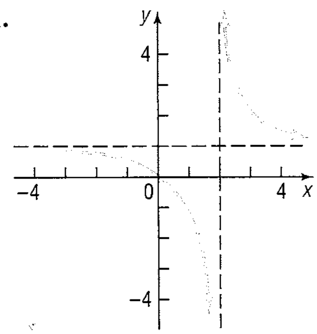
(*b*) *Las intersecciones con los ejes, si las hay.*

(*c*) *Las asíntotas horizontales, si las hay.*

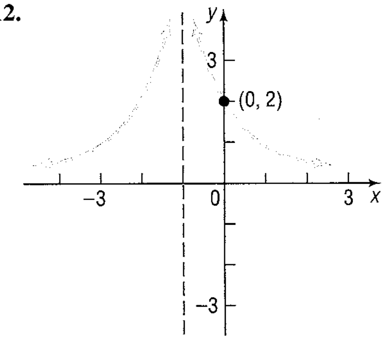
(*d*) *Las asíntotas verticales, si las hay.*

(*e*) *Las asíntotas oblicuas, si las hay*

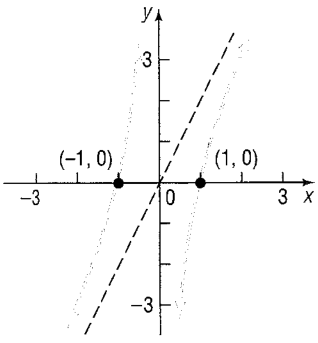
11.



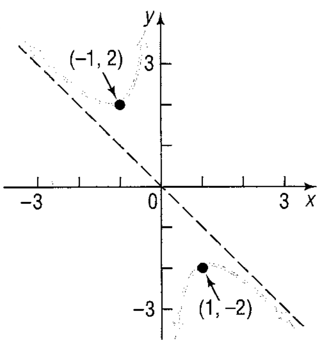
12.



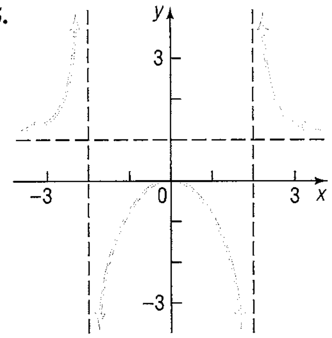
13.



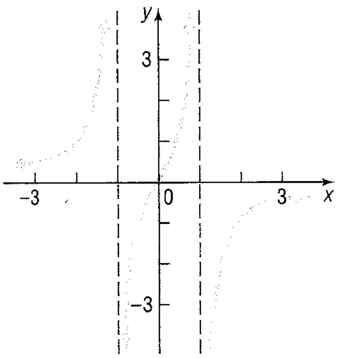
14.



15.



16.



En los problemas del 17 al 26 haga la gráfica de cada función racional utilizando los métodos de desplazamiento, compresión, alargamiento y reflexión, o los pasos del 1 al 6 dados en la página 215.

17. $R(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

18. $R(x) = \dfrac{3}{x}$

19. $H(x) = \dfrac{-2}{x+1}$

20. $G(x) = \dfrac{2}{(x+2)^2}$

21. $R(x) = \dfrac{1}{x^2+4x+4}$

22. $R(x) = \dfrac{1}{x-1} + 1$

23. $F(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$

24. $Q(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$

25. $R(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2}$

26. $R(x) = \dfrac{x-4}{x}$

En los problemas del 27 al 36 encuentre las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, si las hay, de cada función racional. No grafique.

27. $R(x) = \dfrac{3x}{x+4}$

28. $R(x) = \dfrac{3x+5}{x-6}$

29. $H(x) = \dfrac{x^4+2x^2+1}{x^2-x+1}$

30. $G(x) = \dfrac{-x^2+1}{x+5}$

31. $T(x) = \dfrac{x^3}{x^4-1}$

32. $P(x) = \dfrac{4x^5}{x^3-1}$

33. $Q(x) = \dfrac{5 - x^2}{3x^4}$

34. $F(x) = \dfrac{-2x^2 + 1}{2x^3 + 4x^2}$

35. $R(x) = \dfrac{3x^4 + 4}{x^3 + 3x}$

36. $R(x) = \dfrac{6x^2 + x + 12}{3x^2 - 5x - 2}$

En los problemas del 37 al 62, siga los pasos del 1 al 6 dados en la página 121 para hacer la gráfica de cada función racional.

37. $R(x) = \dfrac{x + 1}{x(x + 4)}$

38. $R(x) = \dfrac{x}{(x - 1)(x + 2)}$

39. $R(x) = \dfrac{3x + 3}{2x + 4}$

40. $R(x) = \dfrac{2x + 4}{x - 1}$

41. $R(x) = \dfrac{3}{x^2 - 4}$

42. $R(x) = \dfrac{6}{x^2 - x - 6}$

43. $P(x) = \dfrac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - 1}$

44. $Q(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 4}$

45. $H(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 9}$

46. $G(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 2x}$

47. $R(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + x - 6}$

48. $R(x) = \dfrac{x^2 + x - 12}{x^2 - 4}$

49. $G(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

50. $G(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 1}$

51. $R(x) = \dfrac{3}{(x - 1)(x^2 - 4)}$

52. $R(x) = \dfrac{-4}{(x + 1)(x^2 - 9)}$

53. $H(x) = 4\dfrac{x^2 - 1}{x^4 - 16}$

54. $H(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x^4 - 1}$

55. $F(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x + 2}$

56. $F(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x - 1}$

57. $R(x) = \dfrac{x^2 + x - 12}{x - 4}$

58. $R(x) = \dfrac{x^2 - x - 12}{x + 5}$

59. $F(x) = \dfrac{x^2 + x - 12}{x + 2}$

60. $G(x) = \dfrac{x^2 - x - 12}{x + 1}$

61. $R(x) = \dfrac{x(x - 1)^2}{(x + 3)^3}$

62. $R(x) = \dfrac{(x - 1)(x + 2)(x - 3)}{x(x - 4)^2}$

63. Si la gráfica de una función racional R tiene la asíntota vertical $x = 4$, entonces el factor $x - 4$ debe estar presente en el denominador de R. Explique por qué.

64. Si la gráfica de una función racional R tiene la asíntota horizontal $y = 2$, entonces el grado del numerador de R es igual al de su denominador. Explique por qué.

65. Haga la gráfica de cada una de las siguientes funciones:

$$y = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \qquad y = \frac{x^3 - 1}{x - 1} \qquad y = \frac{x^4 - 1}{x - 1} \qquad y = \frac{x^5 - 1}{x - 1}$$

¿$x = 1$ es una asíntota vertical? ¿Por qué no? ¿Qué está pasando en $x = 1$? ¿Qué puede conjeturar acerca de $y = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$, $n \geq 1$ un entero, en $x = 1$?

66. Haga la gráfica de cada una de las siguientes funciones:

$$y = \frac{x^2}{x - 1} \qquad y = \frac{x^4}{x - 1} \qquad y = \frac{x^6}{x - 1} \qquad y = \frac{x^8}{x - 1}$$

¿Qué semejanzas puede ver? ¿Qué diferencias?

En los problemas del 67 al 72, haga la gráfica de cada función y utilice TRACE para aproximar el valor mínimo, redondee a dos decimales.

67. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, x > 0$

68. $f(x) = 2x + \dfrac{9}{x}, x > 0$

69. $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}, x > 0$

70. $f(x) = 2x^2 + \dfrac{9}{x}, x > 0$

71. $f(x) = x + \dfrac{1}{x^3}, x > 0$

72. $f(x) = 2x + \dfrac{9}{x^3}, x > 0$

73. Consulte la ilustración. ¿Cuál de las siguientes funciones racionales tiene esta gráfica? (Puede haber más de una respuesta.)

(a) $y = \dfrac{4x^2}{x^2 - 4}$

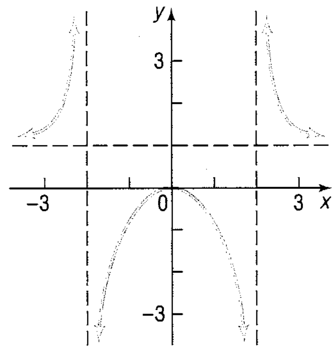
(b) $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

(c) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

(d) $y = \dfrac{x^2(x^2 + 1)}{(x^2 + 4)(x^2 - 4)}$

(e) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$

(f) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2}$



74. Consulte la ilustración. ¿Cuál de las siguientes funciones racionales tiene esta gráfica? (Puede haber más de una respuesta.)

(a) $y = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

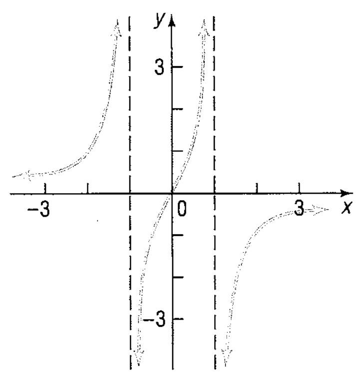
(b) $y = \dfrac{-3x}{x^2 - 1}$

(c) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

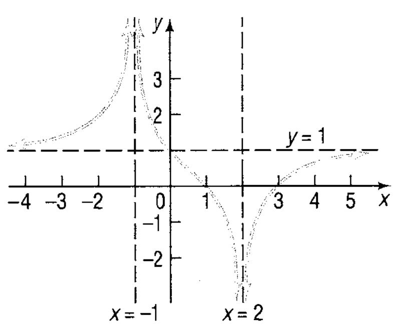
(d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{-3x}$

(e) $y = \dfrac{-x^3}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}$

(f) $y = \dfrac{-x^2}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}$



75. Consulte la ilustración. Construya una función racional que pueda tener esta gráfica. Compárela con las de sus compañeros. ¿Qué semejanzas tienen? ¿Qué diferencias?



76. ¿La gráfica de una función racional puede tener una asíntota horizontal y una vertical? Explique su respuesta.

77. Escriba unos breves párrafos que proporcionen una estrategia general para la graficación de una función racional. Asegúrese de mencionar lo siguiente: propia, impropia, intersecciones y asíntotas.

78. Construya una función racional con las características siguientes: que cruce el eje x en 3 y toque el eje x en -2; que tenga una asíntota vertical en $x = 1$ y una asíntota horizontal, $y = 2$. Dé su función racional a un compañero de clase y pídale que escriba una crítica de ella.

79. Construya una función racional que tenga $y = 2x + 1$ como una asíntota oblicua. Explique la metodología que use.

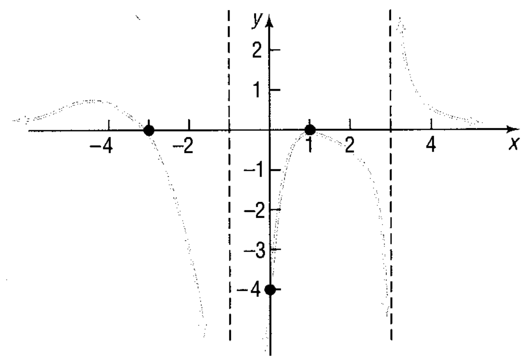
MISIÓN POSIBLE

Capítulo 3

CÓMO RESPONDER A UN RETO CARDASIANO.

Suponga que mientras jugaba con la realidad virtual en el laboratorio de su escuela, de repente se vio cara a cara con algunos muy reales y de apariencia repulsiva cardasianos quienes han aparecido recientemente en su escuela por toda la red de computadoras. Como es usual, ellos menosprecian la inteligencia de los terrícolas y cuando usted trata de protestar le lanzan un reto: "Encuentre una función racional definida por esta gráfica", dicen "y prometemos apoyar su éxito intelectual en toda la comunidad intergaláctica de este lado de la Nebulosa de Macklin. De otra forma, considérense el hazmerreír del universo." Y partieron de regreso a la pantalla de la computadora, vanaglorián-dose de lo que ellos supusieron es su ingenio extremo.

Cuando usted ve hacia la pantalla todo lo que puede percibir es esta gráfica:



Usted decide abordar esto como un proyecto de equipo para salvar la reputación de todos los seres humanos de este planeta. Los cardasianos mencionaron "función racional", de modo que sabe que la solución tendrá la forma

$$R(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0}$$

Algunas veces es más fácil pensar en ella en forma factorizada.

1. En seguida nota algunas cosas. Hay dos asíntotas verticales. ¿Cómo se pueden ajustar a la solución? Ubíquelas.
2. Hay dos intersecciones-x. ¿Cómo surgen en la solución? Ubíquelas también.
3. Use un dispositivo de graficación para verificar lo que ha hecho. ¿Obtiene algo parecido a la gráfica original? Observe que 1 y -3 parecen ser los únicos ceros reales. ¿Qué puede decir acerca de la multiplicidad de cada uno? ¿Necesita cambiar la multiplicidad de algún cero en su solución?
4. ¿Cómo puede considerarse el hecho que la gráfica de la función tienda a $-\infty$ en ambos lados de una asíntota vertical mientras en la otra asíntota vertical tiende a $-\infty$ por un lado y a ∞ por el otro? ¿Puede cambiar el denominador de alguna manera para tomar en cuenta esto?
5. ¿La información que tiene hasta el momento es consistente con la asíntota horizontal $y = 0$? Si no es así, ¿cómo debe ajustar su función de modo que sea consistente?
6. ¿La información que tiene hasta el momento es consistente con la intersección-y? Si no es así, ¿cómo debe ajustar su función de modo que sea consistente?
7. ¿Ya terminó? ¿Verificó su solución en un dispositivo de graficación?
8. ¿Existen otras funciones cuya gráfica pueda parecerse a la especificada? Si es así, ¿qué características en común deben tener? ¿Cree usted que se impresionarían los cardasianos si se les enviara más de una respuesta correcta?
9. Compare la solución de su grupo con las de otros grupos antes de teclearla en la computadora. Luego envíe todas las soluciones correctas a cardass@slime.uni.

3.4

Teoremas del residuo y del factor; división sintética

Recuerde que cuando dividimos un polinomio (el dividendo) entre otro (el divisor) obtenemos un polinomio cociente y un residuo, el residuo es el polinomio cero o un polinomio cuyo grado es menor que el grado del polinomio del divisor. Para verificar nuestro trabajo, confirmamos que

$$(\text{Divisor})(\text{Cociente}) + \text{Residuo} = \text{Dividendo}$$

Esta rutina de verificación es la base para un famoso teorema llamado **algoritmo* de la división para polinomios**, que ahora establecemos sin prueba.

Teorema algoritmo de la división para polinomios

Si $f(x)$ y $g(x)$ denotan funciones polinomiales y si $g(x)$ no es el polinomio cero, entonces existen funciones polinomiales únicas $q(x)$ y $r(x)$ tales que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} \quad \text{o} \quad \underset{\text{dividendo}}{f(x)} = \underset{\text{divisor}}{g(x)}\,\underset{\text{cociente}}{q(x)} + \underset{\text{residuo}}{r(x)} \qquad (1)$$

donde $r(x)$ es el polinomio cero o un polinomio de grado menor que el de $g(x)$.

En la ecuación (1), $f(x)$ es el **dividendo,** $g(x)$ el **divisor**, $q(x)$ el **cociente** y $r(x)$ el **residuo.**

Si el divisor $g(x)$ es un polinomio de primer grado de la forma

$$g(x) = x - c \qquad \text{donde } c \text{ es un número real}$$

entonces el residuo $r(x)$ es el polinomio cero o un polinomio de grado cero. Por tanto, para tales divisores, el residuo es algún número, digamos, R, y podemos escribir

$$f(x) = (x - c)q(x) + R \qquad (2)$$

Esta ecuación es una identidad en x y es verdadera para todos los números reales x. En particular, es cierta cuando $x = c$. Por tanto, si $x = c$, entonces la ecuación (2) se transforma en

$$f(c) = (c - c)q(c) + R$$
$$f(c) = R$$

y la ecuación (2) toma la forma

$$f(x) = (x - c)q(x) + f(c) \qquad (3)$$

Hemos demostrado el resultado siguiente, llamado **teorema del residuo:**

Teorema del residuo

Sea f una función polinomial. Si $f(x)$ es dividida entre $x - c$, entonces el residuo es $f(c)$.

*Un proceso sistemático en el que ciertos pasos son repetidos un número finito de veces es llamado algoritmo. Por tanto, la división larga es un algoritmo.

EJEMPLO 1

Usando el teorema del residuo. Encontrar el residuo si $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 5$ se divide entre:

(a) $x - 3$ (b) $x + 2$

Solución

(a) Podríamos utilizar la división larga. Sin embargo, aquí es mucho más sencillo usar el teorema del residuo, el cual dice que el residuo es

$$f(3) = (3)^3 - 4(3)^2 + 2(3) - 5 = 27 - 36 + 6 - 5 = -8$$

(b) Para encontrar el residuo cuando $f(x)$ es dividido entre $x + 2 = x - (-2)$, evaluamos

$$f(-2) = (-2)^3 - 4(-2)^2 + 2(-2) - 5 = -8 - 16 - 4 - 5 = -33$$

Por tanto el residuo es -33.

Ahora resuelva el problema 1.

Una consecuencia importante y útil del teorema del residuo es el **teorema del factor.**

Teorema del factor

Sea f una función polinomial. Entonces $x - c$ es un factor de $f(x)$ si, y sólo si $f(c) = 0$.

En realidad, el teorema del factor consiste en dos enunciados separados:

1. Si $f(c) = 0$, entonces $x - c$ es un factor de $f(x)$.
2. Si $x - c$ es un factor de $f(x)$, entonces $f(c) = 0$.

Por tanto, la demostración necesita dos partes.

Demostración

1. Suponga que $f(c) = 0$. Entonces, por la ecuación (3), tenemos

$$f(x) = (x - c)q(x)$$

para algún polinomio $q(x)$. Esto es, $x - c$ es un factor de $f(x)$.

2. Suponga que $x - c$ es un factor de $f(x)$. Entonces existe una función polinomial q tal que

$$f(x) = (x - c)q(x)$$

Reemplazando x por c, encontramos

$$f(c) = (c - c)q(c) = 0 \cdot q(c) = 0$$

Esto complementa la demostración.

Un uso del teorema del factor es para determinar si un polinomio tiene un factor en particular.

EJEMPLO 2

Uso del teorema del factor

Utilizar el teorema del factor para determinar si la función $f(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 3$ tiene el factor:

(a) $x - 1$ (b) $x + 3$

Solución

(a) Ya que $x - 1$ es de la forma $x - c$ con $c = 1$, encontramos el valor de $f(1)$:

$$f(1) = 2(1)^3 - (1)^2 + 2(1) - 3 = 2 - 1 + 2 - 3 = 0$$

Por el teorema del factor, $x - 1$ es un factor de $f(x)$.

(b) Para probar el factor $x + 3$, primero necesitamos escribirlo en la forma $x - c$. Como $x + 3 = x - (-3)$, encontramos el valor de $f(-3)$:

$$f(-3) = 2(-3)^3 - (-3)^2 + 2(-3) - 3 = -54 - 9 - 6 - 3 = -72$$

Ya que $f(-3) \neq 0$, concluimos del teorema del factor que $x - (-3) = x + 3$ no es factor de $f(x)$.

División sintética

Para encontrar el cociente y el residuo cuando la función polinomial f de grado 1 o mayor es dividida entre $g(x) = x - c$, una versión abreviada de la división larga, llamada **división sintética,** hace la tarea más sencilla.

Para ver cómo funciona la división sintética, usaremos la división larga al dividir el polinomio $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3$ entre $g(x) = x - 3$.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2x^2 & +\,5x & +\,15 & \\ \hline
x-3 & 2x^3 & -\,x^2 & & +\,3 \\
 & 2x^3 & -\,6x^2 & & \\ \hline
 & & 5x^2 & & \\
 & & 5x^2 & -\,15x & \\ \hline
 & & & 15x & +\,3 \\
 & & & 15x & -\,45 \\ \hline
 & & & & 48
\end{array}$$

El proceso de la división sintética surge de reescribir la división larga en forma compacta, utilizando una notación más sencilla. Por ejemplo, en la división larga anterior, los términos en color azul realmente no se necesitan ya que son idénticos a los escritos directamente debajo de ellos. Con estos términos eliminados, tenemos

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2x^2 & +\,5x & +\,15 & \\ \hline
x-3 & 2x^3 & -\,x^2 & & +\,3 \\
 & & -\,6x^2 & & \\ \hline
 & & 5x^2 & & \\
 & & & -\,15x & \\ \hline
 & & & 15x & \\
 & & & & -\,45 \\ \hline
 & & & & 48
\end{array}$$

La mayoría de las x que aparecen en el proceso también pueden ser eliminadas, con tal de que seamos cuidadosos acerca de la posición de cada coeficiente. Al respecto, necesitaremos utilizar 0 como el coeficiente de x en el dividendo, ya que la potencia de x no aparece. Ahora tenemos

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2x^2 & +\,5x & +\,15 & \\ \hline
x-3 & 2 & -1 & 0 & 3 \\
 & & -6 & & \\ \hline
 & & 5 & & \\
 & & & -15 & \\ \hline
 & & & 15 & \\
 & & & & -45 \\ \hline
 & & & & 48
\end{array}$$

Podemos hacer esto de manera más compacta moviendo las líneas hacia arriba hasta que los números en color azul queden alineados horizontalmente:

$$\begin{array}{rrrrrl} & 2x^2 + & 5x + & 1 & 5 & \text{Renglón 1} \\ \cline{2-5} x-3) & 2 & -1 & 0 & 3 & \text{Renglón 2} \\ & & -6 & -15 & -45 & \text{Renglón 3} \\ \cline{2-5} & \bigcirc & 5 & 15 & 48 & \text{Renglón 4} \end{array}$$

Ahora, si colocamos el coeficiente principal del cociente (2) en la posición señalada con un círculo, los primeros tres números del renglón 4 son precisamente los coeficientes del cociente, y el último número del renglón 4 es el residuo. Por tanto, el renglón 1 realmente no es necesario, así que podemos reducir el proceso a tres renglones, donde el renglón inferior contiene los coeficientes del cociente y del residuo:

$$\begin{array}{rrrrrl} x-3) & 2 & -1 & 0 & 3 & \text{Renglón 1} \\ & & -6 & -15 & -45 & \text{Renglón 2 (restar)} \\ \cline{2-5} & 2 & 5 & 15 & 48 & \text{Renglón 3} \end{array}$$

Recuerde que la entradas del renglón 3 son obtenidas restando las entradas en el renglón 2 de las del renglón 1. En lugar de restar las entradas del renglón 2, podemos cambiar el signo de cada una y sumar. Con esta modificación nuestra disposición se verá así:

$$\begin{array}{rrrrrl} x-3) & 2 & -1 & 0 & 3 & \text{Renglón 1} \\ & & 6 & 15 & 45 & \text{Renglón 2 (sumar)} \\ \cline{2-5} & 2 & 5 & 15 & 48 & \text{Renglón 3} \end{array}$$

Observe que las entradas en el renglón 2 son tres veces la entrada anterior en el renglón 3. Nuestro último cambio para la disposición reemplaza $x - 3$ por 3. Las entradas en el renglón 3 son el cociente y el residuo, como se muestra a continuación.

$$\begin{array}{rrrrrl} 3) & 2 & -1 & 0 & 3 & \text{Renglón 1} \\ & & 6 & 15 & 45 & \text{Renglón 2 (sumar)} \\ \cline{2-5} & \underbrace{2 \quad 5 \quad 15}_{\text{Cociente}} & & & \underbrace{48}_{\text{Residuo}} & \text{Renglón 3} \end{array}$$

$$2x^2 + 5x + 15 \qquad R = 48$$

Veamos otro ejemplo paso a paso.

EJEMPLO 3 *Uso de división sintética para encontrar el cociente y el residuo*

Utilice la división sintética para encontrar el cociente y el residuo cuando

$$f(x) = 3x^4 + 8x^2 - 7x + 4 \quad \text{es dividido entre} \quad g(x) = x - 1$$

Solución **PASO 1:** Escribir el dividendo en potencias descendentes de x. Después copiar los coeficientes, recordando insertar un cero para cualquier potencia de x que no aparezca:

$$3 \quad 0 \quad 8 \quad -7 \quad 4 \qquad \text{Renglón 1}$$

PASO 2: Insertar el símbolo usual de división. Como el divisor es $x - 1$, insertamos 1 a la izquierda del símbolo de división

$$1\overline{)3 \quad 0 \quad 8 \quad -7 \quad 4} \qquad \text{Renglón 1}$$

PASO 3: Llevar el 3 dos renglones abajo, y colocarlo en el renglón 3:

$$\begin{array}{r|rrrrl} 1 & 3 & 0 & 8 & -7 & 4 \quad \text{Renglón 1} \\ & \downarrow & & & & \quad \text{Renglón 2} \\ \hline & 3 & & & & \quad \text{Renglón 3} \end{array}$$

PASO 4: Multiplicar la última entrada en el renglón 3 por 1 y colocar el resultado en el renglón 2, pero en una columna a la derecha:

$$\begin{array}{r|rrrrl} 1 & 3 & 0 & 8 & -7 & 4 \quad \text{Renglón 1} \\ & & 3 & & & \quad \text{Renglón 2} \\ \hline & 3 & & & & \quad \text{Renglón 3} \end{array}$$

PASO 5: Sumar la entrada en el renglón 2 a la entrada de arriba que está en el renglón 1, y colocar la suma en el renglón 3:

$$\begin{array}{r|rrrrl} 1 & 3 & 0 & 8 & -7 & 4 \quad \text{Renglón 1} \\ & & 3 & & & \quad \text{Renglón 2} \\ \hline & 3 & 3 & & & \quad \text{Renglón 3} \end{array}$$

PASO 6: Repetir los pasos 4 y 5 hasta que no haya entradas disponibles en el renglón 1:

$$\begin{array}{r|rrrrrl} 1 & 3 & 0 & 8 & -7 & 4 & \text{Renglón 1} \\ & & 3 & 3 & 11 & 4 & \text{Renglón 2 (sumar)} \\ \hline & 3 & 3 & 11 & 4 & 8 & \text{Renglón 3} \end{array}$$

PASO 7: La última entrada en el renglón 3, un 8, es el residuo; las otras entradas en el renglón 3 (3, 3, 11 y 4) son los coeficientes (en orden descendente) de un polinomio cuyo grado es uno menos que el del dividendo, este es el cociente. Por tanto,

$$\text{Cociente} = 3x^3 + 3x^2 + 11x + 4 \qquad \text{Residuo} = 8$$

Verificación: (Divisor)(Cociente) + Residuo

$$\begin{aligned} &= (x - 1)(3x^3 + 3x^2 + 11x + 4) + 8 \\ &= 3x^4 + 3x^3 + 11x^2 + 4x - 3x^3 - 3x^2 - 11x - 4 + 8 \\ &= 3x^4 + 8x^2 - 7x + 4 = \text{Dividendo} \end{aligned}$$

Formule usted un ejemplo en el que los siete pasos estén combinados.

EJEMPLO 4 *Uso de división sintética para verificar un factor*

Utilizar la división sintética para demostrar que $g(x) = x + 3$ es un factor de

$$f(x) = 2x^5 + 5x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 3$$

Solución El divisor es $x + 3 = x - (-3)$, de modo que las entradas del renglón 3 se multiplicarán por -3, serán colocadas en el renglón 2 y sumadas al renglón 1:

$$\begin{array}{r|rrrrrrl} -3 & 2 & 5 & -2 & 2 & -2 & 3 & \text{Renglón 1} \\ & & -6 & 3 & -3 & 3 & -3 & \text{Renglón 2} \\ \hline & 2 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & \text{Renglón 3} \end{array}$$

Ya que el residuo es cero, se deduce que $f(-3) = 0$. De aquí que, por el teorema del factor, $x - (-3) = x + 3$ es un factor de $f(x)$.

Ahora resuelva el problema 13.

Un uso importante de la división sintética se aplica al encontrar el valor de un polinomio.

EJEMPLO 5 *Uso de división sintética para encontrar el valor de un polinomio*

Utilizar la división sintética para encontrar el valor de $f(x) = -3x^4 + 2x^3 - x + 1$ en $x = -2$; esto es, encontrar $f(-2)$.

Solución El teorema del residuo nos dice que el valor de una función polinomial en c es igual al residuo cuando el polinomio es dividido entre $x - c$. Este residuo es la última entrada del tercer renglón en el proceso de la división sintética. Queremos $f(-2)$, así que dividimos entre $x - (-2)$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & -3 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ & & 6 & -16 & 32 & -62 \\ \hline & -3 & 8 & -16 & 31 & -61 \end{array}$$

El cociente es $q(x) = -3x^3 + 8x^2 - 16x + 31$; el residuo es $R = -61$. Ya que el residuo fue -61, deducimos por el teorema del residuo que $f(-2) = -61$.

Ahora resuelva el problema 33.

Como ilustra el ejemplo 5, podemos usar el proceso de división sintética para encontrar el valor de una función polinomial en un número c como una alternativa a sólo sustituir c por x. Compare el trabajo que fue necesario en el ejemplo 5 con la aritmética involucrada en la sustitución:

$$\begin{aligned} f(-2) &= -3(-2)^4 + 2(-2)^3 - (-2) + 1 \\ &= -3(16) + 2(-8) + 2 + 1 \\ &= -48 - 16 + 2 + 1 = -61 \end{aligned}$$

Como puede ver, la determinación de $f(-2)$ puede ser más sencilla utilizando la división sintética.

Algunas veces, ni la sustitución ni la división sintética evitan la necesidad de hacer cálculos tediosos. Considere el problema de evaluar $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 0.2x^3 - 1.5x^2 + 2x - 6$ en $x = 1.2$. En este caso, un tercer método, que utiliza la *forma anidada* de un polinomio, es más útil.

Forma anidada de un polinomio

Considere el polinomio $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2x - 7$. Podemos factorizar $f(x)$ como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^3 - 5x^2 + 2x - 7 \\ &= (3x^3 - 5x^2 + 2x) - 7 && \text{Agrupar términos que contienen a } x. \\ &= (3x^2 - 5x + 2)x - 7 && \text{Factorizar } x. \\ &= [(3x^2 - 5x) + 2]x - 7 && \text{Reagrupar.} \\ &= [(3x - 5)x + 2]x - 7 && \text{Factorizar } x \text{ dentro de los paréntesis.} \end{aligned}$$

Observe que esta forma del polinomio sólo contiene expresiones lineales. Una función polinomial escrita de esta manera se dice que está en **forma anidada.**

EJEMPLO 6 *Forma anidada de un polinomio*

Escribir cada polinomio en forma anidada:

(a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ (b) $f(x) = 5x^3 - 6x^2 + 2$

(c) $f(x) = -5x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 10x - 8$

Solución (a) Procedemos como sigue:

$$f(x) = (2x^2 - 3x) + 5 = (2x - 3)x + 5$$

La expresión $(2x - 3)x + 5$ es la forma anidada de $2x^2 - 3x + 5$.

(b) $f(x) = (5x^3 - 6x^2) + 2 = (5x^2 - 6x)\,x + 2 = [(5x - 6)x]x + 2$

La expresión $[(5x - 6)x]x + 2$ es la forma anidada del polinomio $5x^3 - 6x^2 + 2$.

(c)
$$\begin{aligned} f(x) &= (-5x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 10x) - 8 \\ &= (-5x^3 + 3x^2 - 2x + 10)x - 8 \\ &= [(-5x^2 + 3x - 2)x + 10]x - 8 \\ &= \{[(-5x + 3)x - 2]x + 10\}x - 8 \end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 39.

La ventaja de evaluar un polinomio que está en forma anidada es que se evita la necesidad de elevar un número a una potencia, lo que en una calculadora o en una computadora puede causar graves errores de redondeo. Además, las computadoras pueden realizar la operación de suma mucho más rápido que la de multiplicación, y la forma anidada necesita de menos multiplicaciones que la forma ordinaria de un polinomio. En el ejemplo 6(b), para evaluar $f(x) = 5x^3 - 6x^2 + 2$ en su forma ordinaria se necesitó de cinco multiplicaciones y dos sumas:

Multiplicación

$$5 \cdot x \cdot x \cdot x - 6 \cdot x \cdot x + 2$$

Suma

En la forma anidada se necesitan sólo tres multiplicaciones y dos sumas:

Multiplicación

$$[(5 \cdot x - 6) \cdot x] \cdot x + 2$$

Suma

Por tanto, para evitar errores y acelerar los cálculos, muchas computadoras evalúan los polinomios utilizando la forma anidada.

EJEMPLO 7 *Uso de la forma anidada para encontrar el valor de un polinomio*

Utilizar la forma anidada y una calculadora para evaluar el polinomio siguiente en $x = 1.3$.

$$f(x) = 0.5x^3 - 1.2x^2 + 5.1x - 6.2$$

Solución Escribimos f en la forma anidada como

$$f(x) = [(0.5x - 1.2)x + 5.1]x - 6.2$$

Empezamos dentro de los paréntesis, multiplicando 0.5 por $x = 1.3$. Luego restamos 1.2. Multiplicamos el resultado por $x = 1.3$ y sumamos 5.1. Multiplicamos este resultado por $x = 1.3$ y restamos 6.2. El valor es

$$f(1.3) = -0.4995$$

En una calculadora se procede como se indica a continuación:

Teclear: $\boxed{0.5}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{1.3}$ $\boxed{-}$ $\boxed{1.2}$ $\boxed{=}$

Aparece: $\boxed{0.5}$ $\boxed{1.3}$ $\boxed{0.65}$ $\boxed{1.2}$ $\boxed{-0.55}$

Teclear: $\boxed{\times}$ $\boxed{1.3}$ $\boxed{+}$ $\boxed{5.1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{1.3}$

Aparece: $\boxed{1.3}$ $\boxed{-0.715}$ $\boxed{5.1}$ $\boxed{4.385}$ $\boxed{1.3}$

Teclear: $\boxed{-}$ $\boxed{6.2}$ $\boxed{=}$

Aparece: $\boxed{5.7005}$ $\boxed{6.2}$ $\boxed{-0.4995}$

Observe que en este proceso no se utilizó la tecla de memoria.

Resumen

Tres formas para encontrar el valor de una función polinomial $f(x)$ en un número c:

1. Reemplazar x por el número c para encontrar $f(c)$.
2. Utilizar la división sintética para dividir $f(x)$ entre $x - c$. El residuo es $f(c)$.
3. Escribir $f(x)$ en la forma anidada y usar una calculadora para encontrar $f(c)$.

Ejercicio 3.4

En los problemas del 1 al 10 use el teorema del residuo para encontrar cuándo $f(x)$ es divisible entre $g(x)$.

1. $f(x) = x^3 - x^2 + 2x + 4$; $g(x) = x - 2$

2. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$; $g(x) = x + 1$

3. $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 3$; $g(x) = x - 3$

4. $f(x) = -4x^3 + 2x^2 - x + 1$; $g(x) = x + 2$

5. $f(x) = x^5 - 4x^3 + x$; $g(x) = x + 3$

6. $f(x) = x^4 + x^2 + 2$; $g(x) = x - 2$

7. $f(x) = 4x^6 - 3x^4 + x^2 + 5$; $g(x) = x - 1$

8. $f(x) = x^5 + 5x^3 - 10$; $g(x) = x + 1$

9. $f(x) = 0.1x^3 + 0.2x$; $g(x) = x + 1.1$

10. $f(x) = 0.1x^2 - 0.2$; $g(x) = x + 2.1$

En los problemas del 11 al 22, use el teorema del residuo para encontrar el cociente $q(x)$ y el residuo R cuando $f(x)$ es dividido entre $g(x)$.

11. $f(x) = x^3 - x^2 + 2x + 4$; $g(x) = x - 2$

12. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$; $g(x) = x + 1$

13. $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 3$; $g(x) = x - 3$

14. $f(x) = -4x^3 + 2x^2 - x + 1$; $g(x) = x + 2$

15. $f(x) = x^5 - 4x^3 + x$; $g(x) = x + 3$

16. $f(x) = x^4 + x^2 + 2$; $g(x) = x - 2$

17. $f(x) = 4x^6 - 3x^4 + x^2 + 5$; $g(x) = x - 1$

18. $f(x) = x^5 + 5x^3 - 10$; $g(x) = x + 1$

19. $f(x) = 0.1x^3 + 0.2x$; $g(x) = x + 1.1$

20. $f(x) = 0.1x^2 - 0.2$; $g(x) = x + 2.1$

21. $f(x) = x^5 - 1$; $g(x) = x - 1$

22. $f(x) = x^5 + 1$; $g(x) = x + 1$

En los problemas del 23 al 32 use la división sintética para determinar si $x - c$ es un factor de $f(x)$.

23. $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 8x + 4; \quad c = 2$

24. $f(x) = -4x^3 + 5x^2 + 8; \quad c = -3$

25. $f(x) = 3x^4 - 6x^3 - 5x + 10; \quad c = 2$

26. $f(x) = 4x^4 - 15x^2 - 4; \quad c = 2$

27. $f(x) = 3x^6 + 82x^3 + 27; \quad c = -3$

28. $f(x) = 2x^6 - 18x^4 + x^2 - 9; \quad c = -3$

29. $f(x) = 4x^6 - 64x^4 + x^2 - 15; \quad c = -4$

30. $f(x) = x^6 - 16x^4 + x^2 - 16; \quad c = -4$

31. $f(x) = 2x^4 - x^3 + 2x - 1; \quad c = \frac{1}{2}$

32. $f(x) = 3x^4 + x^3 - 3x + 1; \quad c = -\frac{1}{3}$

En los problemas del 33 al 38 utilice la división sintética para encontrar $f(c)$.

33. $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 1; \quad c = 2$

34. $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 5; \quad c = -2$

35. $f(x) = 4x^5 - 3x^3 + 2x - 1; \quad c = -1$

36. $f(x) = -3x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 5; \quad c = -1$

37. $f(x) = 9x^{17} - 8x^{10} + 9x^8 + 5; \quad c = 1$

38. $f(x) = 10x^{15} + 4x^{12} - 2x^5 + x^2; \quad c = -1$

En los problemas del 39 al 48 escriba cada polinomio en la forma anidada.

39. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 5x + 8$

40. $f(x) = -4x^3 + 5x^2 + 6$

41. $f(x) = 3x^4 - 6x^3 - 5x + 10$

42. $f(x) = 4x^4 - 15x^2 - 4$

43. $f(x) = 3x^6 - 82x^3 + 27$

44. $f(x) = 2x^6 - 18x^4 + x^2 - 9$

45. $f(x) = 4x^6 - 64x^4 + x^2 - 15$

46. $f(x) = x^6 - 16x^4 + x^2 - 16$

47. $f(x) = 2x^4 - x^3 + 2x - 1$

48. $f(x) = 3x^4 + x^3 - 3x + 1$

En los problemas del 49 al 58, utilice la forma anidada y una calculadora para evaluar cada polinomio en $x = 1.2$. Evite el uso de cualquier tecla de memoria.

49. $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5x + 8$

50. $f(x) = -4x^3 + 5x^2 + 6$

51. $f(x) = 3x^4 - 6x^3 - 5x + 10$

52. $f(x) = 4x^4 - 15x^2 - 4$

53. $f(x) = 3x^6 - 82x^3 + 27$

54. $f(x) = 2x^6 - 18x^4 + x^2 - 9$

55. $f(x) = 4x^6 - 64x^4 + x^2 - 15$

56. $f(x) = x^6 - 16x^4 + x^2 - 16$

57. $f(x) = 2x^4 - x^3 + 2x - 1$

58. $f(x) = 3x^4 + x^3 - 3x + 1$

59. Encuentre k tal que $f(x) = x^3 - kx^2 + kx + 2$ tenga el factor $x - 2$.

60. Encuentre k tal que $f(x) = x^4 - kx^3 + kx^2 + 1$ tenga el factor $x + 2$.

61. ¿Cuál es el residuo cuando $f(x) = 2x^{20} - 8x^{10} + x - 2$ se divide entre $x - 1$?

62. ¿Cuál es el residuo cuando $f(x) = -3x^{17} + x^9 - x^5 + 2x$ se divide entre $x + 1$?

63. Utilice el teorema del factor para probar que $x - c$ es un factor de $x^n - c^n$ para cualquier entero positivo n.

64. Utilice el teorema del factor para probar que $x - c$ es un factor de $x^n + c^n$ si $n \geq 1$ es un entero impar.

65. Una microcomputadora IBM−AT calcula potencias mediante multiplicación. Suponga que cada multiplicación de dos números requiere de 33,333 nanosegundos y cada suma o resta necesita 500 nanosegundos. (Tenga en cuenta que 1 nanosegundo = 10^{-9} segundos.) Sin considerar ningún otro tiempo, ¿cuánto le tomará a la computadora encontrar el valor de $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4x - 10$ en $x = 2.013$?:

(a) ¿Reemplazando x por 2.013 en la expresión para $f(x)$?

(b) ¿Reemplazando x por 2.013 en la forma anidada de $f(x)$?

66. Usando la microcomputadora descrita en el problema 65, ¿cuánto tiempo le tomaría por los dos métodos (a) y (b) encontrar el valor de $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ para 5000 valores de x?

67. *Ejercicio de programación.* Escriba un programa donde se aplique la división sintética para dividir un polinomio entre $x - c$. Su entrada debe consistir de los coeficientes del polinomio, en orden descendente, seguidos por el número c. Su salida debe consistir de los números que aparecerían en el tercer renglón del proceso de la división sintética.

68. *Ejercicio de programación.* Escriba un programa que evalúe un polinomio utilizando la forma anidada. Su entrada debe consistir de los coeficientes del polinomio, en orden descendente, seguidos por el número c en el cual el polinomio será evaluado. Pruebe su programa con los polinomios dados en los problemas del 49 al 58.

69. Cuando usted divide un polinomio entre $x - c$, ¿prefiere utilizar división larga o la sintética? ¿El valor de c provoca una diferencia en su elección? Dé sus razones.

3.5 Los ceros de una función polinomial

Los ceros reales de una función polinomial f son las soluciones reales, si las hay, de la ecuación $f(x) = 0$. También son las intersecciones-x de f. En las funciones polinomiales y racionales, hemos visto la importancia de localizar los ceros para la graficación. Sin embargo, en la mayoría de los casos los ceros de una función polinomial son difíciles de encontrar. No hay fórmulas sencillas disponibles, como la fórmula cuadrática, para ayudarnos a resolver un polinomio de grado superior a 2. Aunque existen fórmulas para resolver cualquier ecuación polinomial de tercero o cuarto grado, son muy complicadas. (Si está interesado en aprender acerca de ellas, vea los problemas del 75 al 83 donde se resuelven ecuaciones cúbicas; para ecuaciones polinomiales de cuarto grado consulte un libro sobre teoría de ecuaciones.) Se ha comprobado que no existen fórmulas generales para ecuaciones polinomiales de grado 5 o superior. En esta sección aprenderemos algunas maneras de detectar información acerca del carácter de los ceros, que, a su vez, nos pueden ayudar a encontrarlos o al menos a aislarlos

Nuestro primer teorema concierne al número de ceros que una función polinomial puede tener. Al contar los ceros de un polinomio, contamos cada cero tantas veces como sea su multiplicidad.

Teorema número de ceros Una función polinomial no puede tener más ceros que el valor de su grado.

Demostración La demostración está basada en el teorema del factor. Si r es un cero de una función polinomial f, entonces $f(r) = 0$ y, $x - r$ es un factor de $f(x)$. Por tanto, cada cero corresponde a un factor de grado 1. El resultado es consecuencia de que f no puede tener más factores de primer grado que el valor de su grado.

El teorema siguiente, llamado **Regla de los signos de Descartes,** proporciona información acerca del número y localización de los ceros de una función polinomial, de modo que sepamos dónde buscar los ceros. La regla de los signos de Descartes supone que el polinomio está escrito en potencias descendentes de x, y necesita que contemos el número de variaciones de signo de los coeficientes de $f(x)$ y $f(-x)$.

Por ejemplo, la siguiente función polinomial tiene dos variaciones en el signo de los coeficientes:

$$\begin{aligned} f(x) &= -3x^7 + 4x^4 + 3x^2 - 2x - 1 \\ &= \underbrace{-3x^7 + 0x^6 + 0x^5 + 4x^4}_{-\text{ a }+} + 0x^3 \underbrace{+ 3x^2 - 2x}_{+\text{ a }-} - 1 \end{aligned}$$

Observe que ignoramos los coeficientes cero en $0x^6$, $0x^5$ y $0x^3$ al contar el número de variaciones en el signo de $f(x)$. Reemplazando x por $-x$, obtenemos

$$f(-x) = 3x^7 + 4x^4 + 3x^2 \underbrace{+ 2x - 1}_{+\text{ a }-}$$

que tiene una variación de signo.

Teorema regla de los signos de Descartes

Sea f una función polinomial.

El número de ceros positivos de f es igual al número de variaciones en el signo de los coeficientes de $f(x)$, o es igual que ese número menos un entero par.
El número de ceros negativos de f es igual al número de variaciones en el signo de los coeficientes de $f(-x)$, o es igual a ese número menos un entero par.

No demostraremos la regla de los signos de Descartes, veamos cómo se utiliza.

EJEMPLO 1

Uso de la regla de los signos de Descartes para localizar ceros

Analizar los ceros de: $f(x) = 3x^6 - 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x - 3$

Solución

Debe haber un máximo de seis ceros, ya que el polinomio es de grado 6. Como hay tres variaciones en el signo de los coeficientes de $f(x)$, por la regla de los signos de Descartes esperamos tener tres o un cero positivos. Para continuar, veamos a $f(-x)$:

$$f(-x) = 3x^6 - 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 3$$

Hay tres variaciones de signo, así que esperamos tener tres o un cero negativos. De manera equivalente, sabemos que la gráfica de f tiene tres o una intersecciones-x positivas y tres o una intersecciones-x negativas.

Ahora resuelva el problema 1.

Aunque realmente no hemos encontrado los ceros en el ejemplo 1, sabemos algo acerca de su número y cuántos podrían ser positivos o negativos. El resultado siguiente, que se le pide demostrar en el ejercicio 3.5 (problema 74), es llamado **teorema de los ceros racionales** y proporciona información acerca de los ceros racionales de un polinomio con coeficientes enteros.

Teorema de los ceros racionales

Sea f una función polinomial de grado 1 o superior de la forma

$$\boxed{f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdot\cdot\cdot + a_1x + a_0 \qquad a_n \neq 0,\ a_0 \neq 0}$$

donde cada coeficiente es un entero. Si p/q, sin factores comunes, es un cero racional de f, entonces p debe ser un factor de a_0 y q un factor de a_n.

EJEMPLO 2

Lista de posibles ceros racionales

Enlistar los posibles ceros racionales de

$$f(x) = 2x^3 + 11x^2 - 7x - 6$$

Solución

Ya que f tiene coeficientes enteros, podemos usar el teorema de los ceros racionales. Primero, enlistamos todos los enteros p que son factores de $a_0 = -6$ todos los enteros q que son factores de $a_3 = 2$:

$$p: \quad \pm1, \pm2, \pm3, \pm6$$
$$q: \quad \pm1, \pm2$$

Ahora construimos todas las razones posibles p/q:

$$\frac{p}{q}: \quad \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$$

Si f tiene un cero racional debe encontrarse en esta lista, que contiene 12 posibilidades.

Ahora resuelva el problema 13.

Asegúrese de entender lo que dice el teorema de los ceros racionales: Para un polinomio con coeficientes enteros, *si* hay un cero racional, es uno de los que se enlistan. Puede suceder que no haya ceros racionales. La división sintética puede ser utilizada para probar cada posible cero racional con el fin de determinar si en realidad es un cero. Para hacer el trabajo más fácil primero se prueban los enteros. Continuemos con este ejemplo.

EJEMPLO 3 *Determinación de ceros racionales de una función polinomial*

Continuar trabajando el ejemplo 2 para encontrar los ceros de

$$f(x) = 2x^3 + 11x^2 - 7x - 6$$

Solución Reunimos toda la información que podamos acerca de los ceros:

PASO 1: Hay cuando mucho tres ceros.

PASO 2: Por la regla de los signos de Descartes, hay un cero positivo. También, como

$$f(-x) = -2x^3 + 11x^2 + 7x - 6$$

hay dos ceros, o ninguno, negativos.

PASO 3: Ahora usamos la lista de posibles ceros obtenida en el ejemplo 2: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$. Elegimos probar el posible cero racional 1 utilizando la división sintética:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 11 & -7 & -6 \\ & & 2 & 13 & 6 \\ \hline & 2 & 13 & 6 & 0 \end{array}$$

El residuo es cero. Por tanto, 1 es un cero y $x - 1$ es un factor de f. Las entradas en el renglón inferior de esta división sintética pueden ser usadas para factorizar:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 + 11x^2 - 7x - 6 \\ &= (x - 1)(2x^2 + 13x + 6) \end{aligned}$$

Ahora cualquier solución de la ecuación $2x^2 + 13x + 6 = 0$ será un cero de f. A causa de esto, llamamos a la ecuación $2x^2 + 13x + 6 = 0$. **ecuación reducida** de f. Ya que el grado de la ecuación reducida de f es menor que el de la ecuación original, trabajamos con la ecuación reducida para encontrar los ceros de f.

PASO 4: La ecuación reducida $2x^2 + 13x + 6 = 0$ es una ecuación cuadrática con discriminante $b^2 - 4ac = 169 - 48 = 121 > 0$. Por lo tanto, tiene dos soluciones reales que pueden ser encontradas por factorización:

$$2x^2 + 13x + 6 = (2x + 1)(x + 6) = 0$$

$$2x + 1 = 0 \quad \text{o} \quad x + 6 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \qquad\qquad x = -6$$

Los ceros de f son -6, $-\frac{1}{2}$, y 1.

Observe que los tres ceros de f encontrados en el ejemplo 3 están entre los dados en la lista de posibles ceros racionales en el ejemplo 2. También, observe que podemos escribir f en forma factorizada como

$$f(x) = 2x^3 + 11x^2 - 7x - 6 = (x - 1)(2x + 1)(x + 6) \tag{1}$$

EJEMPLO 4 *Determinación de ceros reales de una función polinomial*

Encontrar los ceros de: $f(x) = 3x^5 - 2x^4 - 15x^3 + 10x^2 + 12x - 8$

Solución Reunimos toda la información que podamos acerca de los ceros:

PASO 1: Hay cuando mucho cinco ceros.

PASO 2: Por la regla de los signos de Descartes, hay tres ceros, o uno, positivos. También como

$$f(-x) = -3x^5 - 2x^4 + 15x^3 + 10x^2 - 12x - 8$$

hay dos ceros, o ninguno, negativos.

PASO 3: Obtener la lista de posibles ceros racionales, escribimos los factores de p de $a_0 = -8$ y los factores q de $a_5 = 3$:

$$p\text{:}\quad \pm1,\ \pm2,\ \pm4,\ \pm8$$
$$q\text{:}\quad \pm1,\ \pm3$$

Los posibles ceros racionales consisten de todos los posibles cocientes p/q:

$$\frac{p}{q}\text{:}\quad \pm1,\ \pm2,\ \pm4,\ \pm8,\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{2}{3},\ \pm\frac{4}{3},\ \pm\frac{8}{3}$$

Podemos probar el posible cero racional 1 utilizando la división sintética:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 3 & -2 & -15 & 10 & 12 & -8 \\ & & 3 & 1 & -14 & -4 & 8 \\ \hline & 3 & 1 & -14 & -4 & 8 & 0 \end{array}$$

El residuo es cero. Por tanto, 1 es un cero y $x - 1$ es un factor. Como antes, utilizamos las entradas en el renglón inferior de esta división sintética para factorizar a f:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^5 - 2x^4 - 15x^3 + 10x^2 + 12x - 8 \\ &= (x - 1)(3x^4 + x^3 - 14x^2 - 4x + 8) \end{aligned}$$

Ahora trabajemos con la primera ecuación reducida de f:

$$3x^4 + x^3 - 14x^2 - 4x + 8 = 0$$

PASO 4: Sea $q_1(x) = 3x^4 + x^3 - 14x^2 - 4x + 8$. Por la regla de los signos de Descartes, q_1 tiene dos ceros, o ninguno, positivos. También como

$$q_1(-x) = 3x^4 - x^3 - 14x^2 + 4x + 8$$

q_1 tiene dos ceros, o ninguno, negativos.

PASO 5: Los posibles ceros racionales de q_1 son los mismos que se enlistaron anteriormente para f. Seleccionamos probar con 1 otra vez ya que podría ser una raíz repetida:

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 3 & 1 & -14 & -4 & 8 \\ & & 3 & 4 & -10 & -14 \\ \hline & 3 & 4 & -10 & -14 & -6 \end{array}$$

El residuo nos indica que 1 no es cero de q_1. Ahora probamos que -1:

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 3 & 1 & -14 & -4 & 8 \\ & & -3 & 2 & 12 & -8 \\ \hline & 3 & -2 & -12 & 8 & 0 \end{array}$$

Encontramos que -1 es un cero de q_1 y por lo tanto $x - (-1) = x + 1$ es un factor de q_1. En consecuencia, tenemos

$$f(x) = (x - 1)(x + 1)(3x^3 - 2x^2 - 12x + 8)$$

PASO 6: Ahora trabajamos con la segunda ecuación reducida de f:

$$3x^3 - 2x^2 - 12x + 8 = 0$$

Sea $q_2(x) = 3x^3 - 2x^2 - 12x + 8$. Por la regla de los signos de Descartes, q_2 tiene dos ceros, o ninguno, positivos. También, como

$$q_2(-x) = -3x^3 - 2x^2 + 12x + 8$$

q_2 tiene un cero negativo. La lista de posibles ceros racionales de q_2 es la misma que la de f. Sin embargo, ya que 1 no era cero de q_1, tampoco puede serlo de q_2. Además, el hecho de que -1 sea cero de q_1 no significa que no pueda ser cero de q_2 (esto es, podría ser una raíz repetida de q_1). Sabemos que hay un cero negativo (que podría no ser racional), así que probamos con -1 una vez más para determinar si es una raíz de q_2:

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 3 & -2 & -12 & 8 \\ & & -3 & 5 & 7 \\ \hline & 3 & -5 & -7 & 15 \end{array}$$

No lo es. A continuación, seleccionamos probar con -2:

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 3 & -2 & -12 & 8 \\ & & -6 & 16 & -8 \\ \hline & 3 & -8 & 4 & 0 \end{array}$$

Encontramos que -2 es un cero, de modo que $x - (-2) = x + 2$ es un factor. Por tanto, tenemos

$$f(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 2)(3x^2 - 8x + 4) \qquad (2)$$

PASO 7: La nueva ecuación reducida de f, $3x^2 - 8x + 4 = 0$, es cuadrática con un discriminante de $b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(3)(4) = 16$. Por lo tanto, esta ecuación tiene dos raíces reales y, en este caso, las encontramos factorizando:

$$\begin{gathered} 3x^2 - 8x + 4 = 0 \\ (3x - 2)(x - 2) = 0 \\ 3x - 2 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0 \\ x = \frac{2}{3} \qquad\qquad x = 2 \end{gathered}$$

Los ceros de f son -2, -1, $\frac{2}{3}$, 1, y 2.

Ahora resuelva el problema 25.

El procedimiento seguido en el ejemplo 4 para encontrar los ceros de un polinomio también puede ser utilizado para resolver ecuaciones polinomiales.

EJEMPLO 5 *Resolución de una ecuación polinomial*

Resolver la ecuación: $x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 24x^2 + 32x - 16 = 0$

Solución Las soluciones de esta ecuación son los ceros de la función polinomial

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 24x^2 + 32x - 16$$

PASO 1: Hay cuando mucho cinco soluciones reales.

PASO 2: Por la regla de los signos de Descartes, hay cinco, tres o una soluciones positivas. Como

$$f(-x) = -x^5 - 5x^4 - 12x^3 - 24x^2 - 32x - 16$$

no hay soluciones negativas.

PASO 3: Ya que $a_5 = 1$ y no hay soluciones negativas, las potenciales soluciones racionales son los enteros positivos 1, 2, 4, 8 y 16. Primero probamos la posible raíz racional 1 utilizando la división sintética:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1) & 1 & -5 & 12 & -24 & 32 & -16 \\ & & 1 & -4 & 8 & -16 & 16 \\ \hline & 1 & -4 & 8 & -16 & 16 & 0 \end{array}$$

Por tanto, 1 es una solución y

$$x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 24x^2 + 32x - 16 = (x - 1)(x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16)$$

Las restantes soluciones satisfacen la ecuación reducida

$$x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16 = 0$$

PASO 4: Las posibles soluciones racionales aún son 1, 2, 4, 8 y 16. Primero probamos 1 ya que puede ser una solución repetida:

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1) & 1 & -4 & 8 & -16 & 16 \\ & & 1 & -3 & 5 & -11 \\ \hline & 1 & -3 & 5 & -11 & 5 \end{array}$$

Por tanto, 1 no es una solución de la ecuación reducida. Ahora intentemos con 2:

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2) & 1 & -4 & 8 & -16 & 16 \\ & & 2 & -4 & 8 & -16 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & -8 & 0 \end{array}$$

Por tanto, 2 es una solución de la ecuación reducida y

$$x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 24x^2 + 32x - 16 = (x - 1)(x - 2)(x^3 - 2x^2 + 4x - 8)$$

Las restantes soluciones satisfacen la nueva ecuación reducida

$$x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$$

PASO 5: Ahora, las posibles soluciones racionales son 1, 2, 4 y 8. Sabemos que 1 no es una solución (¿sabe usted por qué no lo es?), de modo que empezamos con 2:

$$\begin{array}{r|rrrr} 2) & 1 & -2 & 4 & -8 \\ & & 2 & 0 & 8 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}$$

Por tanto, 2 es una solución de la nueva ecuación reducida y es una solución repetida de la ecuación original, así

$$x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 24x^2 + 32x - 16 = (x - 1)(x - 2)^2(x^2 + 4)$$

Las soluciones restantes satisfacen la ecuación reducida

$$x^2 + 4 = 0$$

la cual no tiene soluciones reales.

PASO 6: Por tanto, las soluciones reales son 1 y 2 (la última es una solución repetida).

Ahora resuelva el problema 37.

EJEMPLO 6 Determinación de los ceros reales de un polinomio

Usar la regla de los signos de Descartes y el teorema de los ceros racionales para encontrar los ceros reales de la función polinomial

$$g(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 2$$

Usar los ceros para factorizar en los números reales. Después haga la gráfica de g.

Solución PASO 1: Hay cuando mucho cinco ceros.

PASO 2: Hay cuatro, dos, o ninguno, ceros positivos. También, como

$$g(-x) = -x^5 - x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 2$$

hay un cero negativo.

PASO 3: Los posibles ceros racionales de g son ± 1, ± 2. Probemos con 1:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1) & 1 & -1 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ & & 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

Por tanto, 1 es un cero, de modo que $x - 1$ es un factor y

$$g(x) = (x - 1)(x^4 - x^2 - 2)$$

PASO 4: La ecuación reducida $x^4 - x^2 - 2 = 0$ es de forma cuadrática y puede ser factorizada como sigue:

$$\begin{aligned} x^4 - x^2 - 2 &= 0 \\ (x^2 - 2)(x^2 + 1) &= 0 \\ x^2 - 2 = 0 \qquad &\text{o} \quad x^2 + 1 = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} & \end{aligned}$$

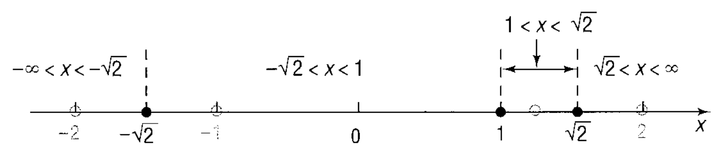
Ya que $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución real, la ecuación reducida sólo tiene dos soluciones $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$.

Por tanto, los ceros de g son $-\sqrt{2}$, 1, y $\sqrt{2}$. La forma factorizada de g en los números reales es

$$\begin{aligned} g(x) &= x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 2 \\ &= (x - 1)(x^4 - x^2 + 2) \\ &= (x - 1)(x^2 - 2)(x^2 + 1) \\ &= (x - 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 1) \end{aligned}$$

Ahora construyamos la figura 42:

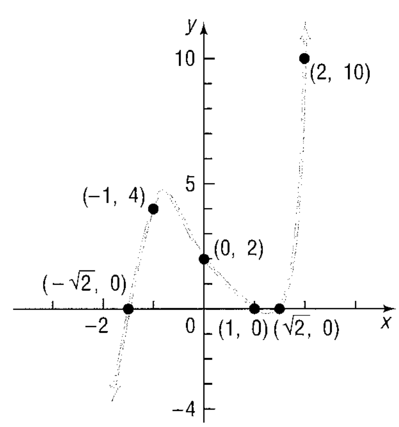
FIGURA 42



Número de prueba:	−2	−1	1.1	2
Valor de R:	−30	4	−0.17	10
Gráfica de R:	Por debajo del eje x	Por arriba del eje x	Por debajo del eje x	Por arriba del eje x
Punto sobre la gráfica:	(−2, −30)	(−1, 4)	(1.1, −0.17)	(2, 10)

La gráfica de g tiene cuando mucho cuatro puntos de retorno. Para valores grandes de x, la gráfica se comportará como la de $y = x^5$. La figura 43 ilustra la gráfica de g.

FIGURA 43
$g(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 2$



Verificación: Hacer la gráfica $g(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 2$. Utilizar TRACE para localizar los puntos de retorno y verificar las intersecciones-x.

Ahora resuelva el problema 47.

Al factor cuadrático $x^2 + 1$ que aparece en forma factorizada en el ejemplo 6 se le llama *irreducible*, ya que el polinomio $x^2 + 1$ no puede ser factorizado en los números reales. En general, decimos que un factor cuadrático $ax^2 + bx + c$ es **irreducible** si no puede ser factorizado en los números reales, esto es, si es primo en los números reales.

Consulte la función polinomial f del ejemplo 4. Encontramos que f tiene cinco ceros reales, de modo que, por el teorema del factor, su forma factorizada tendrá cinco factores lineales. La función polinomial g del ejemplo 6 tiene tres ceros reales, y su forma factorizada tiene tres factores lineales y un factor cuadrático irreducible. El resultado siguiente nos dice lo que debemos esperar cuando factorizamos un polinomio.

Teorema Toda función polinomial (con coeficientes reales) puede ser factorizada de manera única en un producto de factores lineales y/o factores cuadráticos irreducibles.

Probaremos este enunciado en la sección 3.7 y, de hecho, sacaremos varias conclusiones adicionales acerca de los ceros de una función polinomial. Vale la pena hacer notar una conclusión ahora. Si un polinomio (con coeficientes reales) es de grado impar, entonces debe tener al menos un factor lineal. (¿Advierte por qué?) Por lo tanto, tendrá al menos un cero real.

Corolario Una función polinomial (con coeficientes reales) de grado impar tiene al menos un cero real.

Resumen

Para obtener información acerca de los ceros reales de una función polinomial, siga estos pasos:

Procedimiento para encontrar los ceros reales de una función polinomial

PASO 1: Utilizar el grado del polinomio para determinar el número máximo de ceros.
PASO 2: Aplicar la regla de los signos de Descartes para determinar el número posible de ceros, positivos y negativos.
PASO 3: (a) Si el polinomio tiene coeficientes enteros, utilizar el teorema de los ceros racionales para identificar aquellos números racionales que potencialmente puedan ser ceros.
(b) Utilizar la división sintética para comprobar cada posible cero racional.
(c) Cada vez que se encuentre un cero (y por tanto un factor), repetir los pasos 2 y 3 sobre la ecuación reducida.
PASO 4: Cuando intente encontrar los ceros, recuerde utilizar (si es posible) las técnicas de factorización que ya conoce (productos especiales, factorización por agrupación, etcétera).

Si estos procedimientos fallan en la localización de todos los ceros, puede tener que conformarse con una "estimación" o "aproximación" de éstos. El objetivo de la sección siguiente es darle a conocer cómo "estimar o aproximar" los ceros reales de una función polinomial.

DESARROLLO HISTÓRICO

■ Existen fórmulas para solucionar ecuaciones polinomiales de tercer y cuarto grados que, a pesar de no ser muy prácticas, tienen cierto interés histórico.

Durante el siglo XVI en Italia, las competencias matemáticas fueron un pasatiempo muy popular y quienes poseían métodos para resolver problemas los mantenían en secreto. (Las soluciones que se publicaban ya eran del conocimiento público.) Nicolás de Brescia (1499-1557), comúnmente conocido como Tartaglia ("el tartamudo"), mantenía en secreto el método para resolver ecuaciones cúbicas (de tercer grado), lo que le dio una ventaja decisiva en los concursos. Girolamo Cardano (1501-1576) descubrió que Tartaglia conocía el secreto, y como estaba interesado en las ecuaciones cúbicas, le solicitó la solución a Tartaglia. Éste, renuente, vaciló por algún tiempo pero finalmente, haciéndole jurar a medianoche y a la luz de una vela conservar el secreto, le comunicó a Cardano el método. Cardano publicó la solución en su libro *Ars Magna* (1545) dándole a Tartaglia el crédito, pero descubriendo el secreto. Tartaglia explotó en amargas recriminaciones, y cada uno escribió panfletos que perjudicaban el linaje, carácter moral y matemático del otro. El método de Tartaglia es analizado en los problemas del 75 al 83 en el ejercicio 3.5.

La ecuación cuártica o bicuadrática (cuarto grado) fue resuelta por Ludovico Ferrari, estudiante de Cardano, y esta solución también fue incluida, con crédito y el respectivo permiso, en *Ars Magna.*

Se hicieron intentos, en la misma época, por resolver la ecuación de quinto grado pero todos fracasaron. A principios del siglo XIX, P. Ruffini, Niels Abel y Evaristo Galois encontraron maneras de demostrar que no es posible resolver ecuaciones de quinto grado por medio de fórmulas, pero esas demostraciones requerían de métodos nuevos. Los métodos de Galois eventualmente contribuyeron al desarrollo de gran parte del álgebra moderna. ■

Ejercicio 3.5

En los problemas del 1 al 12 indique el número máximo de ceros que puede tener cada función polinomial. Luego utilice la regla de los signos de Descartes para determinar cuántos ceros, positivos y negativos, puede tener cada función polinomial. No intente encontrar los ceros

1. $f(x) = -4x^7 + x^3 - x^2 + 2$
2. $f(x) = 5x^4 + 2x^2 - 6x - 5$
3. $f(x) = 2x^6 - 3x^2 - x + 1$
4. $f(x) = -3x^5 + 4x^4 + 2$
5. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2$
6. $f(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$
7. $f(x) = -x^4 + x^2 - 1$
8. $f(x) = x^4 + 5x^3 - 2$
9. $f(x) = x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$
10. $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$
11. $f(x) = x^6 - 1$
12. $f(x) = x^6 + 1$

En los problemas del 13 al 24, enliste los posibles ceros racionales de cada función polinomial pero no intente encontrarlos.

13. $f(x) = 3x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 1$
14. $f(x) = x^5 - x^4 + 2x^2 + 3$
15. $f(x) = x^5 - 6x^2 + 9x - 3$
16. $f(x) = 2x^5 - x^4 - x^2 + 1$
17. $f(x) = -4x^3 - x^2 + x + 2$
18. $f(x) = 6x^4 - x^2 + 2$
19. $f(x) = 3x^4 - x^2 + 2$
20. $f(x) = -4x^3 + x^2 + x + 2$
21. $f(x) = 2x^5 - x^3 + 2x^2 + 4$
22. $f(x) = 3x^5 - x^2 + 2x + 3$
23. $f(x) = 6x^4 + 2x^3 - x^2 + 2$
24. $f(x) = -6x^3 - x^2 + x + 3$

En los problemas del 25 al 36, utilice la regla de los signos de Descartes y el teorema de los ceros racionales para encontrar todos los ceros reales de cada función polinomial. Con los ceros así obtenidos, factorice f en los números reales.

25. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$
26. $f(x) = x^3 + 8x^2 + 11x - 20$
27. $f(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$
28. $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 1$

29. $f(x) = x^4 + x^2 - 2$
30. $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$
31. $f(x) = 4x^4 + 7x^2 - 2$
32. $f(x) = 4x^4 + 15x^2 - 4$
33. $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$
34. $f(x) = x^4 - x^3 - 6x^2 + 4x + 8$
35. $f(x) = 4x^5 - 8x^4 - x + 2$
36. $f(x) = 4x^5 + 12x^4 - x - 3$

En los problemas del 37 al 46 resuelva cada ecuación en el sistema de los números reales.

37. $x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$
38. $2x^3 + 3x^2 + 2x + 3 = 0$
39. $3x^3 + 4x^2 - 7x + 2 = 0$
40. $2x^3 - 3x^2 - 3x - 5 = 0$
41. $3x^3 - x^2 - 15x + 5 = 0$
42. $2x^3 - 11x^2 + 10x + 8 = 0$
43. $x^4 + 4x^3 + 2x^2 - x + 6 = 0$
44. $x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 18x + 9 = 0$
45. $x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 1 = 0$
46. $x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x - 2 = 0$

En los problemas del 47 al 56 encuentre las intersecciones de cada función polinomial $f(x)$. Encuentre los intervalos de x en los cuales la gráfica está por arriba del eje x y en los que está por debajo del eje x. Obtenga algunos otros puntos de la gráfica y conéctelos mediante una curva suave. [Sugerencia: Utilice la forma factorizada de f (véanse *los problemas del 27 al 36).]*

47. $f(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$
48. $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 1$
49. $f(x) = x^4 + x^2 - 2$
50. $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$
51. $f(x) = 4x^4 + 7x^2 - 2$
52. $f(x) = 4x^4 + 15x^2 - 4$
53. $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$
54. $f(x) = x^4 - x^3 - 6x^2 + 4x + 8$
55. $f(x) = 4x^5 - 8x^4 - x + 2$
56. $f(x) = 4x^5 + 12x^4 - x - 3$

En los problemas del 57 al 64 resuelva cada ecuación en el sistema de los números complejos

57. $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$
58. $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$
59. $x^4 + x^3 - x - 1 = 0$
60. $x^4 - x^3 + x - 1 = 0$
61. $x^4 + 3x^3 - x^2 - 12x - 12 = 0$
62. $x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 27x - 36 = 0$
63. $x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$
64. $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$
65. Una solución de la ecuación $x^3 - 8x^2 + 16x - 3 = 0$ es 3. Encuentre la suma de las soluciones restantes.
66. Una solución de la ecuación $x^3 + 5x^2 + 5x - 2 = 0$ es -2. Encuentre la suma de las soluciones restantes.
67. ¿ $\frac{1}{3}$ es un cero de $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 6x + 7$? Explique su respuesta.
68. ¿ $\frac{1}{3}$ es un cero de $f(x) = 4x^3 - 5x^2 - 3x + 1$? Explique su respuesta.
69. ¿ $\frac{3}{5}$ es un cero de $f(x) = 2x^6 - 5x^4 + x^3 - x + 1$? Explique su respuesta.
70. ¿ $\frac{2}{3}$ es un cero de $f(x) = x^7 + 6x^5 - x^4 + x + 2$? Explique su respuesta.
71. ¿Cuál será la longitud de la arista de un cubo del que después de cortarle a una de sus caras una pulgada de grosor el volumen restante es de 294 pulgadas cúbicas?
72. ¿Cuál es la longitud de la arista de un cubo cuyo volumen podría duplicarse por un aumento de 6 centímetros a un lado, otro aumento de 12 centímetros a un segundo lado y una disminución de 4 centímetros al tercer lado?
73. Sea $f(x)$ una función polinomial cuyos coeficientes son enteros. Suponga que r es un cero real de f y que el coeficiente principal de f es 1. Utilice el teorema de los ceros racionales para demostrar que r es un entero o un número irracional.
74. Demostrar el teorema de los ceros racionales. [*Sugerencia:* Sea p/q, una solución del polinomio $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, cuyos coeficientes son todos enteros, y donde p y q no tienen factores comunes excepto 1 y -1. Demostrar que $a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0$. Ahora, ya que p es un factor de los primeros n términos de esta ecuación, p también debe ser un factor del término a_0q^n. Como p no es factor de q (¿sabe usted por qué?), p debe ser un factor de a_0. De manera análoga, q debe ser un factor de a_n.]

En los problemas del 75 al 83 desarrolle la solución de Tartaglia-Cardano de la ecuación cúbica y muestre por qué es completamente impráctica.

75. Demuestre que la ecuación cúbica general $y^3 + by^2 + cy + d = 0$ puede ser transformada en una ecuación de la forma $x^3 + px + q = 0$ utilizando la sustitución $y = x - b/3$.

76. En la ecuación $x^3 + px + q = 0$, reemplace x por $H + K$. Sea $3HK = -p$, y demuestre quet $H^3 + K^3 = -q$. [*Sugerencia:* $3H^2K + 3HK^2 = 3HKx$.]

77. Con base en el problema 76, tenemos las dos ecuaciones

$$3HK = -p \quad \text{y} \quad H^3 + K^3 = -q$$

Resuelva para K en $3HK = -p$ y sustituya en $H^3 + K^3 = -q$. Luego demuestre que

$$H = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

[*Sugerencia:* Busque una ecuación que esté en forma cuadrática.]

78. Utilice la solución H del problema 77 y la ecuación $H^3 + K^3 = -q$ para demostrar que

$$K = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

79. Utilice los resultados de los problemas del 76 al 78 para demostrar que la solución de $x^3 + px + q = 0$ es

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

80. Utilice el resultado del problema 79 para resolver la ecuación $x^3 - 6x - 9 = 0$.

81. Con una calculadora y el resultado del problema 79 resuelva la ecuación $x^3 + 3x - 14 = 0$.

82. Aplique los métodos de este capítulo para resolver la ecuación $x^3 + 3x - 14 = 0$.

83. *Requiere de los números complejos.* Demuestre que la fórmula deducida en el problema 79 conduce a la raíz cúbica de un número complejo cuando se aplica a la ecuación $x^3 - 6x + 4 = 0$. Utilice los métodos de este capítulo para resolver la ecuación.

84. Una función f tiene la propiedad de que $f(2 + x) = f(2 - x)$ para todo x. Si f tiene exactamente cuatro ceros reales, encuentre la suma de estos ceros.

Aproximación a los ceros reales de una función polinomial

Algunas veces los procedimientos analizados en la sección 3.5 proporcionan información limitada acerca de los ceros de un polinomio. *Veamos* un ejemplo.

EJEMPLO 1 *Determinación de los ceros reales de una función polinomial*

Analizar los ceros de: $f(x) = x^5 - x^3 - 1$

Solución PASO 1: f tiene cuando mucho cinco ceros.

PASO 2: f tiene un cero positivo, y ya que $f(-x) = -x^5 + x^3 - 1$, f tiene dos ceros, o ninguno, negativos.

PASO 3: Los posibles ceros racionales son ± 1, ninguno de los cuales realmente es un cero. Concluimos que f tiene un cero positivo irracional y tal vez dos ceros irracionales negativos.

Para obtener más información acerca de los ceros del polinomio del ejemplo 1, necesitamos algunos resultados adicionales.

Cotas superior e inferior

La búsqueda de ceros en una función polinomial puede reducirse un poco si podemos encontrar sus cotas superior e inferior. Un número M es una **cota superior** para los ceros de un polinomio f si ningún cero de f es mayor que M. El número m es una **cota inferior** si ningún cero es menor que m.

Por lo tanto, si m es una cota inferior y M una cota superior para los ceros de un polinomio f, entonces

$$m \leq \text{cualquier cero de } f \leq M$$

Una ventaja inmediata de conocer los valores de una cota inferior m y una cota superior M es que, para polinomios con coeficientes enteros, puede permitirle eliminar algunos posibles ceros racionales, esto es, cualesquiera que estén fuera del intervalo $[n, M]$. El teorema siguiente nos dice cómo localizar cotas inferiores y superiores.

Teorema cotas de los ceros

Sea f una función polinomial cuyo coeficiente principal es positivo.

Si $M > 0$ es un número real y el tercer renglón en el proceso de división sintética de f entre $x - M$ sólo tiene números que son positivos o cero, entonces M es una cota superior para los ceros de f.

Si $m < 0$ es un número real y el tercer renglón en el proceso de división sintética de f entre $x - m$ tiene sólo números que son alternadamente positivos (o cero) y negativos (o cero), entonces m es una cota inferior para los ceros de f. ∎

Demostración (bosquejo)

Sólo daremos un bosquejo de la demostración de la primera parte del teorema. Suponga que M es un número real positivo, y el tercer renglón en el proceso de división sintética del polinomio f entre $x - M$ sólo tiene números que son positivos o cero. Entonces, hay un cociente q y un residuo R de modo que

$$f(x) = (x - M)q(x) + R$$

donde los coeficientes de $q(x)$ son positivos o cero y el residuo $R \geq 0$. Así, para cualquier $x > M$, debemos tener $x - M > 0$, $q(x) > 0$, y $R \geq 0$, de modo que $f(x) > 0$. Esto es, no hay ceros de f mayores que M. ∎

EJEMPLO 2

Determinación de las cotas superior e inferior para los ceros

Encontrar cotas superior e inferior para los ceros de: $f(x) = x^5 - x^3 - 1$

Solución

Al buscar una cota superior para los ceros, la práctica común es empezar con 1 y seguir con 2, 3, . . . , hasta que en el tercer renglón del proceso de división sintética se tengan sólo números positivos o cero. Por tanto, empezamos con 1:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ & & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrrr} 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ & & 2 & 4 & 6 & 12 & 24 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 6 & 12 & 23 \end{array}$$

Con 2, el tercer renglón sólo tiene números positivos; por lo tanto 2 es una cota superior.

Para obtener una cota inferior para los ceros, empezamos con -1 y continuamos con -2, -3, . . . , hasta que en el tercer renglón del proceso de división sintética se tengan números que alternen en signo

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ & & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}$$

Cuenta como positivo   Cuenta como negativo   Cuenta como positivo

Puesto que las entradas alternan en signo, -1 es una cota inferior. Por lo tanto, los ceros de f están entre -1 y 2.

Ahora resuelva el problema 1.

Nota: Al determinar las cotas inferiores, un cero en el renglón inferior seguido por una entrada diferente de cero puede ser contado como positivo o negativo, según sea necesario. Si la siguiente entrada también es un cero, debe ser contada de signo opuesto a como fue contado el cero anterior (consulte el ejemplo 2).

En el ejemplo 2 encontramos que los ceros de $f(x) = x^5 - x^3 - 1$ están en el intervalo $[-1, 2]$. Sin embargo, recuerde que al buscar las cotas inferior -1 y superior 2, sólo probamos con enteros. Si probáramos con otros números positivos menores que 2 y otros negativos mayores que -1, podríamos mejorar las cotas y encontrar un intervalo más pequeño que contenga los ceros de f. Pero el esfuerzo necesario para hacer esto generalmente no se compensa ya que hay métodos más eficientes. *Veamos* uno de tales métodos.

Teorema del valor intermedio

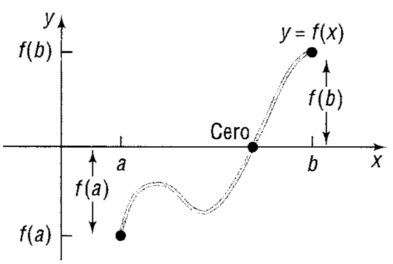
El enunciado siguiente llamado **teorema del valor intermedio,** está basado en el hecho de que la gráfica de una función polinomial es continua; esto es, no tiene "saltos" o "cortes".

Teorema del valor intermedio

Sea f una función polinomial. Si $a < b$ y si $f(a)$ y $f(b)$ son de signos opuestos, entonces hay al menos un cero de f entre a y b.

Aunque la demostración de este enunciado demanda métodos avanzados de cálculo, es fácil "ver" por qué es verdadero. *Véase* la figura 44.

FIGURA 44
Si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, hay un cero entre a y b.



EJEMPLO 3

Uso del teorema del valor intermedio para localizar ceros

Demostrar que $f(x) = x^5 - x^3 - 1$ tiene un cero entre 1 y 2.

Solución

Sabemos del ejemplo 1 que f tiene exactamente un cero positivo. Ahora, remitámonos a la solución del ejemplo 2, donde usamos la división sintética para dividir f entre $x - 1$ y después entre $x - 2$. De allí, vemos que

$$f(1) = -1 \quad \text{y} \quad f(2) = 23$$

Ya que $f(1) < 0$ y $f(2) > 0$, se deduce del Teorema del valor intermedio que f tiene un cero entre 1 y 2.

Observemos que el cero entre 1 y 2 es irracional, pues encontramos en el ejemplo 1 que los únicos ceros racionales posibles son -1 y 1.

Ahora resuelva el problema 7.

Podemos utilizar el teorema del valor intermedio para obtener una aproximación mejor al cero de una función f como sigue:

Aproximación de los ceros de una función polinomial

PASO 1: Encontrar dos enteros consecutivos a y $a + 1$ tales que f tenga un cero entre ellos.
PASO 2: Dividir el intervalo $[a, a + 1]$ en 10 subintervalos iguales.
PASO 3: Evaluar f en cada extremo de los subintervalos hasta que se pueda aplicar el teorema del valor intermedio; ese intervalo contiene entonces un cero.
PASO 4: Repita el proceso empezando en el paso 2 hasta que se alcance la precisión deseada.

EJEMPLO 4 *Aproximación de los ceros de una función polinomial*

Encontrar el cero positivo de $f(x) = x^5 - x^3 - 1$ con dos decimales exactos.

Solución Del ejemplo 3 sabemos que el cero positivo está entre 1 y 2. Dividimos el intervalo $[1, 2]$ en 10 subintervalos iguales: $[1, 1.1]$, $[1.1, 1.2]$, $[1.2, 1.3]$, $[1.3, 1.4]$, $[1.4, 1.5]$, $[1.5, 1.6]$, $[1.6, 1.7]$, $[1.7, 1.8]$, $[1.8, 1.9]$, $[1.9, 2]$. Ahora, encontremos el valor de f en cada extremo hasta que se pueda aplicar el teorema del valor intermedio. El método más sencillo es escribir $f(x)$ en forma anidada y utilizar una calculadora. Por tanto, escribimos

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5 - x^3 - 1 \\ &= (x^2 - 1) \cdot x \cdot x \cdot x - 1 = (x \cdot x - 1) \cdot x \cdot x \cdot x - 1 \end{aligned}$$

$$f(1.0) = -1 \qquad f(1.2) = -0.23968$$
$$f(1.1) = -0.72049 \qquad f(1.3) = 0.51593$$

Podemos detenernos aquí y concluir que el cero está entre 1.2 y 1.3. Ahora dividimos el intervalo $[1.2, 1.3]$ en 10 subintervalos y procedemos a evaluar f en cada extremo:

$$f(1.20) = -0.23968 \qquad f(1.23) = -0.0455613$$
$$f(1.21) = -0.1778185 \qquad f(1.24) = 0.025001$$
$$f(1.22) = -0.1131398$$

Concluimos que el cero está entre 1.23 y 1.24 y, así, el cero es 1.23, con dos decimales exactas.

Comentario: Utilizar la gráfica de $f(x) = x^5 - x^3 - 1$ para concluir que f tiene un cero positivo. Luego utilizar ZOOM y TRACE para aproximarlo con dos decimales exactos.

Hay muchas otras técnicas numéricas para aproximar los ceros de un polinomio. La esbozada en el ejemplo 4 (una variación del *método de bisección*) tiene las ventajas de que siempre funciona, puede ser programada muy fácilmente en una computadora, y cada vez que se aplica nos da un decimal adicional de precisión. *Véase* el problema 33 para el método de bisección, donde se ubica al cero en una sucesión de intervalos, con cada nuevo intervalo de la mitad de longitud que el precedente.

Ejercicio 3.6

En los problemas del 1 al 6 encuentre cotas superior e inferior para los ceros de cada función polinomial.

1. $f(x) = 2x^3 + x^2 - 1$

2. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 4$

3. $f(x) = x^3 - 5x^2 - 11x + 11$

4. $f(x) = 2x^3 - x^2 - 11x - 6$

5. $f(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 9$

6. $f(x) = 4x^4 - 12x^3 + 27x^2 - 54x + 81$

En los problemas del 7 al 12 utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que cada función polinomial tiene un cero en el intervalo dado.

7. $f(x) = 8x^4 - 2x^2 + 5x - 1$; $[0, 1]$

8. $f(x) = x^4 + 8x^3 - x^2 + 2$; $[-1, 0]$

9. $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 8x + 2$; $[-5, -4]$

10. $f(x) = 3x^3 - 10x + 9$; $[-3, -2]$

11. $f(x) = x^5 - x^4 + 7x^3 - 7x^2 - 18x + 18$; $[1.4, 1.5]$

12. $f(x) = x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 6x^2 + x + 2$; $[1.7, 1.8]$

En los problemas del 13 al 16 cada función polinomial tiene exactamente un cero positivo. Utilice el método del ejemplo 4 para aproximar ese cero con dos decimales exactos.

13. $f(x) = x^3 + x^2 + x - 4$

14. $f(x) = 2x^4 + x^2 - 1$

15. $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 8$

16. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 20$

En los problemas del 17 al 20 cada ecuación tiene una solución r *en el intervalo indicado. Utilice el método del ejemplo 4 para aproximar esa solución con dos decimales exactos.*

17. $8x^4 - 2x^2 + 5x - 1 = 0$; $0 \le r \le 1$

18. $x^4 + 8x^3 - x^2 + 2 = 0$; $-1 \le r \le 0$

19. $2x^3 + 6x^2 - 8x + 2 = 0$; $-5 \le r \le -4$

20. $3x^3 - 10x + 9 = 0$; $-3 \le r \le -2$

En los problemas del 21 al 24 aproxime el cero positivo con dos decimales exactos.

21. $f(x) = x^3 + x^2 + x - 4$

22. $f(x) = 2x^4 + x^2 - 1$

23. $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 8$

24. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 20$

En los problemas del 25 al 28 aproxime las soluciones correctas con dos decimales exactos.

25. $8x^4 - 2x^2 + 5x - 1 = 0$

26. $x^4 + 8x^3 - x^2 + 2 = 0$

27. $2x^3 + 6x^2 - 8x + 2 = 0$

28. $3x^3 - 10x + 9 = 0$

29. Suponga que se le da una ecuación polinomial para resolver. Escriba un breve párrafo esbozando su estrategia.

30. Suponga que los posibles ceros racionales de una función polinomial son ± 3 y ± 7. Explique por qué se deduce del teorema de las cotas inferior y superior, que es preferible probar primero con ± 3 antes que con ± 7.

31. *Ejercicio de programación.* Escriba un programa que estime el cero positivo de una función polinomial a cualquier grado deseado de precisión. La entrada debe consistir de los coeficientes del polinomio, en orden descendente, seguidos por el grado N de precisión requerida (esto es, el cero será estimado con una precisión de 10^{-N}), seguido por dos enteros consecutivos entre los cuales estará el cero buscado. La salida consistirá de dos números decimales entre los cuales estará el cero buscado. El programa debe tener una subrutina que escriba el polinomio en forma anidada.

32. *Ejercicio de programación.* Modifique el programa del problema 31 para incluir la localización de los dos enteros consecutivos entre los cuales estará el cero buscado.

33. *Método de bisección para aproximar los ceros de una función f.* Empezamos con dos enteros consecutivos, a y $a + 1$, tales que $f(a)$ y $f(a + 1)$ sean de signos opuestos. Evalúe f en el punto medio m_1 de a y $a + 1$. Si $f(m_1) = 0$, entonces m_1 es el cero de f, y habremos terminado. De otra forma, $f(m_1)$ es de signo opuesto a $f(a)$ o $f(a + 1)$. Suponga que $f(a)$ y $f(m_1)$ son de signos opuestos. Ahora evalúe f en el punto medio m_2 de a y m_1. Repita este proceso hasta que el grado deseado de precisión se haya alcanzado. Observe que cada interacción coloca al cero en un intervalo cuya longitud es la mitad del intervalo precedente. Utilice el método de bisección para resolver los problemas del 13 al 20.

3.7

Polinomios complejos; teorema fundamental del álgebra

Una variable z en el sistema de los números complejos es llamada **variable compleja.** Una **función polinomial compleja** f de grado n tiene la forma

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdot \cdot \cdot + a_1 z + a_0 \tag{1}$$

donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son números complejos, $a_n \neq 0$, y n es un entero no negativo. Aquí, a_n es llamado **coeficiente principal** de f. Un número complejo r es llamado **cero** (complejo) de una función compleja f si $f(r) = 0$.

En el capítulo 2 descubrimos que algunas ecuaciones cuadráticas no tienen soluciones reales, pero que en el sistema de los números complejos toda ecuación cuadrática tiene una solución, real o compleja. El teorema siguiente, demostrado por Karl Friedrich Gauss (1777-1855) cuando tenía 22 años de edad,* amplía el concepto a polinomios complejos. De hecho, este enunciado es tan importante y útil que se le ha reconocido como el **teorema fundamental del álgebra**.

Teorema fundamental del álgebra Toda función polinomial compleja $f(z)$ de grado $n \geq 1$ tiene al menos un cero complejo. ■

No probaremos este enunciado pues la demostración se sale del alcance de este libro. Sin embargo, usando el teorema fundamental del álgebra y el teorema del factor, podemos probar lo siguiente:

Teorema Toda función polinomial compleja $f(z)$ de grado $n \geq 1$ puede ser factorizada en n factores lineales (no necesariamente distintos) de la forma

$$\boxed{f(z) = a_n(z - r_1)(z - r_2) \cdot \ldots \cdot (z - r_n) \qquad (2)}$$

donde $a_n, r_1, r_2, \ldots, r_n$ son números complejos.

Demostración Sea

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

Por el teorema fundamental del álgebra, f tiene al menos un cero, digamos, r_1. Entonces, por el teorema del factor, $z - r_1$ es un factor, y

$$f(z) = (z - r_1)q_1(z)$$

donde $q_1(z)$ es un polinomio complejo de grado $n - 1$ cuyo coeficiente principal es a_n. Nuevamente, por el teorema fundamental del álgebra, el polinomio complejo $q_1(z)$ tiene al menos un cero, digamos, r_2. Por el teorema del factor, $q_1(z)$ tiene el factor $z - r_2$, de modo que

$$q_1(z) = (z - r_2)q_2(z)$$

donde $q_2(z)$ es un polinomio complejo de grado $n - 2$ cuyo coeficiente principal es a_n. En consecuencia,

$$f(z) = (z - r_1)(z - r_2)q_2(z)$$

Al repetir este argumento n veces, finalmente llegamos a

$$f(z) = (z - r_1)(z - r_2) \cdot \ldots \cdot (z - r_n)q_n(z)$$

*En total, Gauss dio cuatro demostraciones diferentes de este teorema, el primero, en 1799, fue tema de su disertación doctoral.

donde $q_n(z)$ es un polinomio complejo de grado $n - n = 0$ y cuyo coeficiente principal es a_n. Por lo tanto, $q_n(z) = a_n z^0 = a_n$, y así

$$f(z) = a_n(z - r_1)(z - r_2) \cdot \ldots \cdot (z - r_n)$$

Polinomios complejos con coeficientes reales

Podemos utilizar el teorema fundamental del álgebra para obtener información valiosa acerca de los ceros de polinomios complejos cuyos coeficientes son números reales.

Teorema

Sea $f(z)$ un polinomio complejo cuyos coeficientes son reales. Si $r = a + bi$ es un cero de f, entonces el complejo conjugado $\bar{r} = a - bi$ también es un cero de f.

En otras palabras, para polinomios complejos cuyos coeficientes son números reales, los ceros aparecen en pares conjugados.

Demostración

Sea

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdot \cdot \cdot + a_1 z + a_0$$

donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son números reales y $a_n \neq 0$. Si r es un cero de f, entonces $f(r) = 0$, de modo que

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdot \cdot \cdot + a_1 r + a_0 = 0$$

Tomamos el conjugado de ambos lados para obtener

$$\overline{a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdot \cdot \cdot + a_1 r + a_0} = \bar{0}$$

$$\overline{a_n r^n} + \overline{a_{n-1} r^{n-1}} + \cdot \cdot \cdot + \overline{a_1 r} + \overline{a_0} = \bar{0}$$

$$\overline{a_n}(\bar{r})^n + \overline{a_{n-1}}(\bar{r})^{n-1} + \cdot \cdot \cdot + \overline{a_1}\bar{r} + \overline{a_0} = \bar{0}$$

$$a_n(\bar{r})^n + a_{n-1}(\bar{r})^{n-1} + \cdot \cdot \cdot + a_1\bar{r} + a_0 = 0$$

Esta última ecuación establece que $f(\bar{r}) = 0$; esto es, $\bar{r}$ es un cero de f.

El valor de este enunciado debe quedar claro. Una vez enterados de que, digamos, $3 + 4i$ es un cero de un polinomio con coeficientes reales, entonces sabemos que $3 - 4i$ también es un cero. El teorema tiene un corolario importante.

Corolario

Un polinomio complejo f de grado impar con coeficientes reales tiene al menos un cero real.

Demostración

Ya que los ceros complejos aparecen como pares conjugados en un polinomio complejo con coeficientes reales, siempre habrá un número par de ceros que no son números reales. En consecuencia, ya que f es de grado impar, uno de sus ceros tiene que ser un número real.

Por ejemplo, el polinomio $f(z) = z^5 - 3z^4 + 4z^3 - 5$ tiene al menos un cero que es un número real, ya que f es de grado 5 (impar) y tiene coeficientes reales.

Ahora podemos probar el teorema que enunciamos al final de la sección 3.5.

Teorema Toda función polinomial con coeficientes reales puede ser factorizada de manera única en los números reales en un producto de factores lineales y/o, factores cuadráticos irreducibles.

Demostración Todo polinomio complejo f de grado n tiene exactamente n ceros y puede ser factorizado en un producto de n factores lineales. Y cuando sus coeficientes son reales, los ceros que sean números complejos siempre aparecerán por pares conjugados. Como resultado de esto, si $r = a + bi$ es un cero complejo, entonces también $\bar{r} = a - bi$ lo es. En consecuencia, cuando los factores lineales $z - r$ y $z - \bar{r}$ de f son multiplicados, tenemos

$$(z - r)(z - \bar{r}) = z^2 - (r + \bar{r})z + r\bar{r} = z^2 - 2az + a^2 + b^2$$

Este polinomio de segundo grado tiene coeficientes reales y es irreducible (en los números reales). Por lo tanto, los factores de f, o son lineales o son cuadráticos irreducibles.

EJEMPLO 1 *Uso del teorema de pares conjugados*

Un polinomio f de grado 5 cuyos coeficientes son números reales tiene los ceros 1, $5i$ y $1 + i$. Encontrar los otros dos ceros.

Solución Ya que los ceros conjugados aparecen como pares conjugados, se deduce que $-5i$, el conjugado de $5i$ y $1 - i$, el conjugado de $1 + i$, son los dos ceros que faltan.

Ahora resuelva el problema 1.

Polinomios con coeficientes complejos

El algoritmo de la división para polinomios (*véase* la sección 3.4) es cierto para polinomios con coeficientes complejos. Como consecuencia de esto, el teorema del residuo y el del factor también son ciertos. De hecho, el proceso de división sintética también funciona para polinomios con coeficientes complejos

EJEMPLO 2 *Verificación de un cero complejo*

Utilice la división sintética y el teorema del factor para demostrar que $1 + 2i$ es un cero de

$$f(z) = (1 + i)z^2 + (2 - i)z + (3 - 4i)$$

Solución Utilizamos división sintética y dividimos $f(z)$ entre $z - (1 + 2i)$:

$$\begin{array}{r|rrr} 1+2i & 1+i & 2-i & 3-4i \\ & & -1+3i & -3+4i \\ \hline & 1+i & 1+2i & 0 \end{array}$$

Por tanto, $z - (1 + 2i)$ es un factor, y $1 + 2i$ es un cero.

Por supuesto, pudimos haber demostrado que $1 + 2i$ es un cero del polinomio $f(z)$ en el ejemplo 2 utilizando sustitución como sigue:

$$\begin{aligned} f(1 + 2i) &= (1 + i)(1 + 2i)^2 + (2 - i)(1 + 2i) + (3 - 4i) \\ &= -7 + i + 4 + 3i + 3 - 4i = 0 \end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 23.

Con base en la ecuación (2) podemos afirmar que un polinomio complejo f de grado n tiene n factores lineales. Estos n factores lineales no tienen que ser distintos; algunos pueden repetirse más de una vez. Cuando un factor lineal $z - r$ aparece exactamente m veces en la forma factorizada de f, entonces r es llamada **cero de multiplicidad *m*** de f. Esto nos lleva a la siguiente conclusión.

Teorema Si un cero de multiplicidad m de un polinomio complejo f es contado m veces, entonces un polinomio complejo f de grado $n \geq 1$ tendrá exactamente n ceros.

EJEMPLO 3 *Enlistar todos los ceros de una función polinomial*

La función polinomial compleja

$$f(z) = (2 + i)(z - 5)^3(z + i)^2[z - (3 + i)]^4(z - i)$$

de grado 10 tiene a $2 + i$ como coeficiente principal. A continuación se enlistan sus ceros

5:	Multiplicidad	3
$-i$:	Multiplicidad	2
$3 + i$:	Multiplicidad	4
i:	Multiplicidad	1
Grado:		10

EJEMPLO 4 *Uso de los ceros para construir un polinomio*

Construir el polinomio $f(z)$ con coeficientes complejos de grado 3 y los siguientes ceros:

$1 + i$: Multiplicidad 1

$-i$: Multiplicidad 2

Solución Como $1 + i$ es un cero de multiplicidad 1 y $-i$ es un cero de multiplicidad 2, entonces $z - (1 + i)$ y $(z + i)^2$ son factores de f. Por lo tanto, $f(z)$ es de la forma

$$\begin{aligned} f(z) &= [z - (1 + i)](z + i)^2 \\ &= [z - (1 + i)](z^2 + 2iz - 1) \\ &= z^3 + (-1 + i)z^2 + (1 - 2i)z + 1 + i \end{aligned}$$

Aunque otros polinomios con coeficientes complejos tienen los tres ceros requeridos, los únicos de grado 3 serán $f(z)$ o $kf(z)$, donde $k \neq 0$ es algún número complejo.

Ejercicio 3.7

En los problemas del 1 al 10 se da información acerca de un polinomio complejo $f(z)$ cuyos coeficientes son números reales. Encuentre los restantes ceros de f.

1. Grado 3; ceros: $3, 4 - i$

2. Grado 3; ceros: $4, 3 + i$

3. Grado 4; ceros: $i, 1 + i$

4. Grado 4; ceros: $1, 2, 2 + i$

5. Grado 5; ceros: 1, i, $2i$
6. Grado 5; ceros: 0, 1, 2, i
7. Grado 4; ceros: i, 2, -2
8. Grado 4; ceros: $2 - i$, $-i$
9. Grado 6; ceros: 2, $2 + i$, $-3 - i$, 0
10. Grado 6; ceros: i, $3 - 2i$, $-2 + i$

En los problemas 11 y 12 indique por qué los datos dados son contradictorios.

11. $f(z)$ es un polinomio complejo de grado 3 con coeficientes reales; sus ceros son $4 + i$, $4 - i$, y $2 + i$.
12. $f(z)$ es un polinomio complejo de grado 3 con coeficientes reales; sus ceros son 2, i, y $3 + i$.
13. $f(z)$ es un polinomio complejo de grado 4 con coeficientes reales; tres de sus ceros son 2, $1 + 2i$, y $1 - 2i$. Explique por qué el cero que falta debe ser un número real
14. $f(z)$ es un polinomio complejo de grado 4 con coeficientes reales; dos de sus ceros son -3 y $4 - i$. Explique por qué uno de los restantes ceros debe ser un número real. Anote uno de los ceros que faltan.
15. Encuentre todos los ceros de $f(z) = z^3 - 1$.
16. Encuentre todos los ceros de $f(z) = z^4 - 1$.

En los problemas del 17 al 22 evalúe cada función polinomial compleja f en $z = 1 + i$.

17. $f(z) = iz - 3$
18. $f(z) = 3z + i$
19. $f(z) = 3z^2 - z$
20. $f(z) = (4 + i)z^2 + 5 - 2i$
21. $f(z) = z^3 + iz - 1 + i$
22. $f(z) = iz^3 - 2z^2 + 1$

En los problemas del 23 al 28 utilice la división sintética para encontrar el valor de $f(r)$.

23. $f(z) = 5z^5 - iz^4 + 2;\quad r = 1 + i$
24. $f(z) = iz^4 + (2 + i)z^2 - z;\quad r = 1 - i$
25. $f(z) = (1 + i)z^4 - z^3 + iz;\quad r = 2 - i$
26. $f(z) = 2iz^3 + 8z^2 - 4iz + 1;\quad r = 2 + i$
27. $f(z) = iz^5 + iz^3 + iz;\quad r = 1 + 2i$
28. $f(z) = z^4 + z^2 + 1;\quad r = 1 - 2i$

En los problemas del 29 al 34 construya un polinomio $f(z)$ con coeficientes complejos que tenga el grado y ceros dados.

29. Grado 3; ceros: $3 + 2i$, multiplicidad 1; 4, multiplicidad 2
30. Grado 3; ceros: i, multiplicidad 2; $1 + 2i$, multiplicidad 1
31. Grado 3; ceros: 2, multiplicidad 1; $-i$, multiplicidad 1; $1 + i$, multiplicidad 1
32. Grado 3; ceros: i, multiplicidad 1; $4 - i$, multiplicidad 1; $2 + i$, multiplicidad 1
33. Grado 4; ceros: 3, multiplicidad 2; $-i$, multiplicidad 2
34. Grado 4; ceros: 1, multiplicidad 3; $1 + i$, multiplicidad 1

Repaso del capítulo

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Función cuadrática	$f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$	Vértice: $(-b/2a, f(-b/2a))$ Eje: La recta $x = -b/2a$ La parábola abre hacia arriba si $a > 0$. La parábola abre hacia abajo si $a < 0$.
Función potencia	$f(x) = x^n$, $n \geq 2$ es par	Función par: Pasa por $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$ Abre hacia arriba
	$f(x) = x^n$, $n \geq 3$ es impar	Función impar: Pasa por $(-1, -1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$ Creciente
Función polinomial	$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, $a_n \neq 0$	Cuando mucho $n - 1$ puntos de retorno; para valores grandes de n se comporta como $y = a_nx^n$

Función racional	$R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, p, q son funciones polinominales en términos más simples *Véanse* los pasos del 1 al 6 en la página 121
Ceros de un polinomio f	Números para los cuales $f(x) = 0$; estas son las intersecciones-x de la gráfica de f.
Teorema del residuo	Si un polinomio $f(x)$ es dividido entre $x - c$, entonces el residuo es $f(c)$.
Teorema del factor	$x - c$ es un factor del polinomio $f(x)$ si, y sólo si $f(c) = 0$.
Regla de los signos de Descartes	Sea f una función polinomial. El número de ceros positivos de f es igual al número de variaciones en el signo de los coeficientes de $f(x)$, o es igual a ese número menos algún entero par. El número de ceros negativos de f es igual al número de variaciones en el signo de los coeficientes de $f(-x)$, o es igual a ese número menos algún entero par.
Teorema de los ceros racionales	Sea f una función polinomial de grado 1 o mayor en la forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0,\ a_0 \neq 0$ donde cada coeficiente es un entero. Si p/q, no tienen factores comunes, excepto 1 y -1, y p/q es un cero de f, entonces p debe ser un factor de a_0 y q un factor de a_n.
Teorema del valor intermedio	Si $a < b$ y si $f(a)$ y $f(b)$ son de signo opuesto, entonces hay al menos una raíz de f entre a y b.
Teorema fundamental del álgebra	Toda función polinomial compleja $f(z)$ de grado $n \geq 1$ tiene al menos un cero complejo.
Teorema de los pares conjugados	Sea $f(z)$ un polinomio complejo cuyos coeficientes son números reales. Si $r = a + bi$ es un cero de f, entonces el complejo conjugado $\bar{r} = a - bi$ también es un cero de f.

CÓMO HACER PARA

Hacer la gráfica de funciones cuadráticas.

Hacer la gráfica de funciones polinomiales.

Hacer la gráfica de funciones racionales (*véanse* los pasos del 1 al 6, página 121).

Utilizar la división sintética al dividir un polinomio entre $x - c$.

Escribir un polinomio en forma anidada.

Encontrar los ceros de un polinomio utilizando la regla de los signos de Descartes, el teorema de los ceros racionales y ecuaciones reducidas.

Resolver ecuaciones polinomiales utilizando la regla de los signos de Descartes, el teorema de los ceros racionales y ecuaciones reducidas.

Aproximar los ceros de un polinomio.

COMPLETE EN LOS ESPACIOS

1. La gráfica de una función cuadrática es llamada __________. Su punto más bajo o más alto es llamado __________.
2. En el proceso de división larga,

   (Divisor)(Cociente) + ________ = ________
3. Cuando una función polinomial f se divide entre $x - c$, el residuo es __________.
4. Una función polinomial f tiene el factor $x - c$ si, y sólo si, __________.
5. Un número r para el cual $f(r) = 0$ es llamado __________ de la función f.
6. La función polinomial $f(x) = x^5 - 2x^3 + x^2 + x - 1$ tiene __________ o __________ ceros positivos; tiene __________ o __________ ceros negativos.
7. Los posibles ceros racionales de $f(x) = 2x^5 - x^3 + x^2 - x + 1$ son __________.
8. La recta __________ es una asíntota horizontal de: $R(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$
9. La recta __________ es una asíntota vertical de: $R(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$
10. Si $3 + 4i$ es un cero de un polinomio de grado 5 con coeficientes reales, entonces también lo es __________.

CIERTO O FALSO

C F **1.** Todo polinomio de grado 3 con coeficientes reales tiene exactamente tres ceros reales.

C F **2.** Si $2 - 3i$ es un cero de un polinomio con coeficientes reales, entonces también lo es $-2 + 3i$.

C F **3.** La gráfica de $R(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ tiene exactamente una asíntota vertical.

C F **4.** La gráfica de $f(x) = x^2(x-3)(x+4)$ tiene exactamente tres intersecciones-x.

C F **5.** Si f es una función polinomial de grado 4 y $f(2) = 5$, entonces

$$\frac{f(x)}{x-2} = p(x) + \frac{5}{x-2}$$

donde $p(x)$ es un polinomio de grado 3.

EJERCICIOS DE REPASO

En los problemas del 1 al 10, haga la gráfica de cada función cuadrática para determinar si su gráfica abre hacia arriba o hacia abajo y encuentre su vértice, su eje de simetría, la intersección-y y la intersección-x, si las hay.

1. $f(x) = (x-2)^2 + 2$
2. $f(x) = (x+1)^2 - 4$
3. $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 16$
4. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$
5. $f(x) = -4x^2 + 4x$
6. $f(x) = 9x^2 - 6x + 3$
7. $f(x) = \frac{9}{2}x^2 + 3x + 1$
8. $f(x) = -x^2 + x + \frac{1}{2}$
9. $f(x) = 3x^2 + 4x - 1$
10. $f(x) = -2x^2 - x + 4$

En los problemas del 11 al 16 haga la gráfica de cada función utilizando las técnicas de desplazamiento, compresión, alargamiento y reflexión.

11. $f(x) = (x+2)^3$
12. $f(x) = -x^3 + 3$
13. $f(x) = -(x-1)^4$
14. $f(x) = (x-1)^4 - 2$
15. $f(x) = (x-1)^4 + 2$
16. $f(x) = (1-x)^3$

En los problemas del 17 al 22 determine si la función cuadrática dada tiene un valor máximo o un valor mínimo y luego encuentre el valor.

17. $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$
18. $f(x) = 2x^2 + 8x + 5$
19. $f(x) = -x^2 + 8x - 4$
20. $f(x) = -x^2 - 10x - 3$
21. $f(x) = -3x^2 + 12x + 4$
22. $f(x) = -2x^2 + 4$

En los problemas del 23 al 30:
(a) Encuentre las intersecciones con los ejes de cada función polinomial f.
(b) Determine si la gráfica de f toca o cruza el eje x en cada intersección-x.
(c) Encuentre la función potencia a la que se parece la gráfica para valores grandes de x.
(d) Determine el número máximo de puntos de retorno en la gráfica de f.
*(e) Utilice la intersección (o intersecciones)-*x *y números de prueba para encontrar los intervalos en los cuales la gráfica de f está por arriba y por debajo del eje* x.
(f) Trace los puntos obtenidos en las partes (a) y (e), y utilice la información restante para conectarlos por medio de una curva suave.

23. $f(x) = x(x+2)(x+4)$
24. $f(x) = x(x-2)(x-4)$
25. $f(x) = (x-2)^2(x+4)$
26. $f(x) = (x-2)(x+4)^2$
27. $f(x) = x^3 - 4x^2$
28. $f(x) = x^3 + 4x$
29. $f(x) = (x-1)^2(x+3)(x+1)$
30. $f(x) = (x-4)(x+2)^2(x-2)$

En los problemas del 31 al 40 analice cada función racional siguiendo los seis pasos establecidos en la sección 3.3.

31. $R(x) = \dfrac{2x - 6}{x}$

32. $R(x) = \dfrac{4 - x}{x}$

33. $H(x) = \dfrac{x + 2}{x(x - 2)}$

34. $H(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

35. $R(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 6}$

36. $R(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2}$

37. $F(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$

38. $F(x) = \dfrac{3x^3}{(x - 1)^2}$

39. $R(x) = \dfrac{2x^4}{(x - 1)^2}$

40. $R(x) = \dfrac{x^4}{x^2 - 9}$

En los problemas del 41 al 44 utilice la división sintética para encontrar el cociente $q(x)$ y el residuo R cuando $f(x)$ es dividida entre $g(x)$.

41. $f(x) = 8x^3 - 3x^2 + x + 4$; $g(x) = x - 1$

42. $f(x) = 2x^3 + 8x^2 - 5x + 5$; $g(x) = x - 2$

43. $f(x) = x^4 - 2x^3 + x - 1$; $g(x) = x + 2$

44. $f(x) = x^4 - x^2 + 3x$; $g(x) = x + 1$

45. Encuentre el valor de $f(x) = 12x^6 - 8x^4 + 1$ en $x = 4$.

46. Encuentre el valor de $f(x) = -16x^3 + 18x^2 - x + 2$ en $x = -2$.

En los problemas 47 y 48 utilice la regla de los signos de Descartes para demostrar cuántos ceros positivos y negativos puede tener cada función polinomial. No intente encontrar los ceros.

47. $f(x) = 12x^8 - x^7 + 8x^4 - 2x^3 + x + 3$

48. $f(x) = -6x^5 + x^4 + 5x^3 + x + 1$

49. Enliste todos los posibles ceros racionales de: $f(x) = 12x^8 - x^7 + 6x^4 - x^3 + x - 3$

50. Enliste todos los posibles ceros racionales de: $f(x) = -6x^5 + x^4 + 2x^3 - x + 1$

En los problemas del 51 al 56, utilice la regla de los signos de Descartes y el teorema de los ceros racionales para encontrar todos los ceros reales de cada función polinomial. Utilice los ceros para factorizar f en los números reales.

51. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

52. $f(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$

53. $f(x) = 4x^3 + 4x^2 - 7x + 2$

54. $f(x) = 4x^3 - 4x^2 - 7x - 2$

55. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 20x + 20$

56. $f(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 12x + 18$

En los problemas del 57 al 60 resuelva cada ecuación en el sistema de los números reales.

57. $2x^4 + 2x^3 - 11x^2 + x - 6 = 0$

58. $3x^4 + 3x^3 - 17x^2 + x - 6 = 0$

59. $2x^4 + 7x^3 + x^2 - 7x - 3 = 0$

60. $2x^4 + 7x^3 - 5x^2 - 28x - 12 = 0$

En los problemas del 61 al 70 encuentre las intersecciones de cada polinomio $f(x)$. Encuentre también los números x para los cuales la gráfica de f está por arriba del eje x y aquellos para los que la gráfica está por abajo del eje x. Obtenga algunos otros puntos de la gráfica y conéctelos por medio de una curva suave.

61. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

62. $f(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$

63. $f(x) = 4x^3 + 4x^2 - 7x + 2$

64. $f(x) = 4x^3 - 4x^2 - 7x - 2$

65. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 20x + 20$

66. $f(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 12x + 18$

67. $f(x) = 2x^4 + 2x^3 - 11x^2 + x - 6$

68. $f(x) = 3x^4 + 3x^3 - 17x^2 + x - 6$

69. $f(x) = 2x^4 + 7x^3 + x^2 - 7x - 3$

70. $f(x) = 2x^4 + 7x^3 - 5x^2 - 28x - 12$

En los problemas del 71 al 74 utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que cada polinomio tiene un cero en el intervalo dado.

71. $f(x) = 3x^3 - x - 1$; $[0, 1]$

72. $f(x) = 2x^3 - x^2 - 3$; $[1, 2]$

73. $f(x) = 8x^4 - 4x^3 - 2x - 1$; $[0, 1]$

74. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 8x - 2$; $[1, 2]$

En los problemas del 75 al 78 encuentre cotas enteras superior e inferior para los ceros de cada función polinomial.

75. $f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 2$

76. $f(x) = 2x^3 + x^2 - 10x - 5$

77. $f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 10x + 35$

78. $f(x) = 3x^3 - 7x^2 - 6x + 14$

En los problemas del 79 al 82 cada polinomio tiene exactamente un cero positivo. Aproxime el cero redondeado a dos decimales.

79. $f(x) = x^3 - x - 2$

80. $f(x) = 2x^3 - x^2 - 3$

81. $f(x) = 8x^4 - 4x^3 - 2x - 1$

82. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 8x - 2$

En los problemas del 83 al 86 la información dada es acerca de un polinomio complejo $f(z)$ cuyos coeficientes son números reales. Encuentre los ceros restantes de f.

83. Grado 3; ceros: $4 + i$, 6

84. Grado 3; ceros: $3 + 4i$, 5

85. Grado 4; ceros: i, $1 + i$

86. Grado 4; ceros: 1, 2, $1 + i$

En los problemas del 87 al 90 construya un polinomio $f(z)$ con coeficientes complejos que tengan el grado y ceros dados.

87. Grado 4; ceros: 1, multiplicidad 2; i, multiplicidad 1; 3, multiplicidad 1

88. Grado 4; ceros: i, multiplicidad 2; 2, multiplicidad 2

89. Grado 3; ceros: $1 + i$, 2, 3, cada uno con multiplicidad 1

90. Grado 3; ceros: 1, $1 + i$, $1 + 2i$, cada uno con multiplicidad 1

91. Encuentre el cociente y el residuo si $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$ es dividido entre $(x - 2)(x - 1)$.

92. Encuentre el cociente y el residuo si $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6$ es dividido entre $(x - 2)(x + 3)$.

En los problemas del 93 al 96 resuelva cada ecuación en el sistema de los números complejos.

93. $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$

94. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

95. $3x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 1 = 0$

96. $x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 8x - 8 = 0$

En los problemas del 97 al 100 escriba cada polinomio en forma anidada. Luego utilice una calculadora para evaluar cada polinomio en $x = 1.5$. Evite el uso de teclas de memoria.

97. $f(x) = 8x^3 - 3x^2 + x - 6$

98. $f(x) = 5x^3 + 4x^2 - 6x + 8$

99. $f(x) = x^4 - 2x^3 + x - 1$

100. $f(x) = x^4 - x^2 + 3x$

101. Encuentre las cotas enteras superior e inferior para los ceros de

$$f(x) = 4x^5 - 3x^4 + 8x^2 + x + 2$$

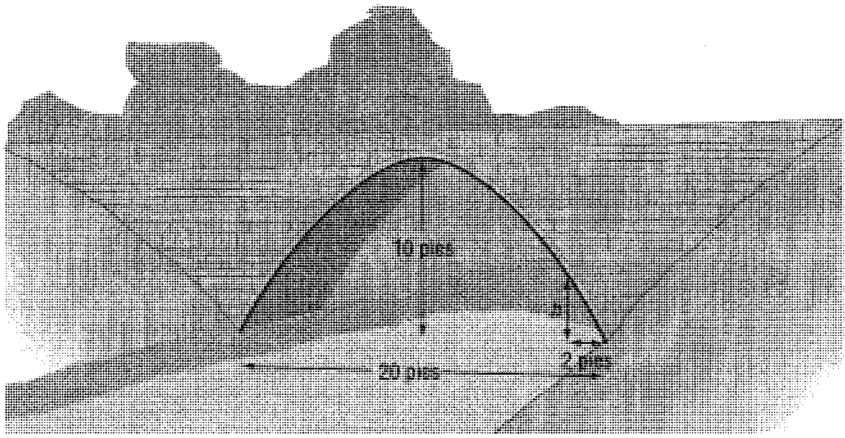
102. Encuentre las cotas enteras superior e inferior para los ceros de

$$f(x) = 8x^6 - x^4 + 6x^2 + 24x + 15$$

103. Encuentre el punto sobre la recta $y = x$ que esté más cercano al punto (3, 1). [*Sugerencia:* Encuentre el valor mínimo de la función $f(x) = d^2$, donde d es la distancia desde (3, 1) a un punto de la recta.]

104. Encuentre el punto en la recta $y = x + 1$ que esté más cercano al punto (4, 1).

105. Un puente horizontal tiene la forma de un arco parabólico. Dada la información vista en la figura, ¿cuál es la altura h del arco a 2 pies desde la orilla?



106. Encuentre la longitud y la anchura de un rectángulo cuyo perímetro es de 20 pies y el área mide 16 pies cuadrados

107. Diseñe una función polinomial con las características siguientes: grado 6; cuatro ceros reales, uno de multiplicidad 3; intersección-y igual a 3; para valores grandes de x se comporta como $y = -5x^6$. ¿Este polinomio es único? Compare su polinomio con el de otros compañeros. ¿Qué términos serán iguales para todos? Agregue más características tales como simetría o diga cuáles son los ceros reales. ¿Esto de qué manera modifica al polinomio?

108. Diseñe una función racional con las características siguientes: tres ceros reales, uno de multiplicidad 2; intersección con el eje y en 1; asíntotas verticales $x = -2$ y $x = 3$; asíntota oblicua $y = 2x + 1$. ¿Esta función racional es única? Compare la suya con la de sus compañeros. ¿Qué términos serán iguales para todos? Agregue más características tales como simetría o diga cuáles son los ceros reales. ¿Esto de qué manera modifica a la función racional?

109. La ilustración muestra la gráfica de una función polinomial.

(a) ¿El grado del polinomio es par o impar?

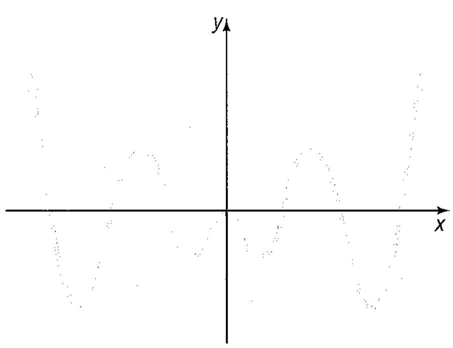
(b) ¿El coeficiente principal es positivo o negativo?

(c) ¿La función es par, impar o de ninguno de estos tipos?

(d) ¿Por qué x^2 es necesariamente un factor del polinomio?

(e) ¿Cuál es el grado mínimo del polinomio?

(f) Formule cinco polinomios diferentes cuyas gráficas puedan verse como la que se muestra. Compare su gráfica con la de otros compañeros. ¿Qué semejanzas nota? ¿Qué diferencias?



3.8

Funciones con Radicales

Se considerarán ahora funciones de la forma

$$f(x = \sqrt[n]{g(x)}$$

Donde n es un entero positivo y $g(x)$ es una función polinómica no constante.

Sabemos que una raíz de índice impar n siempre está definida en R, independientemente del valor del radicando; si el índice n es impar, entonces la raíz estará definida en R únicamente si el radicando es positivo o cero. Estos conceptos se extienden también a las funciones con radicales, permitiendo la definición de su dominio.

> La función $f(x = \sqrt[n]{g(x)}$ tiene como dominio:
>
> i) A todos los números reales, si n es impar
>
> ii) A todas las x tales que $g(x) > 0$, si n es par.

Para familiarizarnos con las gráficas de las funciones con radicales, comenzaremos por considerar las funciones $f(x) = \sqrt{x} y h(x) = \sqrt[3]{x}$. De lo expuesto anteriormente, se deduce que Dom $f = [0, +\infty[$ y que Dom $h = R$.

A continuación se dan las gráficas de f y h, junto con sus respectivas tablas de valores

FIGURA 45 (a)

a)

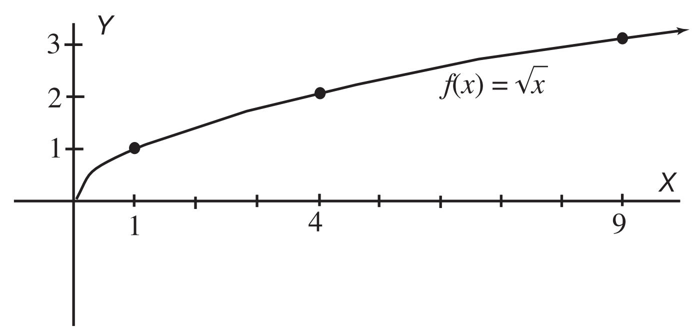


TABLA DE LA FIGURA 45 (a)

x	0	1	4	9
$f(x)$	0	1	2	3

FIGURA 45 (b)

b)

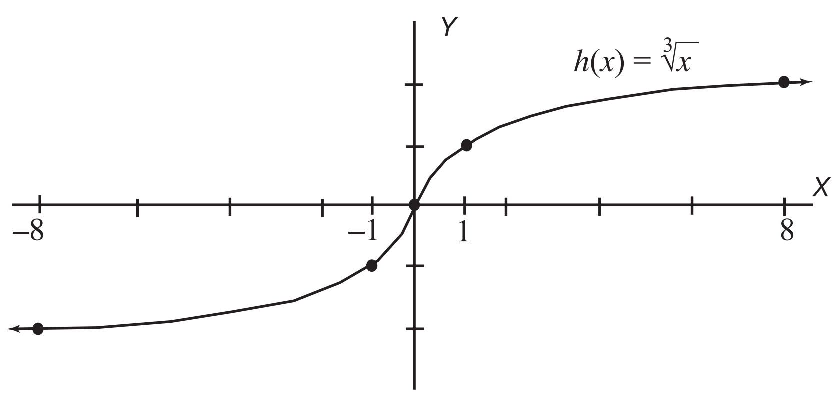


TABLA DE LA FIGURA 45 (b)

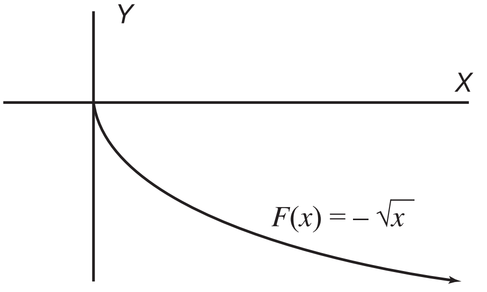
x	–8	–1	0	1	8
$f(x)$	–2	–1	0	1	2

Observando las gráficas, puede determinarse que $Rg\ f = [0, +\infty]$y que $Rg\ H = R$; además, ambas curvas son crecientes en todo su dominio. Note también que h es impar, ya que $h(-x) = \sqrt[3]{-x} = \sqrt[3]{x} - h(x)$

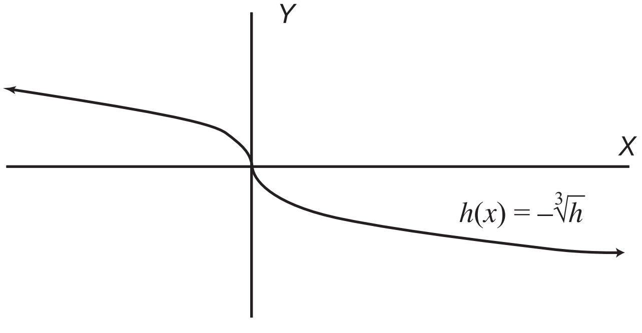
Las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $H(x) = -\sqrt[3]{x}$ son las reflexiones de f y h, respectivamente; el rango F es $[-\infty, 0]$, mientras que el rango de H es siempre R (vea las figuras 46 (a) y (b).

FIGURAS 46 (a) y (b)

a)



b)



Otras funciones de la forma $g(x) = \sqrt[n]{x}$ tendrán una gráfica similar a la de f o a la de g dependiendo de si el índice del radical es par o impar, respectivamente.

Las traslaciones de las curvas f y h deben efectuarse tomando como punto de referencia el inicio de la gráfica en el caso de f, y el punto de inflexión en el caso de h. Dichas traslaciones se dan por medio de las ecuaciones:

$$f(x) = a\sqrt{x-h} + k$$

$$f(x) = a\sqrt[3]{x-h} + k$$

donde a estrecha o expande las curvas, y también puede causar reflexiones, dependiendo de su valor; el punto (h, k) es el inicio de la gráfica de f, y el nuevo punto de inflexión en el caso de h.

EJEMPLO 1 Grafique las funciones;

a) $f(x) = 2\sqrt{x-1} - 3$

b) $h(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{x+2} - 1$

Solución: a) El punto de inicio de f es (1, 3). Como $a = 2$, no hay reflexión en la curva, por lo que es creciente. No existe intercepto en y (¿por qué?), pero si hacemos $y = 0$, se tiene que:

$$0 = 2\sqrt{x-1} - 3$$

$$\frac{3}{2} = \sqrt{x-1}$$

$$\frac{9}{4} = x - 1$$

$$\frac{13}{4} = x$$

El intercepto en x es entonces $(\frac{13}{4}, 0)$. La figura 47 (a) muestra la función de h, donde puede observarse que Dom $f = [1, +\infty]$ y $Rg\ f = [-3, +\infty]$. El dominio pudo determinarse al notar que f sólo está definida si $x - 1 \geq 1$.

b) El punto de inflexión de h es (–2,–1). Como $a = -\frac{1}{2}$, h sufre una inflexión con respecto a la curva básica $y = \sqrt[3]{x}$, por lo que siempre es decreciente.

Si $x = 0$, entonces $y = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{2} - 1 \approx -1.6$. Luego ly:(0, –16).

Si $y = 0$, entonces

$$0 = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{x+2} - 1$$

$$-2 = \sqrt[3]{x+2}$$

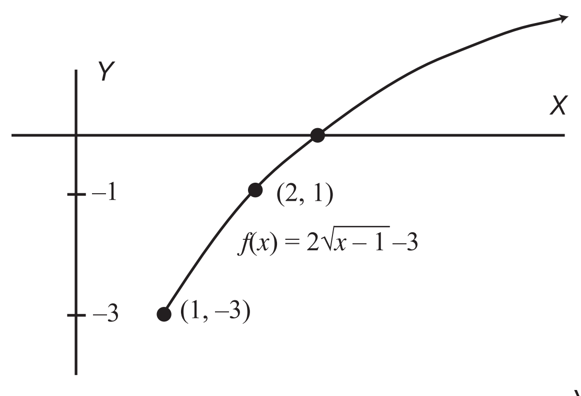
$$-8 = x + 2$$

$$-10 = x$$

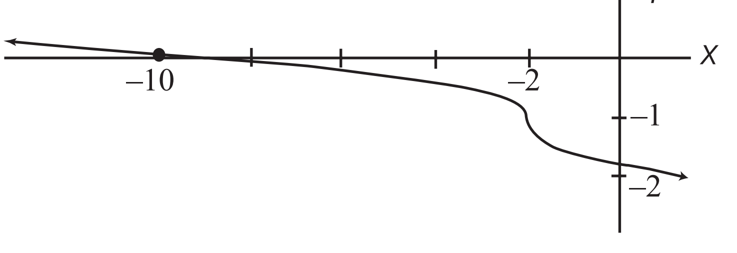
De lo anterior se tiene que lx(0, –10). El dominio y el rango de h son todos los números reales, tal y como se aprecia en la figura 47 (b).Δ

FIGURAS 47 (a) y (b)

a)

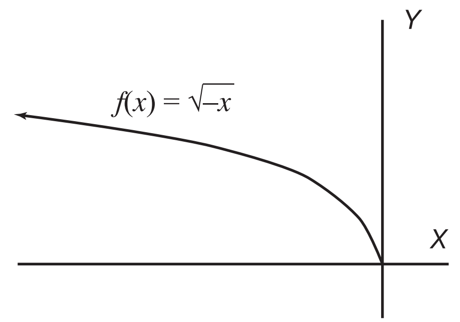


b)



Consideremos ahora la función $f(x) = \sqrt{-x}$. f está definida siempre que $-x \geq 0$, o sea si $x \leq 0$; el dominio de f es $[-\infty, 0]$. El efecto del cociente -1 de la x bajo el radical es el de cambiar el dominio de la función, de forma que el punto que antes era el inicio de la gráfica se convierte ahora en su punto terminal (vea la figura 48).

FIGURA 48



EJEMPLO 2: Trace la gráfica de las siguientes funciones:

a) $g(x) = 3\sqrt{4-x} - 12$

b) $j(x) = -\dfrac{1}{3}\sqrt{9-3x} + 2$

Solución:

a) Cuando el cociente de la x es negativo, es necesario encontrar primero el dominio de la función. g está definida en R siempre que $4 - x \geq 0$, o sea si $x \leq 4$; luego, Dom $g = [-\infty, 4]$.

El punto terminal de la gráfica tiene coordenadas $(4, -12)$. Si $x = 0$, entonces $y = -6$, por lo que ly: $(0, -6)$. Si $y = 0$, se tiene que

$$0 = 3\sqrt{4-x} - 12$$

$$4 = \sqrt{4-x}$$

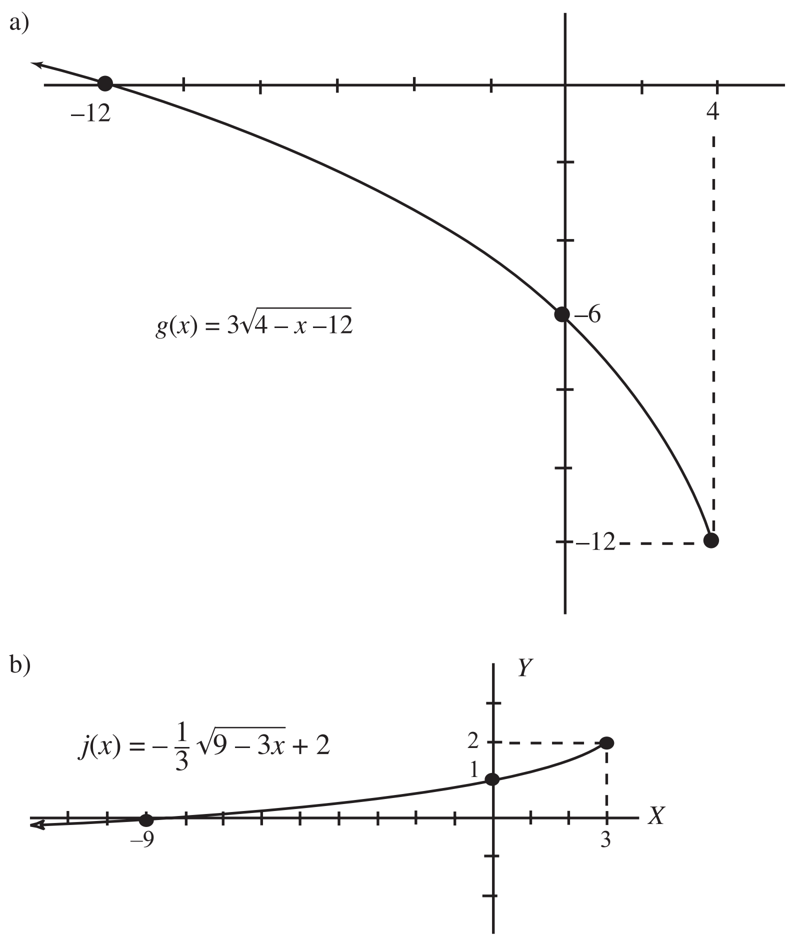
$$16 = 4 - x$$

$$-12 = x$$

Por lo que lx: $(-12, 0)$. El rango de g es $[-12, +\infty]$; además, g es decreciente (veáse la figura 49 (a).

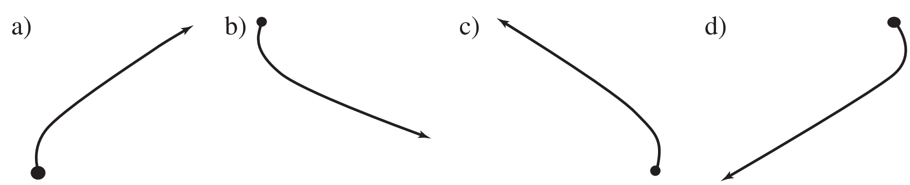
b) j está definida en R siempre que $9 - 3 \geq 0$, lo que implica que $x \leq 3$; de esto se deduce que Dom $j = [-\infty, 3]$. El punto Terminal de la gráfica es $(3, 2)$; además, como $a = -\frac{1}{3}$, j es una reflexión. Esto queda claro al trazar la curva con la ayuda de los interceptores $(0, 1)$ y $(-9, 0)$, como se ve en la figura 49 (b). j es creciente con $Rg\ j = [-\infty, 2]$.Δ

FIGURAS 49 (a) y (b)



Hasta el momento sólo se han considerado funciones con radicandos lineales; si la raíz es par, estas funciones tienen como gráfica una de las cuatro curvas que se ven en la figura 50, según sea el valor de a y el signo de la x dentro del radical.

FIGURA 50



Si el radicando es cuadrático y la raíz es de índice par, debe factorizarse el radicando y luego, por medio de una tabla de variación de signo, establecer para qué valores de la variable la raíz está definida en R. Encontrando después los interceptos y algunos puntos adicionales, es posible trazar una gráfica muy aproximada de la función.

E J E M P L O 3 : Trace la gráfica de las funciones:

a) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$

b) $g(x)=\sqrt{x^2+4x+3}$

c) $j(x)=\sqrt{x^2+2x+2}$

Solución: a) Si se factoriza el radicando, f se puede escribir como:

$$f(x)=\sqrt{(3+x)(3-x)}$$

f está definida en R siempre que

$$(3+x)(3-x)\geq 0$$

Para resolver esta desigualdad, se elabora la siguiente tabla de variación de signo:

$-\infty$	-3	3	$+\infty$
$3+x$	$-$	$+$	$+$
$3-x$	$+$	$+$	$-$
Producto	$-$	$+$	$-$

El producto $(3 + x)(3 - x)$ es positivo o cero si $x \in [-3,3]$, por lo que Dom $f = [-3, 3]$.

Se puede comprobar fácilmente que los interceptos de f son $(-3, 0)$, $(3, 0)$ y $(0, 3)$. La gráfica de la función es una semicircunferencia, con rango $[0, 3]$ y que crece en $[-3, 0]$ y decrece en $[0, 3]$. Vea la figura 51 (a).

b) Reescribiendo a g, se tiene que

$$g(x)=\sqrt{(x+3)(x+1)}$$

Para establecer el dominio de g, se elabora la siguiente tabla de variación de signo:

$-\infty$	-3	-1	$+\infty$
$x+3$	$-$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$
Producto	$+$	$-$	$+$

Se tiene que Dom $g = [-\infty, -3] \cup [-1,+\infty]$. Además, los interceptos de g son $(3, 0)$, $(-1, 0)$ y $(0, \sqrt{3})$. La gráfica de la función está formada por dos curvas; g decrece en $[-\infty, -3]$ y crece en $[-1, +\infty]$. Su rango es $[0, +\infty]$. Vea la figura 51 (b).

c) No es posible factorizar el radicando $x^2 + 2x + 2$, ya que su discriminante es negativo. Esta parábola es siempre positiva, por lo que Dom $h = R$.

La función $j(x)=\sqrt{x^2+2x+2}$ no tiene interceptos en x, por la misma razón ya expuesta; para poder trazar su gráfica, es necesario entonces conocer si j es mínimo. Los valores que toma j dependen de los valores que toma el radicando $x^2 + 2x + 2$, que es una parábola que se abre hacia arriba; ésta curva toma su valor mínimo en la abscisa del vértice, o sea en $h = \frac{2}{2} = -1$.

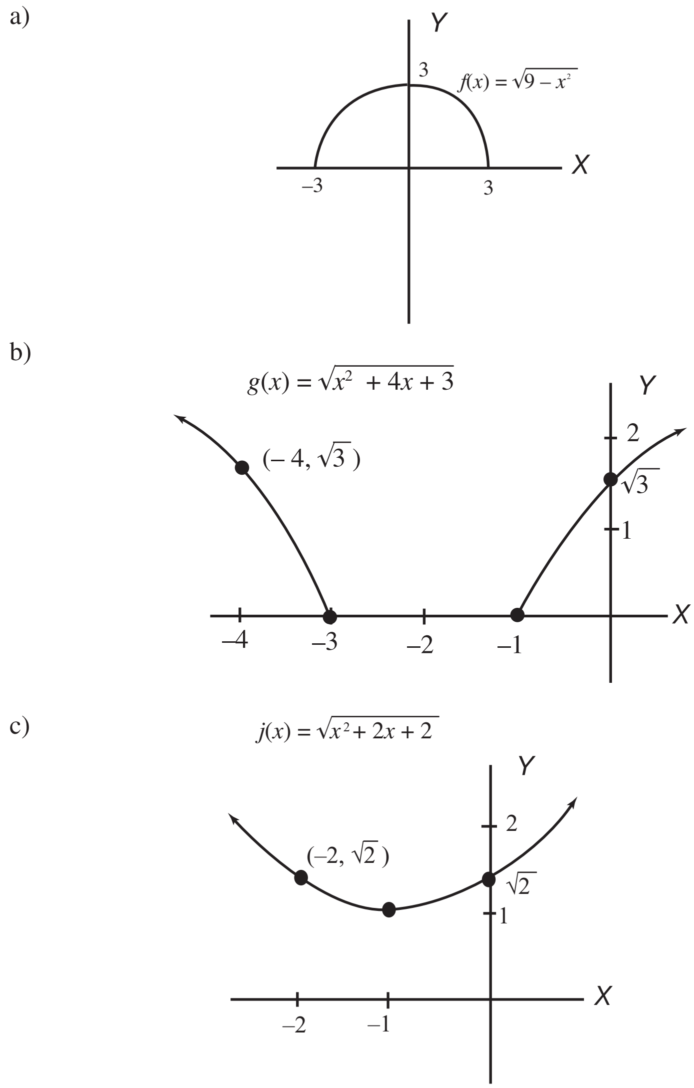
Lo anterior quiere decir que j también toma su valor mínimo en $x = h = -1$.

Evaluando, se tiene que

$$j(-1)=\sqrt{(-1)^2+2(-1)+2}=1$$

(–1, 1) es el punto mínimo de j. Considerando este hecho, junto a que ly:(0, $\sqrt{2}$), y tomando además algunos puntos adicionales, se obtiene la gráfica de la figura 51 (c). El rango de j es [1, +∞]; la función decrece en [–∞, –1] y crece en [–1, + ∞].Δ

FIGURAS 51 (a), (b) y (c)

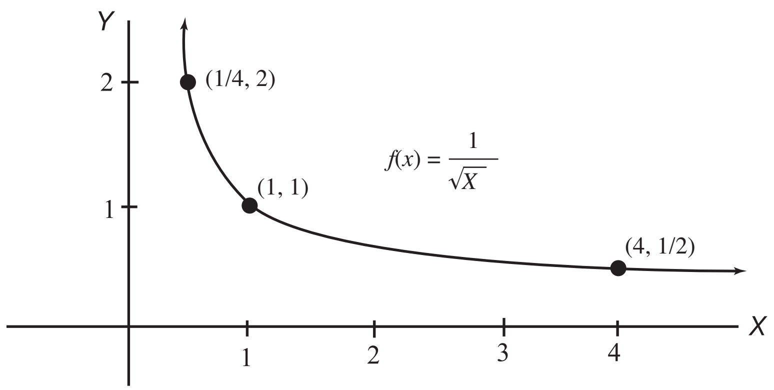


Cualquier función con un radicando cuadrático y de índice par tendrá una gráfica parecida a una de las tres vistas en el ejemplo anterior, por lo que es conveniente tener presente su forma.

Considérese ahora la función $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

Su dominio es el intervalo [0, + ∞], puesto que el cero es ahora un valor prohibido. Tal y como ocurre con todas las funciones racionales, el valor prohibido de f determina una asíntota vertical; la curva se acercará a dicha asíntota en dirección a + ∞ en y puesto que f no puede tomar valores negativos. A medida que x tiende a + ∞, el cociente $\frac{1}{\sqrt{x}}$ tenderá a cero, por lo que la recta $y = 0$ (que coincide con el eje x) es la asíntota horizontal de f. En la figura 52 se ve la gráfica de la función, junto con algunos puntos tomados como referencia.

FIGURA 52



f es decreciente en todo su dominio, y su rango es [0,+∞].

EJEMPLO 4: trace la gráfica de la función

$$h(x)=\frac{-1}{\sqrt{x-2}}+1$$

Solución: h es una traslación y reflexión de $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$. Note que la nueva asíntota vertical es $x = 2$, y la asíntota horizontal es $y = 1$. No existe intercepto en y (¿por qué?). Si hacemos $y = 0$, se tiene que

$$0=\frac{-1}{\sqrt{x-2}}+1$$

$$1=\frac{-1}{\sqrt{x-2}}$$

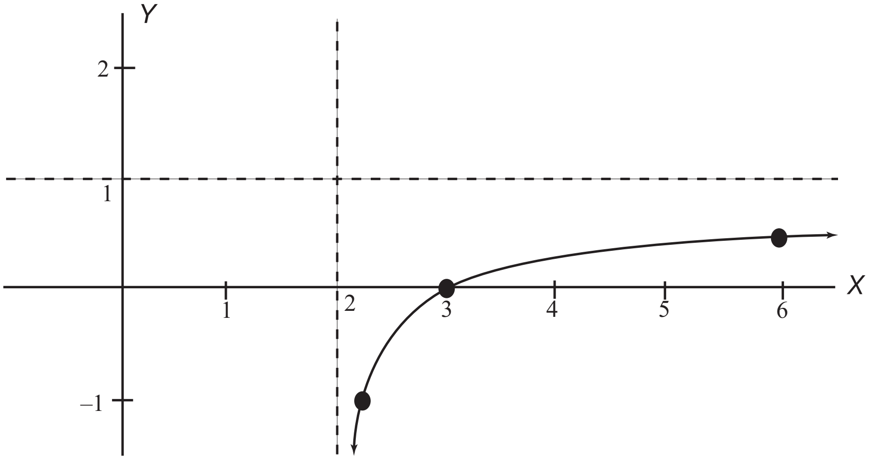
$$\sqrt{x-2}=1$$

$$x-2=1$$

$$x=3$$

El intercepto en x es (3, 0). La figura 53 ilustra la gráfica de h, pudiendo observarse que Dom $h = [2, +\infty]$ y que $Rg\ h = [-\infty, 1]$; además, h es creciente en todo su dominio.Δ

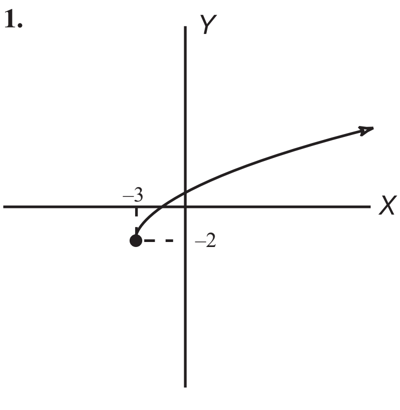
FIGURA 53



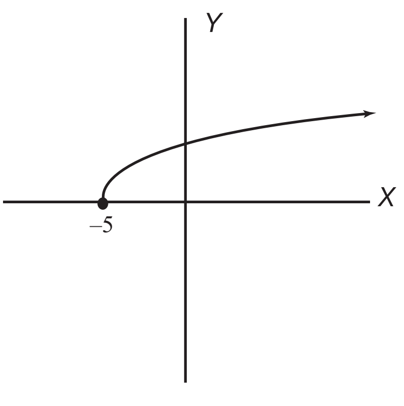
3.8 Ejercicio 3.8

Las siguientes curvas son translaciones y/o reflexiones de $f(x) = \sqrt{x}$. *Determine sus ecuaciones.*

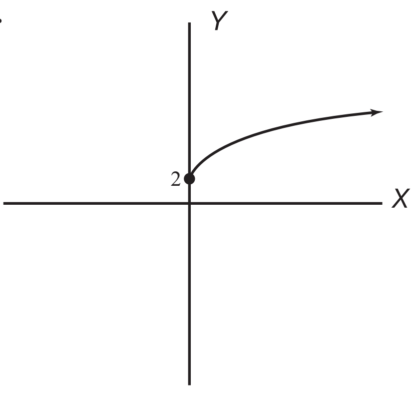
1.



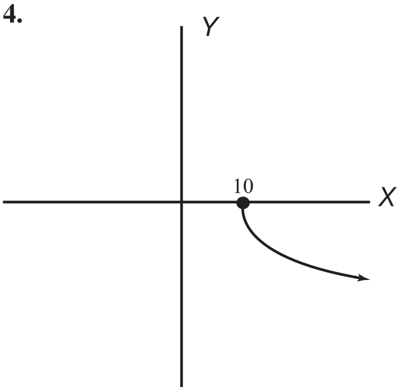
2.



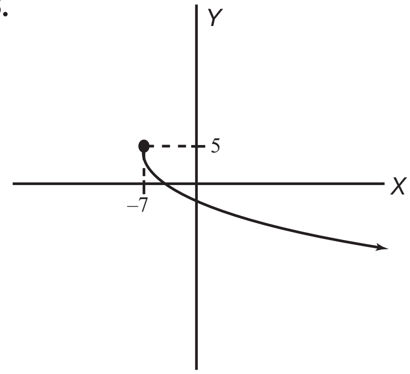
3.



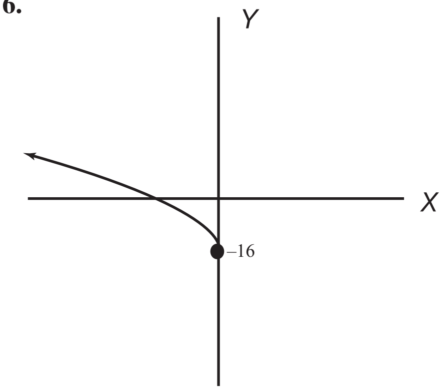
4.



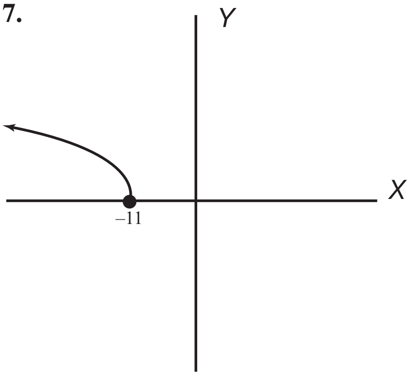
5.



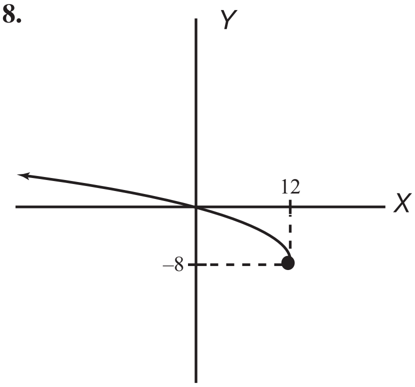
6.



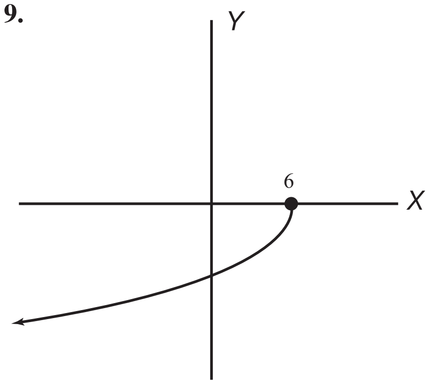
7.



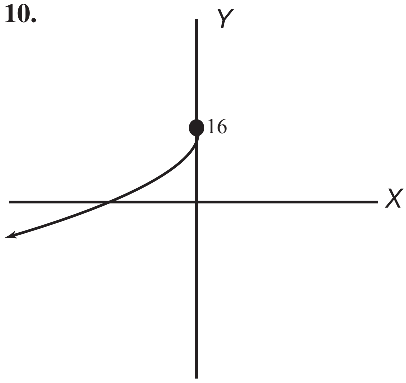
8.



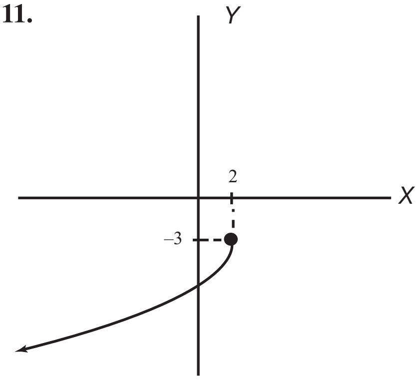
9.



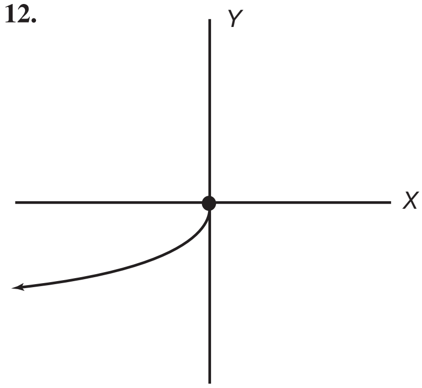
10.



11.



12.



Trace la gráfica de las siguientes funciones, indicando: el dominio, rango, interceptos, intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

13. $f(x)=\sqrt[4]{x}$

14. $g(x)=\sqrt[5]{x}$

15. $h(x)=\sqrt[3]{x-1}+2$

16. $j(x)=-1-2\sqrt[3]{x+8}$

17. $k(x)=\sqrt[3]{-x}$

18. $f(x)\sqrt[3]{1-x}+3/2$

19. $g(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{2}$

20. $h(x)=3\sqrt{x+4}-6$

21. $m(x)=8-4\sqrt{9+x}$

22. $y=\sqrt{2x-3}+3$

23. $j(x)=\sqrt{1-x}+2$

24. $k(x)=-3-\sqrt{-4-x}$

25. $n(x)=4-8\sqrt{\dfrac{1}{4}-x}$

26. $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

27. $g(x)=\sqrt{1-x^2}$

28. $h(x)=-\sqrt{4-x^2}$

29. $j(x)=-\sqrt{x^2-4}$

30. $y=\sqrt{4x^2-9}+1$

31. $k(x)=\sqrt{-x^2-8x}$

32. $f(x)=\sqrt{x^2+12x+11}$

33. $g(x)=-\sqrt{-x^2+8x-7}$

34. $h(x)=\sqrt{4-4x^2}$

35. $j(x)=\sqrt{x^2-9x+14}$

36. $k(x)=\sqrt{12+8x-4x^2}+1$

37. $y=-2\sqrt{8x^2+2x-1}$

38. $f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}$

39. $g(x)=-\sqrt{4x^2+24x+38}$

40. $h(x)={}^{-1}\!/\!_{\sqrt{x}}$

41. $j(x)={}^{1}\!/\!_{\sqrt{-x}}$

42. $k(x)={}^{-1}\!/\!_{\sqrt{-x}}$

43. $m(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$

44. $n(x)=\dfrac{1}{\sqrt{9-x}}$

45. $y=\dfrac{-2}{\sqrt{3x-2}}+1$

46. $f(x)=3-\dfrac{6}{\sqrt{{}^{1}\!/\!_{4}-x}}$

47. $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

48. $h(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}}$

49. $j(x)=x^{1/3}$

50. $k(x)=x^{2/3}$

51. Determine el dominio e interceptos de la función $f(x)=\sqrt{2x^4+5x^3-23x^2-38x+24}$

3.9 Funciones Seccionadas

Las funciones seccionadas tienen la particularidad de definirse **por intervalos**; esto quiere decir que su dominio se considera como la unión de intervalos separados, y en cada uno la función tomará una forma específica.

Considérese como primer ejemplo la función **mayor entero**, denotada por

$$f(x) = [x]$$

Esta función asigna sus imágenes de la siguiente forma: Si x **es un entero**, entonces $[x] = x$; si x **está entre dos enteros consecutivos** n **y** $n + 1$, entonces $[x] = n$.

A continuación se dan algunos ejemplos:

$[-2]=-2$	$[{}^{1}\!/\!_{2}]=0$	$[-200.1]=-201$
$[100]=100$	$[{}^{3}\!/\!_{2}]=1$	$[\sqrt{2}]=1$
$[3.4]=3$	$[5.6]=-6$	$[-\sqrt{3}]=-2$

Se ha podido observar que es posible encontrar el mayor entero de cualquier número real, por lo que el dominio de f es R. Esta función recibe el nombre de **mayor entero** ya que asigna a todo número x el entero **más grande** que es menor o igual a x; de esta forma, para 4.2, se escoge a 4 como su mayor entero, y no a 3 ni a 2, etcétera.

Para trazar una parte de la gráfica de $f(x) = [x]$, es necesario observar que si, por ejemplo, $-4 \leq x < -3$, entonces $[x] = -4$; esto significa que el intervalo $[-4, -3]$ tiene como imagen a -4. De igual forma,

$$-3 \leq x < -2 \rightarrow [x] = -3$$

$$-2 \leq x < -1 \rightarrow [x] = -2$$

$$-1 \leq x < 0 \rightarrow [x] = -1$$

$$0 \leq x < 1 \rightarrow [x] = 0$$

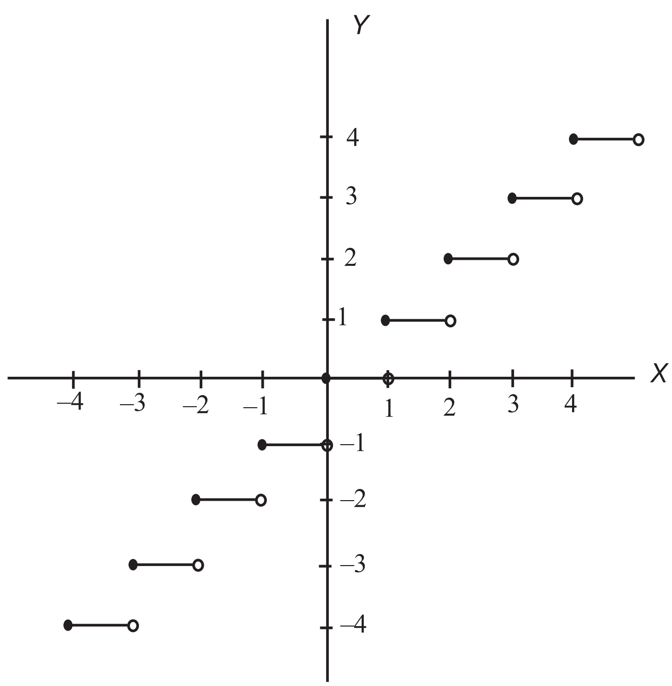
$$1 \leq x < 2 \rightarrow [x] = 1$$

$$2 \leq x < 3 \rightarrow [x] = 2$$

$$3 \leq x < 4 \rightarrow [x] = 3$$

La gráfica de $f(x) = [x]$ consiste de infinitos escalones ascendentes, que en realidad son pequeñas funciones constantes, definidas por intervalos.

FIGURA 54



El rango de f es Z; f es constante en los intervalos $[n, n + 1]$, donde $n \in Z$.

Las traslaciones de la función mayor entero están dadas por:

$$f(x) = a[x-h]+k \qquad .$$

EJEMPLO 1: Trace la gráfica de $f(x) = a[x-1]+1$ en el intervalo $[-3, 3]$.

Solución: La gráfica de f es una traslación horizontal (de una unidad hacia la derecha) y vertical (de una unidad hacia arriba) de la gráfica base $y = [x]$; además, f es una reflexión de dicha gráfica.

Para trazar la gráfica de f, se subdivide el intervalo $[-3, 3]$ en intervalos con extremos enteros consecutivos; luego, se sustituye un número cualquiera de cada subintervalo (de preferencia el extremo izquierdo) en la función f para determinar la imagen de todo el subintervalo. A continuación se detalla el proceso.

$$-3 \le x < -2 \to -[x-1]+1 = -[-4]+1 = 5$$

$$-2 \le x < -1 \to -[x-1]+1 = -[-3]+1 = 4$$

$$-1 \le x < 0 \to -[x-1]+1 = -[-2]+1 = 3$$

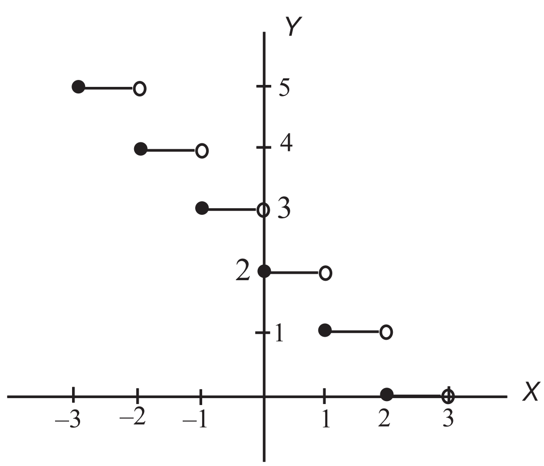
$$0 \le x < 1 \to -[x-1]+1 = -[-1]+1 = 2$$

$$1 \le x < 2 \to -[x-1]+1 = -[0]+1 = 1$$

$$2 \le x < 3 \to -[x-1]+1 = -[1]+1 = 0$$

La gráfica se ve en la figura 55.Δ

FIGURA 55



EJEMPLO 2: Trace la gráfica de la función $f(x) = [2x]$ en $[-2, 2]$.

Solución: El coeficiente 2 de la variable x afecta la forma en que se toman los subintervalos de $[-2, 2]$; en esta ocasión, la función asignará un nuevo entero cada media unidad de x. Note, por ejemplo, que $f(-2) = [2(-2)] = -4$ y $f(-1) = [2(-1)] = -2$, por lo que la imagen -3 debe pertenecer a $x = -3/2$. La partición adecuada de $[-2, 2]$, así como la asignación de las imágenes por subintervalos, se da a continuación.

$$-2 \le x < 3/2 \rightarrow -[2x] = [2(-2)] = -4$$

$$-3/2 \le x < -1 \rightarrow -[2x] = \left[2\left(-3/2\right)\right] = -3$$

$$-1 \le x < 1/2 \rightarrow -[2x] = [2(-1)] = -2$$

$$-1/2 \le x < 0 \rightarrow -[2x] = \left[2\left(-1/2\right)\right] = -1$$

$$0 \le x < 1/2 \rightarrow -[2x] = [2(0)] = 0$$

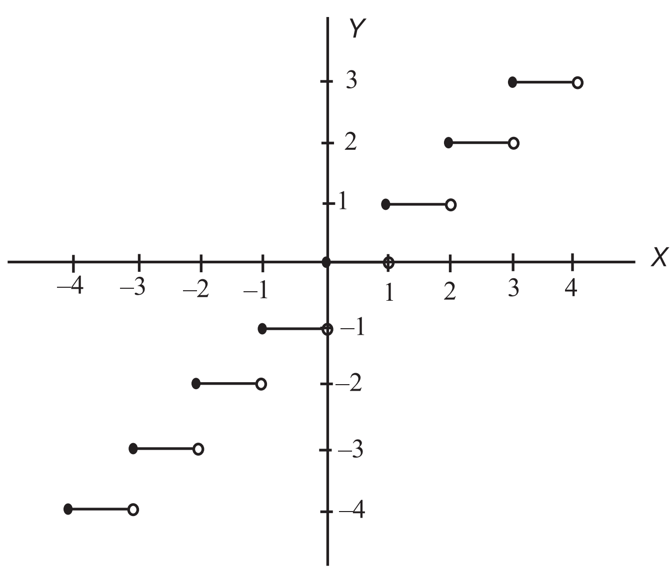
$$1/2 \le x < 1 \rightarrow -[2x] = \left[2\left(1/2\right)\right] = 1$$

$$1 \le x < 3/2 \rightarrow -[2x] = [2(1)] = 2$$

$$3/2 \le x < 2 \rightarrow -[2x] = \left[2\left(3/2\right)\right] = 3$$

La gráfica de f puede verse en la figura 56, donde se aprecia que el dominio y rango de f no cambian con respecto a los de la gráfica base $y = [x]$; sin embargo, pueden darse casos donde estos conjuntos varían, e incluso la forma típica escalonada de las funciones cambia.Δ

FIGURA 56



EJEMPLO 3: Trace la gráfica de $f(x) = [\![x]\!] + x$ es el intervalo$[-3,2]$.

Solución: Ya que la función mayor entero es constante por intevalos, f se compone de segmentos de recta de la forma $y = n + x$ para cada intervalo $[n, n + 1]$. Dividiendo el intervalo $[-3, 2]$ en forma apropiada, tenemos que:

$$-3 \le x < -2 \rightarrow f(x) = -3 + x$$

$$-2 \le x < -1 \rightarrow f(x) = -2 + x$$

$$-1 \le x < 0 \rightarrow f(x) = -1 + x$$

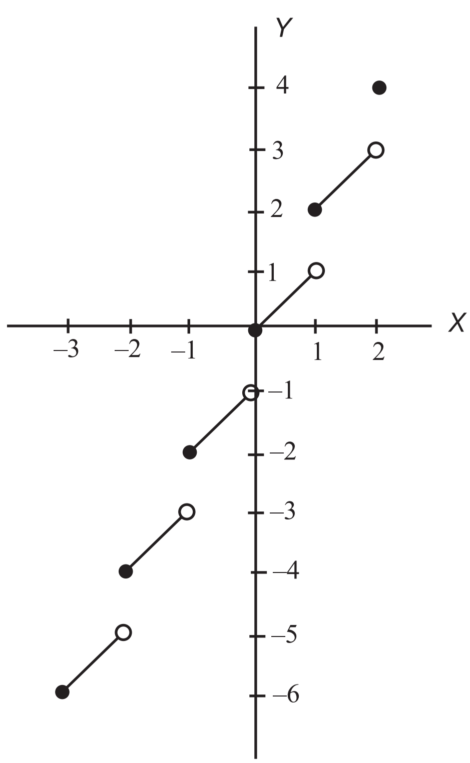
$$0 \le x < 1 \rightarrow f(x) = x$$

$$1 \le x < 2 \rightarrow f(x) = 1 + x$$

$$x = 2 \rightarrow f(2) = 2 + 2 = 4$$

Cada segmento de recta se traza tomando como referencia los extremos del intervalo correspondiente, cuidando de dejar abierto siempre el punto del extremo derecho (vea la figura 57). El dominio de f es $\mathbf{Z}$, mientras que su rango consta de todos los intervalos de la forma $[2n, 2n + 1]$, donde n es un entero cualquiera.Δ

FIGURA 57



La **función escalón**, denotada por $\boldsymbol{U(x)}$, y la **función signo,** denotada por $\boldsymbol{sgn(x)}$ son otros dos ejemplos de funciones seccionadas muy útiles, definidas como sigue:

$$\boldsymbol{U(x)} = \begin{cases} 0, \text{ si } x < 0 \\ 1, \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{sgn(x)} = \begin{cases} -1, \text{ si } x < 0 \\ 0, \text{ si } x = 0 \\ 1, \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Estas funciones asignan sus imágenes por categorías. $U(x)$ tiene dos categorías para los valores de x y $sng(x)$ tiene tres. Si $x = 0$, entonces $U(0) = 1$, ya que $0 \geq 0$; en cambio, por definición, $sng(0) = 0$.

También:

$$U(3) = 1, \text{ ya que } 3 \geq 0$$

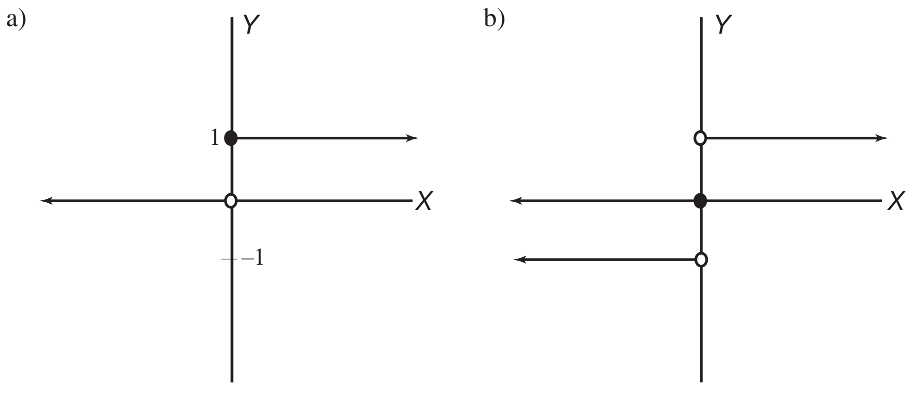
$$sgn(3) = 1, \text{ ya que } 3 > 0$$

$$U(\sqrt{2}\ ) = 0, \text{ ya que } -\ \sqrt{2}\ < 0$$

$$sgn(\sqrt{2}\ ) = -1, \text{ ya que } -\ \sqrt{2}\ < 0$$

Las gráficas de $U(x)$ se ven a continuación.

FIGURAS 58 (a) y (b)



El dominio de ambas funciones es R; el rango de $sgn(x)$ es $\{-1,0,1\}$, y el de $U(x)$ es $\{0, 1\}$. Note además que $sgn(x)$ es impar.

EJEMPLO 4: Tace la gráfica de las siguientes funciones:

a) $U(x/2)$

b) $sgn(x) - 3$

Solución: a) Siguiendo la definición de la función escalón, se tiene que:

$$U(x-2) = \begin{cases} 0, \text{ si } x - 2 < 0 \\ 1, \text{ si } x - 2 \geq 0 \end{cases} \qquad = \begin{cases} 0, \text{ si } x < 2 \\ 1, \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$$

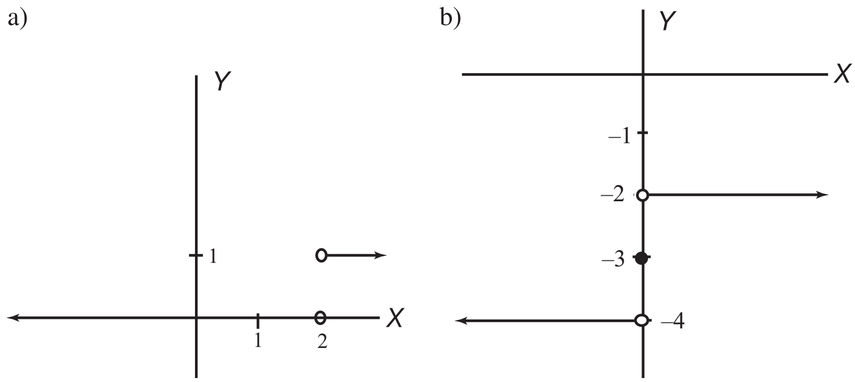
La gráfica de $U(x - 2)$ se ve en la figura 59 (a); esta función es una traslación horizontal de $U(x)$.

b) La función $sgn(x) - 3$ es una traslación vertical de $sgn(x)$, puesto que se obtiene al mover 3 unidades hacia abajo la gráfica ya conocida. La definición de $sgn(x) - 3$ es la siguiente:

$$sgn(x) - 3 = \begin{cases} -1 - 3, \text{ si } x < 0 \\ 0 - 3, \text{ si } x = 0 \\ 1 - 3, \text{ si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -4, \text{ si } x < 0 \\ -3, \text{ si } x = 0 \\ -2, \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Puede apreciarse en la figura 59 (b) que el rango de $sgn(x) - 3$ es $\{-4, -3, -2\}$.Δ

FIGURAS 59 (a) y (b)



Se considerará ahora la **función valor absoluto**, definida por

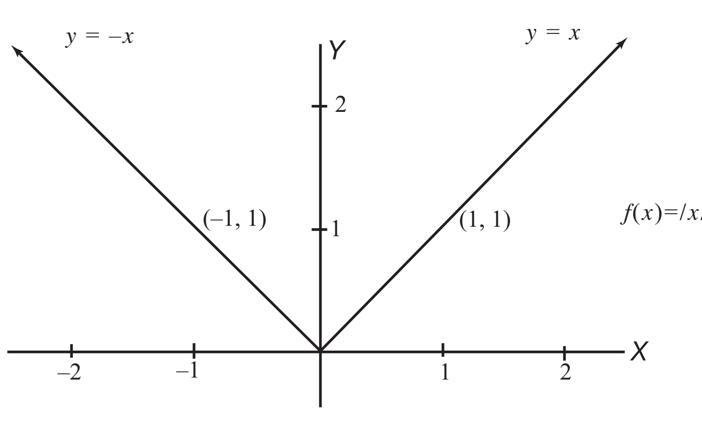
$$f(x) = |x|$$

Sabemos que, por definición,

$$|x| = \begin{cases} -x, \text{ si } x < 0 \\ x, \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

Podemos entonces considerar a la función valor absoluto como una función seccionada en dos categorías. Si $x < 0$, entonces las imágenes se dan en la recta $y = -x$; si $x \geq 0$, entonces la recta $y = x$ (perpendicular a la anterior) dará las imágenes. la unión de ambas rectas forma una gráfica en forma de V (véase la figura 60) que es típica de las funciones con valor absoluto de argumento lineal.

FIGURA 60



El dominio de la función $f(x) = |x|$ es R y su rango es $[0, +\infty]$; además, f es par.

Las traslaciones de la función valor absoluto están dadas por:

$$f(x) = a|x - h| + k$$

donde el punto (h, k) corresponde al vértice de la gráfica, y ***a*** determina la *apertura* de la V, así como dirección hacia dónde ésta se abre.

EJEMPLO 5: Trace la gráfica de $f(x) = -1/2|x + 2| + 1$

Solución: El vértice de f se encuentra en el punto $(-2, 1)$; además, la gráfica de f se abre hacia abajo, por lo que ésta corta el eje x en dos puntos, que serán los interceptos en x.

Si $x = 0$ entonces $y = -1/2|2| + 1 = 0$, por lo que ly:(0, 0); este punto es también uno de los interceptos en x que ya se anticiparon.

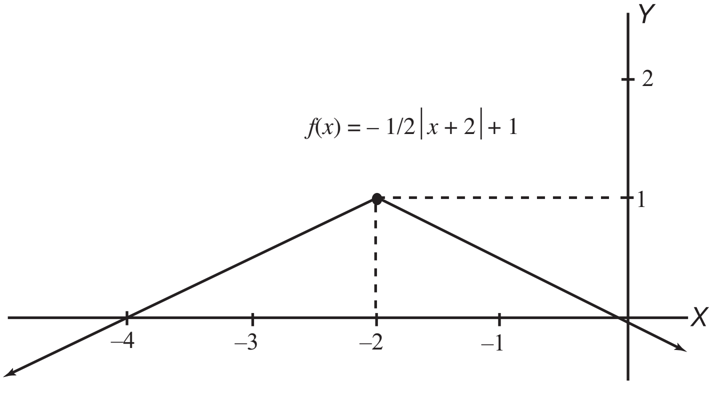
Si $y = 0$, se tiene que:

$$0 = -1/2|x + 2| + 1$$
$$2 = |x + 2|$$

Esta ecuación plantea dos posibilidades: o bien $x + 2 = 2$ o $x + 2 = -2$, de lo que resultan las soluciones $x = 0$ y $x = -4$. Se forman entonces los interceptos en x de coordenadas (0,09), que ya fue determinado, $y(-4, 0)$.

Al ver la figura 61, se determina que el rango de f es $[-\infty, -2]$ y decrece en $[-2 + \infty[-$

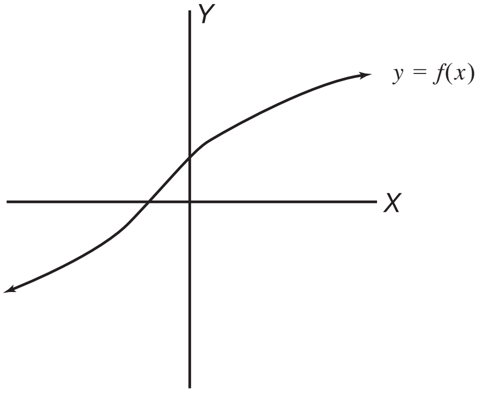
FIGURA 61



Puede comprobarse que las dos rectas que componen la gráfica de f tienen ecuaciones $y = x/2$ y $y = x/2 + 2$. Δ

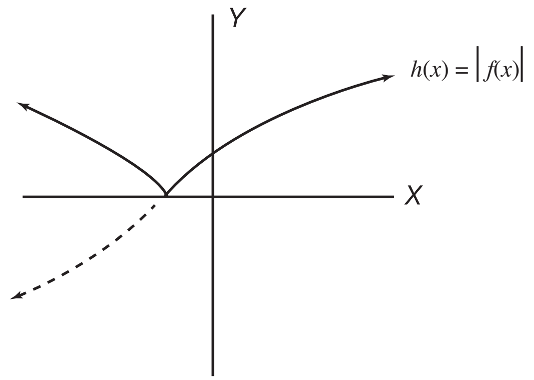
Considérese la siguiente gráfica de una función f.

FIGURA 62



Suponga que se define la función h como $h(x) = |f(x)|$ h convierte en positivas todas las ordenadas negativas de f; esto significa que h refleja la parte negativa de f sobre el eje de x. La gráfica de h puede verse a continuación.

FIGURA 63



EJEMPLO 5: Trace la gráfica de las siguientes funciones:

a) $f(x) = |x^2 - 4|$

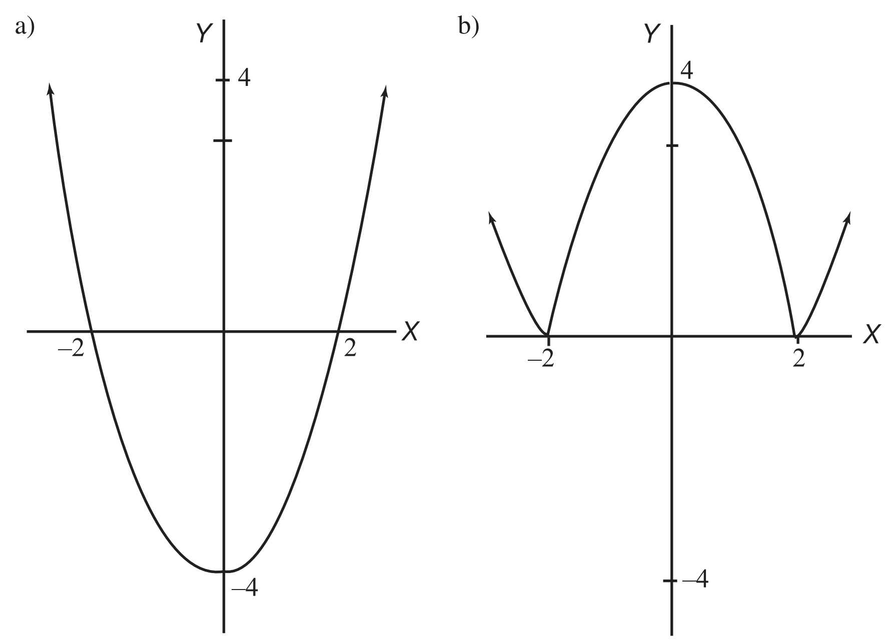
b) $f(x) = |x^3|$

c) $f x = \sqrt{|x|}$

Solución:

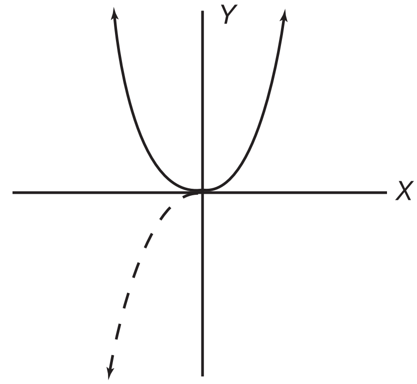
a) La curva $y = x^2 - 4$ es una parábola de vértice en el punto $(0, -4)$ y de interceptos en x de coordenadas $(-2, 0)$, $(2, 0)$; la figura 64 (a) muestra esta curva, mientras que en la 64 (b) se ve la gráfica de $f(x) = |x^2 - 4|$, en donde la parte de la parábola que originalmente se encontraba bajo el eje x se ha doblado hacia arriba.

FIGURAS 64 (a) y (b)



b) La figura 65 muestra la gráfica de $f(x) = |x^3|$; la parte punteada donde se encontraba originalmente la curva $y = x^3$

FIGURA 65



c) La función $f(x) = \sqrt{|x|}$ está definida siempre y cuando $|x| \geq 0$, como esto es cierto para cualquier valor de x, concluimos que Dom $f = R$.

Sabemos que

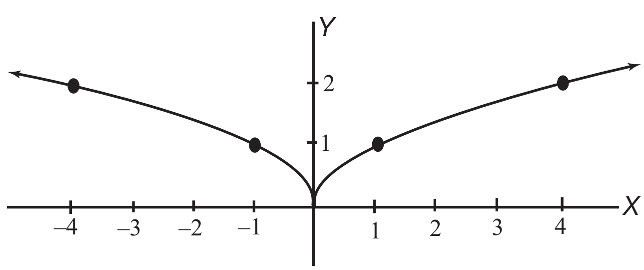
$$x = \begin{cases} -x, \text{ si } x < 0 \\ x, \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

por lo que podemos escribir a f como

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}\,, \text{ si } x < 0 \\ \sqrt{-x}\,, \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

Las curvas que conforman a f ya fueron vistas en la sección 3.8 (véanse las figuras 45 (a) y 48. La reunión de ambas en un mismo plano es la gráfica de f (vea la figura 66).

FIGURA 66



Es necesario resaltar la diferencia en resolución del inciso c) con respecto a los incisos a) y b); en estos últimos se tomaba el valor absoluto de una función, mientras que en el inciso c) se toma el valor absoluto del *argumento* de una función. Mientras que a) y b) pudieron resolverse directamente en forma de gráfica, la función del inciso c) necesitó ser redefinida para luego graficarse. Δ

Ahora se considerarán funciones que se conforman de diferentes partes de funciones conocidas.

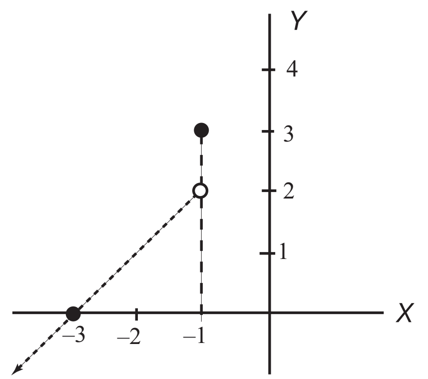
EJEMPLO 6: Trace la gráfica de

$$f(x) = \begin{cases} x + 3, \text{ si } x < -1 \\ 3, \text{ si } x = -1 \\ 3 - x, \text{ si } -1 < x < 1 \\ 4x - x^2, \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: f se compone de dos secciones de recta, una sección de parábola y del punto (–1, 3).

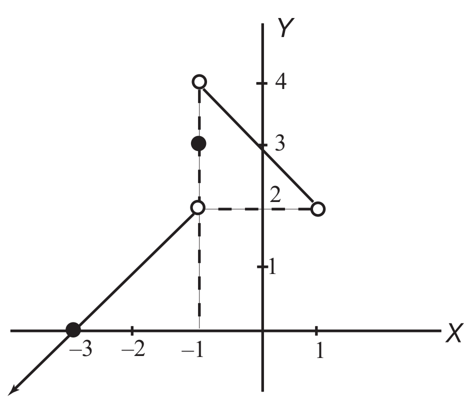
La primera recta, $y = x + 3$, se define para las $x < -1$; el punto (– 1, 2) pertenece a la recta pero no así a la sección que se tomará de ella; se dejará abierto este punto en la gráfica para que sirva únicamente como referencia. El intercepto (– 3, 0), cuya abscisa se encuentra en [– ∞, – 1], ayuda a trazar la primera parte de la gráfica de f.

FIGURA 67 (a)



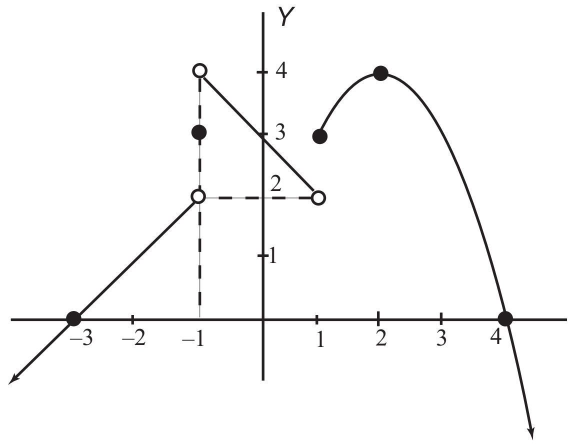
El punto (– 1, 3) también se dibujo en esta fase. La recta $y = 3 - x$ se define en el intervalo [– 1,1]; en este caso, deben tomarse los valores extremos del intervalo que, aunque abiertos, servirán como referencia. Es así como los puntos (– 1, 4) y (1, 2) son los extremos (abiertos) del segmento de recta que se traza a continuación.

FIGURA 67 (b)



La parábola $y = 4x - x^2$ se define en el intervalo [1, + ∞]. El punto (1, 3), el vértice (2, 4) y el intercepto (4, 0) ayudan a trazar esta última parte de f.

FIGURA 67 (c)



El dominio de f es $[\infty, -1]U\{-1\}U]-1,1[U]1,+\infty[= R$

El rango de f es $[-\infty, 4]$. Δ

EJEMPLO 7: Trace la gráfica de:

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{9-x^2}, & \text{si } |x| \le 3 \\ \sqrt{x^2-25}, & \text{si } |x| \ge 5 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: Usando las propiedades del valor absoluto

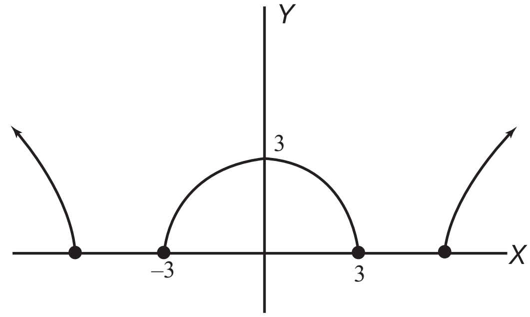
$$|x| \le a, \text{ si y sólo si } -a \le x \le a$$

$$|x| \ge a, \text{ si y sólo si } x \ge a \text{ ó } x \le -a$$

podemos deducir que g toma la forma de la curva $y = \sqrt{9-x^2}$, siempre que $-3 \le x \le 3$; para $x \ge 5$ o $x \le -5$, g asumirá la forma de las curvas descritas por la ecuación $y = \sqrt{x^2-25}$.

La gráfica de g se ve en la figura 3.3.15, donde además se puede comprobar que Dom $f = [-\infty, -5]U[-3, 3]U[5, +\infty]$, y que $Rg\ g = [0, +\infty]$.Δ

FIGURA 68



3.9

Ejercicio 3.9

Trace la gráfica de las siguientes funciones y establezca su dominio, rango e intervalos de crecimiento y decrecimiento.

1. $f(x) = [x] - 2$, en $[-3,2]$

2. $g(x) = [x - 2]$ en $[-3, 2]$

3. $h(x) = -2[-2,2]$

4. $k(x) = 2[x + 1] - 1$, en $[-3, 3]$

5. $f(x) = 3 - [-2,3]$

6. $g(x) = [x + \frac{5}{2}]$, en $[-2, \frac{1}{2}]$

7. $h(x) = [x + \frac{1}{2}]$en$[-\frac{7}{3}, \frac{5}{3}]$

8. $k(x) = [3x]$, en $[-1, 1]$

9. $f(x) = [x/2]$, en $[-4,4]$

10. $h(x) = [4x]$, en $[-1, 1]$

11. $g(x) = [x/3]$, en $[-5,4]$

12. $j(x) = [-x]$, en $[-3, 3]$

13. $k(x) = [x^2]$, en $[0,3]$

14. $f(x) = [x] - x$, en $[-3, 2]$

15. $g(x) = x - [x]$, en $[-2,3]$

16. $h(x) = x/[x]$, en $[-3, 0]\ U\ [1, 3]$

17. $j(x) = [x]/x$, en $[-2,2] - \{0\}$

18. $k(x) = |[x]|$, en $[-3,3]$

19. $-sgn(x)$

20. $-U(x)$

21. $sgn(-x)$

22. $U(-x)$

23. $U(x + 3)$

24. $sgn(2 - x)$

25. $U(x + 1) - 2$

26. $sng(2x + 1) + 4$

27. $2sgn(x - 1) - 1$

28. $^1/_2 \mathrm{U}(3 - x) + 2$

29. $f(x) - |x|$

30. $g(x) = |-x|$

31. $h(x) = |3x + 1|$

32. $j(x) = |x| - 4$

33. $k(x) = 3|x|$

34. $f(x) = {}^1/_2\,|x|$

35. $g(x) = |x - 3| - 2$

36. $h(x) = 2|4 - x| + 3$

37. $j(x) = -1 - |x - 5|$

38. $k(x) = 2 - {}^1/_4\,|x + 8|$

39. $f(x) = 3 - 2|x - 2|$

40. $g(x) = |9 - x^2|$

41. $h(x) = |x^2 - 16x + 60|$

42. $y = |1/x|$

43. $k(x) = |-1 + 1/(x + 1)|$

44. $f(x) = |2 - \sqrt{4 - x}\,|$

45. $y = |x^3 - 1|$

46. $f(x) = |U(x)|$

47. $f(x) = ||6 - 2|1 - x||$

48. $g(x) = \sqrt{|x - 1|}$

49. $h(x) = -\sqrt{|3 - x|}$

50. $j(x) = 1/|x|$

51. $k(x) = 1 - 1\sqrt{|x - 4|}$

52. $y = [-3,3]$

53. $f(x) = \{x + 2, \text{ si } x < -1$
$\qquad 3 - x, \text{ si } x \geq -1$

54. $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4, \text{ si } x < 0 \\ x^2 - 4x, \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

55. $f(x)=\begin{cases} x+3, \ si\ x\neq 1\ y\ x\neq 3 \\ 2, \text{ si } x{=}1 \\ 0, \text{ si } x{=}3 \end{cases}$

56. $f(x)=\begin{cases} x, \text{ si } x<-2 \\ [x], \text{ si } -2\leq x<2 \\ x\text{-}1, \text{ si } x\geq 2 \end{cases}$

57. $g(x)=\begin{cases} -\sqrt{4-x^2}, \text{ si } |x|\leq 2 \\ \sqrt{-2-x}, \text{ si } x<-2 \\ \sqrt{x-2}, \text{ si } x>2 \end{cases}$

58. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-2}, \text{ si } x\neq 2 \\ 1, \text{ si } x=2 \end{cases}$

59. $h(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+2x-8}{x+4}, \text{ si } x\neq 4 \\ -2, \text{ si } x=4 \end{cases}$

60. $j(x)=\begin{cases} -\sqrt{1-x}, \text{ si } x\leq 1 \\ 8x-7-x^2, \text{ si } x>1 \end{cases}$

61. $k(x)=\begin{cases} -x^2-6x-8, \ si\ x<1 \\ -x^2-2x, \text{ si } -2\leq x<0 \\ x^2-2x, \text{ si } \ 0\leq x<2 \\ x^2-6x+8, \text{ si } x\geq 2 \end{cases}$

62. $f(x)=\begin{cases} 0, \text{ si } x<1 \\ 1/5, \text{ si } 1\leq x<2 \\ 2/5, \text{ si } 2\leq x<3 \\ 4/5, \text{ si } 3\leq x<5 \\ 1, \text{ si } x>5 \end{cases}$

63. $h(x)=\begin{cases} 0, \text{ si } x<0 \\ x^2 \ , \text{ si } 0\leq x<1/2 \\ 1-3(1-x)^2, \text{ si } 1/2\leq x<1 \\ 1, \text{ si } x\geq 1 \end{cases}$

64. $f(x)=\begin{cases} 0, \text{ si } x<0 \\ 1/4\, x^2, \text{ si } 0\leq x<1 \\ 1/2\, x-1/4, \text{ si } 1\leq x<1 \\ -\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{3}{2}x-\dfrac{5}{4}, \text{ si } 2\leq x<3 \\ 1, \text{ si } x\geq 3 \end{cases}$

65. $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{8}(x+3)^3+8, \ x<-1 \\ x^3, \ |x|<1 \\ -\dfrac{4}{3}x^2+3+4-\dfrac{5}{3}, \ x>1 \end{cases}$

66. $f(x)=\begin{cases} 2+\sqrt{-4x-x^2}, \ -2\leq \ x<0 \\ -2-\sqrt{-4x-x^2}, \ 0<x\leq 2 \end{cases}$

67. $f(x)=\begin{cases} 3, \text{ si } x<-2 \\ 1-x, \text{ si } -2<x<-1 \\ 2, \text{ si } -1\leq x3 \\ 5-x, \text{ si } 3\leq x<4 \\ 1, \text{ si } x\geq 4 \end{cases}$

Autoevaluación del capítulo 3

Trace la gráfica de las siguientes funciones y determine su dominio, rango e intervalos de crecimiento y de decreciento.

1. $g(x) = 4 - \dfrac{1}{x^2 + 6x + 9}$

2. $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x + 1}$

3. $h(x) = \dfrac{12x^2 - 12x + 7}{4x^2 - 4x + 1}$

4. $k(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x - 3}$

5. $j(x) = 4 - \dfrac{x^2 + 3x - 10}{5 - 4x - x^2}$

6. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - x - 2}$

7. $g(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x}$

8. $h(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 2}$

9. $j(x) = 1 + \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{x - 27}$

10. $k(x) = 2 - \sqrt{x + 5}$

11. $f(x) = 1 - \sqrt{9 - x}\,/\,2$

12. $g(x) = \sqrt{8 + 2x - x^2} - 3$

13. $h(x) = -\sqrt{x^2 + 1}$

14. $j(x) = -\sqrt{x^2 - 8x + 7}$

15. $k(x) = -1/\sqrt{1 - 2x}$

16. $f(x) = -[4x]$, en $[-1,\ 1]$

17. $g(x) = [x - 2] + 1$, en $[-3, 2]$

18. $h(x) = -[x]x$, en $[-3, 3]$

19. $j(x) = -2\,\mathrm{sgn}(3 - x)$

20. $k(x) = U(3x + 4) - 1$

21. $f(x) = 5 - |2x - 7|$

22. $g(x) = 2|3x + 9| - 6$

23. $h(x) = |x^3 - 1|$

24. $j(x) = 1 - \sqrt{|x + 1|}$

25. $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 8x - 12, x < -3 \\ 3(x + 2)^2, -3 \le x < -1 \\ [x + 4], -1 \le x < 2 \\ -x + 7, x \ge 2 \end{cases}$

26. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2 - x}, x \le 2 \\ 1, x = 3 \text{ o } x = 4 \\ 0, 3 < x < 4 \end{cases}$

TEMA 3

CAPÍTULO 4

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Panorama Alcohol y manejo

Es posible medir la concentración de alcohol en la sangre de una persona. Investigaciones médicas recientes sugieren que el riesgo R (dado como un porcentaje) de tener un accidente automovilístico puede ser modelado mediante la ecuación

$$R = 6e^{kx}$$

Donde x es la concentración variable de alcohol en la sangre y k una constante.

(a) Suponga que una concentración de 0.04 de alcohol en la sangre produce un riesgo del 10% (R = 10) de sufrir un accidente. Determine la constante k de la ecuación.

(b) Utilice el valor de k e indique cuál es el riesgo si la concentración asciende a 0.17.

(c) Con el mismo valor de k indique la concentración de alcohol correspondiente a un riesgo del 100%.

(d) Si la ley establece que las personas con un riesgo del 20% o mayor de sufrir un accidente no deben manejar, ¿con cuál concentración de alcohol en la sangre debe un conductor ser arrestado y multado? [Véase el ejemplo 9 en la sección 4.2] ■

Hasta ahora, nuestro estudio de las funciones se ha concentrado en las funciones polinomiales y racionales, las cuales pertenecen a la clase de las **funciones algebraicas**, es decir, funciones que pueden expresarse en términos de sumas, restas, productos, cocientes, potencias o raíces de polinomios. Las funciones que no son algebraicas se llaman **trascendentes** (trascienden, esto es, están más allá, de las funciones algebraicas).

En este capítulo estudiaremos dos funciones trascendentes: las *funciones exponenciales y logarítmicas*. Estas funciones aparecen con frecuencia en una amplia variedad de aplicaciones.

Funciones exponenciales

Si a es un número real y n un entero positivo, entonces el símbolo a^n representa el producto de n factores de a. Con base en este análisis, damos significado a expresiones de la forma

$$a^r$$

donde la base a es un número real positivo y el exponente r un número racional.

Pero, ¿cuál es el significado de a^x, donde la base a es un número real positivo y el exponente x un número irracional? Aunque una definición rigurosa utiliza métodos analizados en cálculo, el concepto básico es fácil de seguir: elija un número racional r formado al truncar (eliminar) todos los dígitos del número irracional x, excepto un número finito de ellos. Entonces es razonable esperar que

$$a^x \approx a^r$$

Por ejemplo, consideremos el número irracional $\pi = 3.14159\ldots$. Entonces, una aproximación a a^π es

$$a^\pi \approx a^{3.14}$$

donde hemos eliminado los dígitos posteriores a la posición de los centésimos del valor de π. Una aproximación aún mejor sería

$$a^\pi \approx a^{3.14159}$$

donde hemos eliminado los dígitos posteriores a la posición de los cienmilésimos. De esta forma es como podemos obtener aproximaciones a a^π con cualquier grado deseado de precisión.

La mayor parte de las calculadoras científicas tienen una tecla $\boxed{x^y}$ (o $\boxed{y^x}$) para trabajar con exponentes. Para utilizar esta tecla primero escriba la base x, luego oprima la tecla $\boxed{x^y}$, escriba y y oprima la tecla $\boxed{=}$.

EJEMPLO 1 *Uso de una calculadora para evaluar potencias de 2*

Utilice una calculadora con tecla $\boxed{x^y}$ evalúe:

(a) $2^{1.4}$ (b) $2^{1.41}$ (c) $2^{1.414}$ (d) $2^{1.4142}$ (e) $2^{\sqrt{2}}$

Solución (a) $2^{1.4} \approx 2.6390158$ (b) $2^{1.41} \approx 2.6573716$
(c) $2^{1.414} \approx 2.6647497$ (d) $2^{1.4142} \approx 2.6651191$
(e) $2^{\sqrt{2}} \approx 2.6651441$

Ahora resuelva el problema 1.

Es posible mostrar que las leyes usuales de los exponentes racionales son válidas para exponentes reales.

Si s, t, a y b son números reales con $a > 0$ y $b > 0$, entonces

$$a^s \cdot a^t = a^{s+t} \qquad (a^s)^t = a^{st} \qquad (ab)^s = a^s \cdot b^s$$
$$1^s = 1 \qquad a^{-s} = \frac{1}{a^s} = \left(\frac{1}{a}\right)^s \qquad a^0 = 1 \tag{1}$$

Ahora estamos preparados para la siguiente definición.

Función exponencial

Una **función exponencial** es una función de la forma

$$f(x) = a^x$$

donde a es un número real positivo y distinto de 1. El dominio de f es el conjunto de todos los números reales.

Excluimos la base $a = 1$, ya que esta función es tan sólo la función constante $f(x) = 1^x = 1$. También debemos excluir las bases negativas, de lo contrario tendríamos que excluir muchos valores de x del dominio, como $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{4}$, etc. [Recuerde que $(-2)^{1/2}$, $(-3)^{3/4}$, y así sucesivamente, no están definidas en el sistema de los números reales.]

Gráficas de funciones exponenciales

En primer lugar, hagamos la gráfica de la función exponencial $y = 2^x$.

EJEMPLO 2 *Graficación de una función exponencial*

Hacer la gráfica de la función exponencial $f(x) = 2^x$

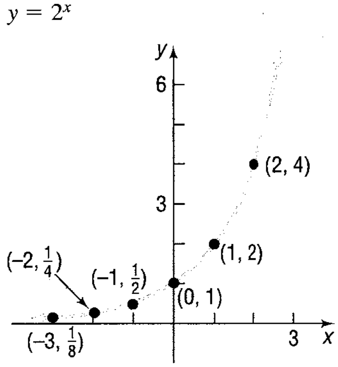
Solución El dominio de $f(x) = 2^x$ consta de todos los números reales. Primero localizamos algunos puntos sobre la gráfica de $f(x) = 2^x$, según muestra la tabla 1.

Como $2^x > 0$ para toda x, el rango de f es $(0, \infty)$. De lo cual podemos concluir que la gráfica no tiene intersecciones con el eje x y que, de hecho, estará arriba del eje x. Como muestra la tabla 1, la intersección con el eje y es 1. La tabla también indica que cuando $x \to -\infty$ el valor de $f(x) = 2^x$ se acerca cada vez más a 0. Así, el eje x es una asíntota horizontal de la gráfica, cuando $x \to -\infty$. Observe de nuevo la tabla 1. Cuando $x \to \infty$, $f(x) = 2^x$ aumenta rápidamente, lo cual hace que la gráfica de $f(x) = 2^x$ se eleve también muy rápido. Así, vemos que f es una función creciente y, por lo tanto, uno a uno. Con toda esta información, localizamos algunos de los puntos de la tabla 1 y los conectamos mediante una curva suave, continua, según muestra la figura 1.

TABLA 1

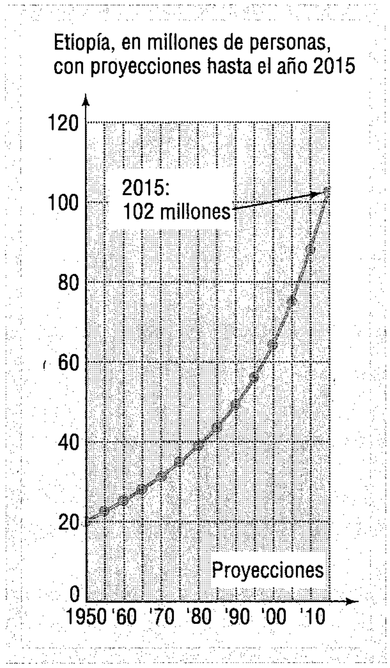
x	$f(x) = 2^x$
-10	$2^{-10} \approx 0.00098$
-3	$2^{-3} = \frac{1}{8}$
-2	$2^{-2} = \frac{1}{4}$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2}$
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$
10	$2^{10} = 1024$

FIGURA 1
$y = 2^x$



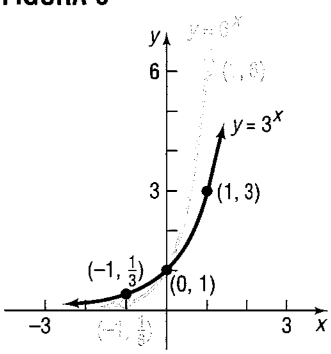
Como veremos, las gráficas similares a la de la figura 1 aparecen con mucha frecuencia en diversas situaciones. Por ejemplo, observe la gráfica de la figura 2, la cual ilustra la población exis-

FIGURA 2
La población de Etiopía crece con una de las tasas más altas del mundo, lo cual agrava los continuos problemas de suministro de alimentos para sus millones de habitantes. La nación, que comparativamente sólo mide tres cuartas partes del territorio de Alaska, tiene más de 2 millones de nacimientos por año.



Fuentes: Agencias de noticias, Banco Mundial, U. S. Agency for International Development, FAO-Naciones Unidas, *Population Reference Bureau*, UNICEF, Departamento de Agricultura de Estados Unidos, *Human Nutrition Information Service*.

FIGURA 3



tente en Etiopía. Podría concluirse de la gráfica que la población en Etiopía se "comporta de manera exponencial"; es decir, la gráfica exhibe un "crecimiento rápido, o exponencial". En este capítulo tenemos más que decir acerca de situaciones que conducen a un crecimiento exponencial. Por ahora, seguiremos en la búsqueda de propiedades de las funciones exponenciales.

La gráfica de $f(x) = 2^x$ en la figura 1 es típica de todas las funciones exponenciales con una base mayor que 1. Tales funciones son crecientes y, por ello, uno a uno. Sus gráficas están sobre el eje x, pasan por el punto $(0,1)$ y después suben con rapidez cuando $x \to \infty$. Cuando $x \to -\infty$,el eje x es una asíntota horizontal. No existen asíntotas verticales. Por último, las gráficas son suaves y continuas, sin esquinas ni saltos. La figura 3 muestra las gráficas de otras dos funciones exponenciales con base mayor que 1. Observe que si la base es mayor, la gráfica crece más rápido cuando $x > 0$, y está más cerca del eje x cuando $x < 0$.

A continuación tenemos un resumen de la información acerca de $f(x) = a^x$, $a > 1$:

$f(x) = a^x \qquad a > 1$
Dominio: $(-\infty, \infty)$ Rango: $(0, \infty)$
Intersecciones-x: ninguna Intersecciones-y: 1
Asíntota horizontal: eje x, cuando $x \to -\infty$
f es una función creciente
f es uno a uno y pasa por $(0,1)$ y $(1, a)$

Verificación: haga la gráfica de $y = 2^x$ y compare el resultado con la figura 1. Luego borre la pantalla, haga la gráfica de $y = 3^x$ y $y = 6^x$ y compare con la figura 3. De nuevo, borre la pantalla y haga la gráfica de $y = 10^x$ y $y = 100^x$. ¿Cuál ventana parece servir mejor?

Ahora consideremos $f(x) = a^x$ cuando $0 < a < 1$.

EJEMPLO 3

Graficación de una función exponencial

Hacer la gráfica de la función exponencial: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Solución

El dominio de $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ consta de todos los números reales. Como antes, localizamos algunos puntos sobre la gráfica, (tabla 2). Como $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 0$ para toda x, el rango de f es $(0, \infty)$. Así, la gráfica está sobre el eje x y no tiene intersecciones con él. La intersección con el eje y es 1. Cuando $x \to -\infty$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ crece muy rápido. Cuando $x \to \infty$, el valor de $f(x)$ tiende a cero. De modo que el eje x ($y = 0$) es una asíntota horizontal cuando $x \to \infty$ Se ve entonces que f es una función decreciente y, por tanto, uno a uno. La figura 4 muestra la gráfica.

TABLA 2

x	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-10	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-10} = 1024$
-3	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$
-2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$
-1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1$
1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4}$
3	$\left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{1}{8}$
10	$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 0.00098$

FIGURA 4

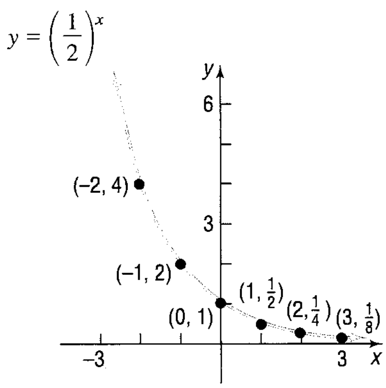
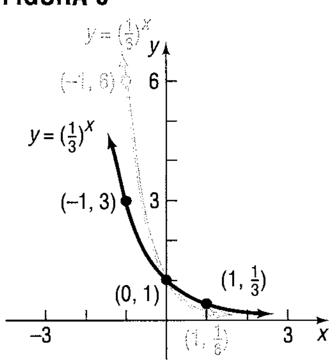


FIGURA 5



Observe que podríamos obtener la gráfica de $f(x) = \frac{1}{2^x}$ a partir de la de $y = 2^x$. Si $f(x) = 2^x$, entonces $f(-x) = 2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Así, la gráfica de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ es una reflexión con respecto al eje y de la gráfica de $y = 2^x$. Compare las figuras 1 y 4.

La gráfica de $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ en la figura 4 es típica de todas las funciones exponenciales con base entre 0 y 1. Tales funciones son decrecientes, uno a uno. Sus gráficas están sobre el eje x, pasan por el punto (0,1) y crecen con rapidez cuando $x \to -\infty$. Cuando $x \to \infty$, el eje x es una asíntota horizontal. No existen asíntotas verticales. Por último, las gráficas son suaves y continuas, sin esquinas ni saltos. La figura 5 muestra las gráficas de otras dos funciones exponenciales cuyas bases están entre 0 y 1. Observe que la elección de una base más cercana a 0 produce una gráfica más inclinada cuando $x < 0$, y cercana al eje x cuando $x > 0$.

A continuación tenemos un resumen de la información acerca de $f(x) = a^x$, $0 < a < 1$:

$f(x) = a^x \quad 0 < a < 1$

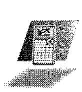
Dominio: $(-\infty, \infty)$ Rango: $(0, \infty)$

Intersecciones-x: ninguna Intersecciones-y: 1

Asíntota horizontal: eje-x, cuando $x \to \infty$

f es una función decreciente

f es uno a uno y pasa por $(0, 1)$ y $(1, a)$



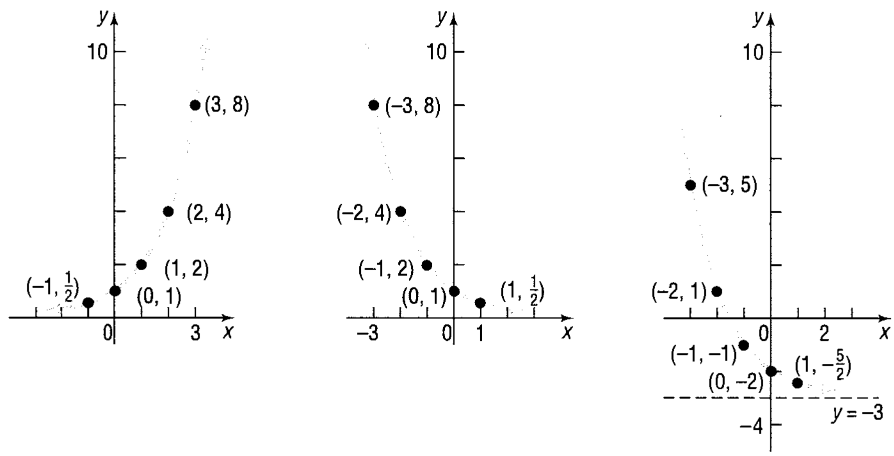
Verificación: haga la gráfica de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y compare el resultado con la figura 4. Luego borre la pantalla, haga la gráfica de $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ y $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$ y compare con la figura 5. Borre de nuevo la pantalla y haga la gráfica de $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$ y $y = \left(\frac{1}{100}\right)^x$. ¿Cuál ventana parece servir mejor?

Las técnicas de corrimiento, compresión, alargamiento y reflexión sirven también para hacer la gráfica de muchas funciones que, en esencia, son funciones exponenciales.

Hacer la gráfica de: $f(x) = 2^{-x} - 3$

La figura 6 muestra los diversos pasos.

FIGURA 6



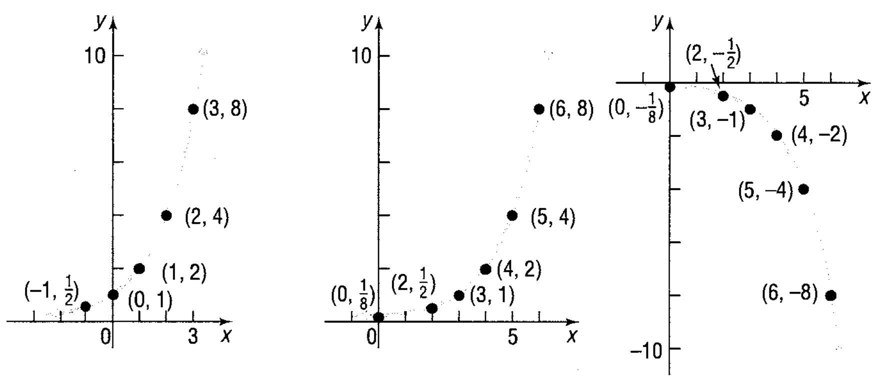
(a) $y = 2^x$ (b) $y = 2^{-x}$ (c) $y = 2^{-x} - 3$

Observe que la asíntota horizontal de $f(x) = 2^{-x} - 3$ es la recta $y = -3$, como muestra la figura 6(c).

Hacer la gráfica de: $f(x) = -(2^{x-3})$

La figura 7 muestra los diversos pasos.

FIGURA 7



(a) $y = 2^x$ (b) $y = 2^{x-3}$ (c) $y = -(2^{x-3})$

Verificación: haga la gráfica de $y = -(2^{x-3})$ y compare el resultado con la figura 7. Utilice la característica TRACE para verificar los puntos de la gráfica que se muestran en la figura 7.

Ahora resuelva los problemas 11 y 13.

La base *e*

Como veremos en breve, muchos problemas que surgen en la naturaleza necesitan de una función exponencial cuya base es un número irracional simbolizado por la letra e.

Ahora veremos una forma de llegar a este importante número e.

El número e

El **número *e*** se define como el número al que tiende la expresión

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{2}$$

cuando $n \to \infty$. En cálculo, esto se expresa mediante la notación de límite como

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

TABLA 3

n	$\frac{1}{n}$	$1 + \frac{1}{n}$	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	1	2	2
2	0.5	1.5	2.25
5	0.2	1.2	2.48832
10	0.1	1.1	2.59374246
100	0.01	1.01	2.704813829
1,000	0.001	1.001	2.716923932
10,000	0.0001	1.0001	2.718145926
100,000	0.00001	1.00001	2.718268237
1,000,000	0.000001	1.000001	2.718280469
1,000,000,000	10^{-9}	$1 + 10^{-9}$	2.718281827

La tabla 3 muestra lo que ocurre con la expresión (2) cuando n adquiere valores cada vez mayores. El último número de la última columna de la tabla tiene sus primeras nueve cifras decimales correctas y es igual al dato correspondiente a e que aparece en su calculadora (si tiene las primeras nueve cifras decimales correctas).

La función exponencial $f(x) = e^x$, cuya base es el número e, aparece con tal frecuencia en las aplicaciones que se conoce por lo general como *la* función exponencial. De hecho, muchas calculadoras tienen la tecla $\boxed{e^x}$ o $\boxed{exp(x),}$ la cual se utiliza al evaluar la función exponencial para un valor dado de x.* Ahora utilice su calculadora para determinar e^x

*Si su calculadora no tiene esta tecla pero tiene $\boxed{\text{SHIFT}}$ y una tecla $\boxed{\ln}$ puede desplegar el número e como sigue:

Oprima: $\boxed{1}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\ln}$

Pantalla: $\boxed{1}$ $\boxed{2.7182818}$

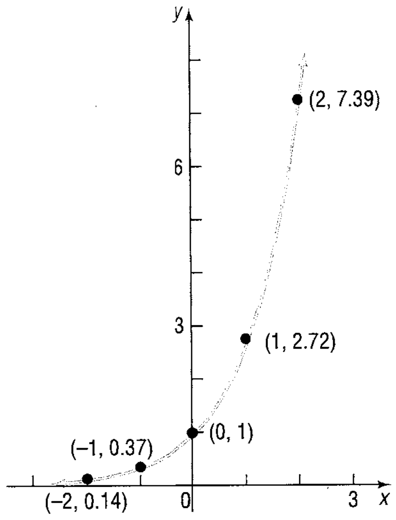
La razón de esto aparece en la sección 2.4.

para $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, y $x = 2$, de la misma forma que hicimos para crear la tabla 4 (después de redondear). La gráfica de la función exponencial $f(x) = e^x$ aparece en la figura 8. Como $2 < e < 3$, la gráfica de $y = e^x$ está entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$. (Revise las figuras 1 y 3.)

TABLA 4

x	e^x
−2	0.14
−1	0.37
0	1
1	2.72
2	7.39

FIGURA 8
$y = e^x$



Verificación: haga la gráfica de $y = e^x$ y compare el resultado con la figura 8. Utilice TRACE para verificar los puntos sobre la gráfica que aparecen en la figura 8. Ahora, haga la gráfica de $y = 2^x$ y $y = 3^x$. Observe que la gráfica de $y = e^x$ está entre estas dos gráficas.

Ahora resuelva el problema 21.

Existen muchas aplicaciones de la función exponencial. Veamos una.

EJEMPLO 6 *Respuesta a la publicidad*

Suponga que el porcentaje R de personas que responden a un anuncio periodístico relativo a un nuevo producto y que adquieren el artículo después de t días, se determina mediante la fórmula

$$R = 50 - 100e^{-0.3t}$$

(a) ¿Qué porcentaje ha respondido y adquirido el artículo después de 5 días?

(b) ¿Qué porcentaje ha respondido y adquirido el artículo después de 10 días?

(c) ¿Cuál es el máximo porcentaje de personas que se espera respondan y adquieran el artículo?

(d) Hacer la gráfica de $R = 50 - 100e^{-0.3t}$, $t > 0$. Utilizar TRACE y comparar los valores de R para $t = 5$ y $t = 10$ con los obtenidos en el ejemplo 6. ¿Cuántos días son necesarios para que R sea mayor al 40 por ciento?

Solución (a) Después de 5 días, tenemos que $t = 5$. El porcentaje correspondiente R de personas que responden y adquieren el artículo es

$$R = 50 - 100e^{(-0.3)(5)} = 50 - 100e^{-1.5}$$

Utilizamos una calculadora para evaluar esta expresión:

Oprima:	1.5	±	SHIFT	e^x ln	×	100	=
Pantalla:	1.5	−1.5		0.2231301		100	22.31301
Oprima:	±	+	50	=			
Pantalla:	−22.31301		50	27.68698			

Así, cerca de un 28% habrán respondido después de 5 días.

(b) Después de 10 días, tenemos que $t = 10$. El porcentaje correspondiente R de personas que responden y compran es

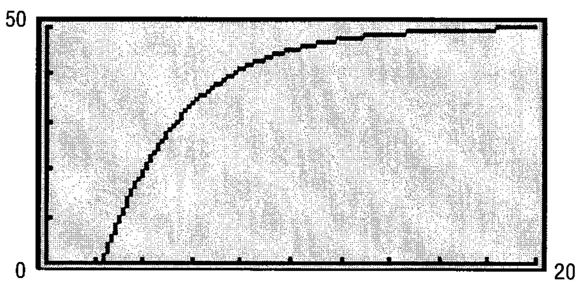
$$R = 50 - 100e^{(-0.3)(10)} = 50 - 100e^{-3} \approx 45.021$$

Cerca del 45% habrán respondido y comprado después de 10 días.

(c) Se espera que más personas respondan y compren con el paso del tiempo. El máximo porcentaje esperado se determina entonces para el valor de R cuando $t \to \infty$. Como $e^{-0.3t} = 1/e^{0.3t}$, esto implica que $e^{-0.3t} \to 0$ cuando $t \to \infty$. Así, el máximo porcentaje esperado es un 50 por ciento.

(d) *Véase* la figura 9.

FIGURA 9



Se necesitan 8 días para exceder el 40 por ciento.

Ahora resuelva el problema 33.

Resumen

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

$f(x) = a^x$, $a > 1$ — Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $(0, \infty)$; intersecciones-x: ninguna; intersección-y: 1; asíntota horizontal: eje x, cuando $x \to -\infty$; creciente; uno a uno. *Véase* la figura 3 para observar una gráfica típica.

$f(x) = a^x$, $0 < a < 1$ — Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $(0, \infty)$; intersecciones-x: ninguna; intersección-y: 1; asíntota horizontal: eje x, cuando $x \to \infty$; decreciente; uno a uno. *Véase* la figura 5 para observar una gráfica típica.

Ejercicio 4.1

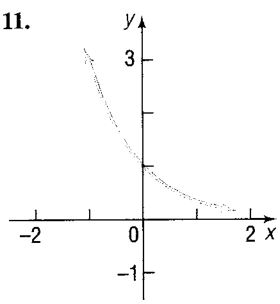
En los problemas del 1 al 10, aproxime cada número mediante una calculadora. Exprese su respuesta redondeada a tres cifras decimales.

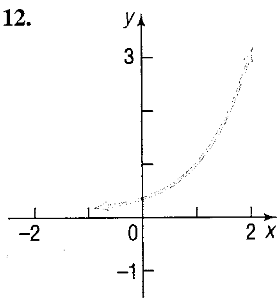
1.	(a) $3^{2.2}$	(b) $3^{2.23}$	(c) $3^{2.236}$	(d) $3^{\sqrt{5}}$
2.	(a) $5^{1.7}$	(b) $5^{1.73}$	(c) $5^{1.732}$	(d) $5^{\sqrt{3}}$
3.	(a) $2^{3.14}$	(b) $2^{3.141}$	(c) $2^{3.1415}$	(d) 2^{π}
4.	(a) $2^{2.7}$	(b) $2^{2.71}$	(c) $2^{2.718}$	(d) 2^{e}
5.	(a) $3.1^{2.7}$	(b) $3.14^{2.71}$	(c) $3.141^{2.718}$	(d) π^{e}
6.	(a) $2.7^{3.1}$	(b) $2.71^{3.14}$	(c) $2.718^{3.141}$	(d) e^{π}

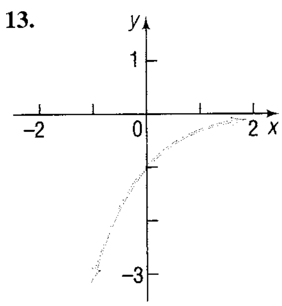
7. $e^{1.2}$ **8.** $e^{-1.3}$ **9.** $e^{-0.85}$ **10.** $e^{2.1}$

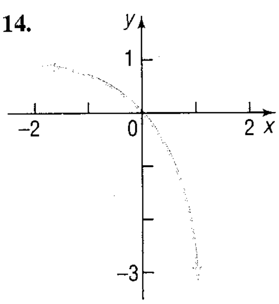
En los problemas del 11 al 18 aparecen las gráficas de una función exponencial. Relacione cada gráfica con una de las siguientes funciones:

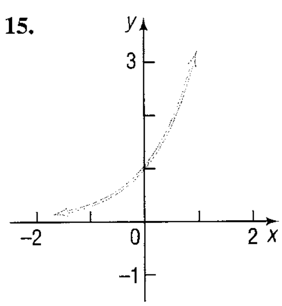
A. $y = 3^x$ *B.* $y = 3^{-x}$ *C.* $y = -3^x$ *D.* $y = -3^{-x}$
E. $y = 3^x - 1$ *F.* $y = 3^{x-1}$ *G.* $y = 3^{1-x}$ *H.* $y = 1 - 3^x$

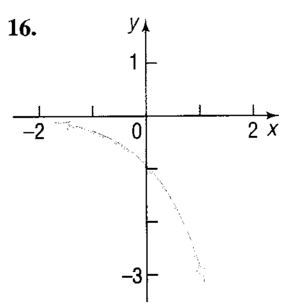
11.


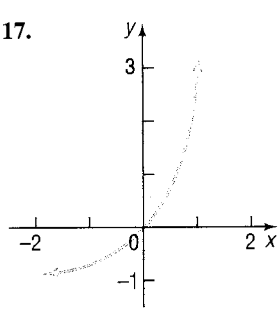
12.


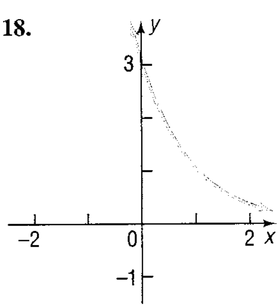
13.


14.


15.


16.


17.


18.


En los problemas del 19 al 26, utilice la gráfica de $y = e^x$ (figura 8) junto con las técnicas de corrimiento, compresión, alargamiento y reflexión, para hacer la gráfica de cada función.

19. $y = e^{-x}$ **20.** $y = -e^x$ **21.** $y = e^{x+2}$ **22.** $y = e^x - 1$

23. $y = 5 - e^{-x}$ **24.** $y = 9 - 3e^{-x}$ **25.** $y = 2 - e^{-x/2}$ **26.** $y = 7 - 3e^{-2x}$

27. Si $4^x = 7$, ¿a qué es igual 4^{-2x}? **28.** Si $2^x = 3$, ¿a qué es igual 4^{-x}?

29. Si $3^{-x} = 2$, ¿a qué es igual 3^{2x}? **30.** Si $5^{-x} = 3$, ¿a qué es igual 5^{3x}?

31. *Óptica.* Si un cristal obstruye el 3% de la luz que pasa a través de él, el porcentaje p de luz que pasa por n cristales sucesivos está dado aproximadamente por la ecuación

$$p = 100e^{-0.03n}$$

(a) ¿Qué porcentaje de la luz pasará a través de 10 cristales?
(b) ¿Y a través de 25?

32. *Presión atmosférica.* La presión atmosférica p sobre un globo o un avión disminuye al aumentar la altura. Esta presión, medida en milímetros de mercurio, se relaciona con el número de kilómetros h sobre el nivel del mar mediante la fórmula

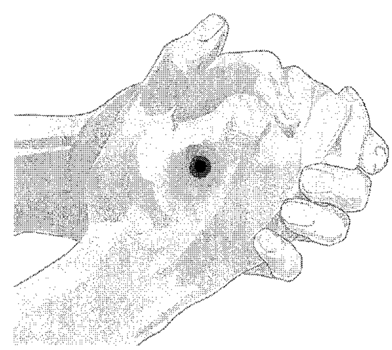
$$p = 760e^{-0.145h}$$

(a) Determine la presión atmosférica a una altura de 2 kilómetros (más de una milla).
(b) ¿Cuál es la presión a una altura de 10 kilómetros (más de 30,000 pies)?

33. *Satélites espaciales.* El número de vatios w proporcionados por la fuente de energía de un satélite espacial después de un periodo de d días está dado por la fórmula

$$w = 50e^{-0.004d}$$

(a) ¿Cuánta energía estará disponible después de 30 días?
(b) ¿Cuánta energía estará disponible después de un año (365 días)?



34. *Recuperación de una herida.* La recuperación normal de una herida se puede modelar mediante una función exponencial. Si A_0 representa el área original de la herida y A es el área de la herida después de n días, entonces la fórmula

$$A = A_0e^{-0.35n}$$

describa el área de una herida en el n-ésimo día después de una lesión, si no hay infecciones que retarden la recuperación. Suponga que una herida tiene un área inicial de 1 centímetro cuadrado.

(a) Si hay un proceso de recuperación, ¿cuánto medirá el área de la herida después de 3 días?
(b) ¿Cuánto medirá después de 10 días?

35. *Administración de medicamentos.* La fórmula

$$D = 5e^{-0.4h}$$

sirve para determinar el número de miligramos D de cierto medicamento en el flujo sanguíneo de un paciente, h horas después de su administración. ¿Cuántos miligramos estarán presentes después de 1 hora? ¿Y después de 6 horas?

36. *Difusión de rumores.* Un modelo para el número N de personas en una comunidad escolar que han escuchado cierto rumor es

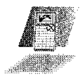
$$N = P(1 - e^{-0.15d})$$

donde P es la población total de la comunidad y d el número de días transcurridos desde el inicio del rumor. En una comunidad de 1000 estudiantes, ¿cuántos de ellos habrán escuchado el rumor después de 3 días?

37. *Respuesta a la publicidad en televisión.* El porcentaje R de audiencia que responde a un comercial de televisión para un nuevo producto después de t días se determina mediante la fórmula

$$R = 70 - 100e^{-0.2t}$$

(a) ¿Qué porcentaje se espera que responda después de 10 días?
(b) ¿Qué porcentaje ha respondido a los 20 días?
(c) ¿Cuál es el máximo porcentaje de personas que se espera respondan?



(d) Haga la gráfica de $R = 70 - 100e^{-0.2t}$, $t > 0$. Utilice la característica TRACE y compare los valores de R para $t = 10$ y $t = 20$ con los obtenidos en las partes (a) y (b). ¿Cuántos días deben transcurrir para que R exceda el 40 por ciento?

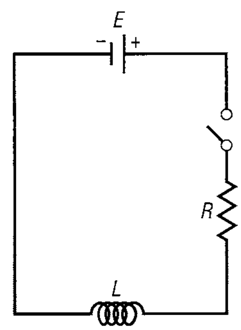
38. *Ganancia.* La ganancia anual P de una compañía debida a las ventas de cierto artículo después de x años de ser lanzado al mercado es

$$P = \$100{,}000 - \$60{,}000\left(\tfrac{1}{2}\right)^x$$

(a) ¿Cuál es la ganancia después de 5 años?
(b) ¿Y después de 10 años?
(c) ¿Cuál es la máxima ganancia que la compañía espera obtener por su producto?
(d) Haga la gráfica de la función de ganancia. Utilice la característica TRACE y compare los valores de P para $x = 5$ y $x = 10$ con los obtenidos en las partes (a) y (b). ¿Cuántos años deben transcurrir antes de que se obtenga una ganancia de $65,000.00?

39. *Corriente alterna en un circuito RL.* La ecuación que gobierna la cantidad de corriente I (en amperios) después de un tiempo t (en segundos) en un circuito RL individual, el cual consta de una resistencia R (en ohms), una inductancia L (en henrios) y una fuerza electromotriz E (en voltios), es

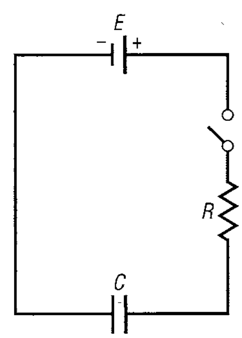
$$I = \frac{E}{R}[1 - e^{-(R/L)t}]$$



(a) Si $E = 120$ voltios, $R = 10$ ohms, y $L = 5$ henrios, ¿cuánta corriente I_1 está disponible después de 0.3 segundos? ¿Después de 0.5 segundos? ¿Y luego de un segundo?
(b) ¿Cuál es la corriente máxima?
(c) Haga la gráfica de la función $I = I_1(t)$, midiendo I a lo largo del eje y y t a lo largo del eje x.
(d) Si $E = 120$ voltios, $R = 5$ ohms, y $L = 10$ henrios, ¿cuánta corriente I_2 está disponible después de 0.3 segundos? ¿Después de 0.5 segundos? ¿Y luego de un segundo?
(e) ¿Cuál es la corriente máxima?
(f) Haga la gráfica de la función $I = I_2(t)$ en los mismos ejes de coordenadas donde hizo la gráfica de $I_1(t)$.

40. *Corriente alterna en un circuito RC.* La ecuación que gobierna la cantidad de corriente I (en miliamperios) después de un tiempo t (en milisegundos) en un circuito RC individual, el cual consta de una resistencia R (en ohms), una capacitancia C (en microfaradios) y una fuerza electromotriz E (en voltios), es

$$I = \frac{E}{R}e^{-t/(RC)}$$

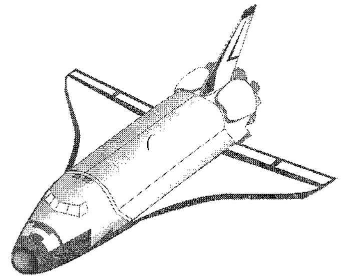


(a) Si $E = 120$ voltios, $R = 2000$ ohms, y $C = 1.0$ microfaradios, ¿cuánta corriente I_1 está disponible inicialmente ($t = 0$) y después de 1000 milisegundos? ¿Cuánta después de 3000 milisegundos?
(b) ¿Cuál es la corriente máxima?
(c) Haga la gráfica de la función $I = I_1(t)$, midiendo I a lo largo del eje y y t a lo largo del eje x.
(d) Si $E = 120$ voltios, $R = 1000$ ohms, y $C = 2.0$ microfaradios, ¿cuánta corriente I_2 está disponible inicialmente, después de 1000 milisegundos y después de 3000 milisegundos?
(e) ¿Cuál es la corriente máxima?
(f) Haga la gráfica de la función $I = I_2(t)$ en los mismos ejes de coordenadas donde hizo la gráfica de $I_1(t)$.

41. *La tragedia del Challenger**. Después de la tragedia del *Challenger* en 1986, se realizó un estudio de los 23 lanzamientos anteriores al vuelo fatal. Se desarrolló un modelo matemático para la relación entre la temperatura Fahrenheit x en torno de los anillos O y el número y de anillos O principales desgastados o con fugas. El modelo establecía que

$$y = 6\,[1 + e^{-(5.085 - 0.1156x)}]^{-1}$$

donde 6 indica los 6 anillos O principales de la nave espacial.



(a) ¿Cuál es el número pronosticado de anillos O principales desgastados o con fugas a una temperatura de 100°F?
(b) ¿Cuál es el número pronosticado de dichos anillos O a una temperatura de 60°F?
(c) ¿Y cuál para una temperatura de 30°F?
(d) Haga la gráfica de la ecuación y utilice TRACE. ¿A qué temperatura ocurre que el número pronosticado de anillos O principales desgastados o con fugas sea 1, 3 y 5?

42. *Estampillas de correo†*. El número acumulativo y de estampillas de correo diferentes (regulares y conmemorativas) emitidas por la oficina de correos de Estados Unidos se puede aproximar (modelar) mediante la función exponencial

$$y = 78e^{0.025x}$$

donde x es el número de años desde 1848.

(a) ¿Cuál es el número acumulativo pronosticado de estampillas emitidas hasta el año 1995?
(b) ¿Cuál es el número acumulativo pronosticado de estampillas emitidas hasta 1998?
(c) El número acumulativo de estampillas emitidas por Estados Unidos fue: 2 en 1848, 88 en 1868, 218 en 1888 y 341 en 1908. ¿Qué conclusión puede extraerse acerca del uso de la función dada como modelo durante las primeras décadas de emisión de las estampillas?

43. *Otra fórmula para e.* Utilice una calculadora para obtener el valor de

$$2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ . \ . \ . \ + \frac{1}{n!}$$

para $n = 4, 6, 8$, y 10. Compare cada resultado con e.
[*Nota:* $1! = 1$, $2! = 2 \cdot 1$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$, $n! = n(n-1) \cdot \ . \ . \ . \ \cdot (3)(2)(1)$].

44. *Otra fórmula para e.* Utilice una calculadora para obtener los diversos valores de la expresión

$$2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{\text{etc.}}}}}}$$

Compare los valores con e.

45. Si $f(x) = a^x$, demuestre que: $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = a^x\left(\dfrac{a^h - 1}{h}\right)$

46. Si $f(x) = a^x$, demuestre que: $f(A + B) = f(A) \cdot f(B)$

*Linda Tappin, "Analyzing Data Relating to the *Challenger* Disaster", *Mathematics Teacher*, vol. 87, núm. 6, septiembre de 1994, págs. 423-426.
†David Kullman, "Patterns of Postage-stamp Production", *Mathematics Teacher*, vol. 85, núm. 3, marzo de 1992, págs. 188 y 189.

47. Si $f(x) = a^x$, demuestre que: $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$

48. Si $f(x) = a^x$, demuestre que: $f(\alpha x) = [f(x)]^{\alpha}$

En los problemas 49 y 50 se definen otras dos funciones trascendentes.

49. La **función seno hiperbólico,** denotada senh x, se define como

$$\operatorname{senh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

(a) Demuestre que $f(x) = \operatorname{senh} x$ es una función impar.

(b) Haga la gráfica de $y = e^x$ y $y = e^{-x}$ en el mismo conjunto de ejes coordenados, y utilice el método de resta de ordenadas para obtener una gráfica de $f(x) = \operatorname{senh} x$.

50. La **función coseno hiperbólico,** denotada cosh x, se define como

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

(a) Demuestre que $f(x) = \cosh x$ es una función par.

(b) Haga la gráfica de $y = e^x$ y $y = e^{-x}$ en el mismo conjunto de ejes coordenados, y utilice el método de suma de ordenadas para obtener una gráfica de $f(x) = \cosh x$.

(c) Consulte el problema 49. Demuestre que para cada x,

$$(\cosh x)^2 - (\operatorname{senh} x)^2 = 1$$

51. Problema histórico Pierre de Fermat (1601-1665) conjeturó que la función

$$f(x) = 2^{(2^x)} + 1$$

para $x = 1, 2, 3, \ldots$, siempre es un número primo. Sin embargo, Leonhard Euler (1707-1783) demostró que esta fórmula falla para $x = 5$. Utilice una calculadora para determinar los números primos producidos por f para $x = 1,2,3,4$. Compruebe entonces que $f(5) = 641 \times 6{,}700{,}417$, el cual no es primo.

52. En un recipiente de 4 litros las bacterias duplican su cantidad cada minuto. Después de 60 minutos el recipiente está lleno. ¿Cuánto tiempo transcurrió para que el recipiente se llenase hasta la mitad?

53. Explique con sus propias palabras lo que es el número e y proporcione al menos dos aplicaciones donde se necesite utilizarlo.

54. ¿Cree usted que exista una función potencia que crezca más rápido que una función exponencial con base mayor que 1? Explique su respuesta.

Funciones logarítmicas

Recuerde que una función uno a uno $y = f(x)$ tiene una inversa definida (de manera implícita) por la ecuación $y = f(y)$. En particular, la función exponencial $y = f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, es uno a uno y, por lo tanto, tiene una inversa definida de manera implícita mediante la ecuación

$$x = a^y \qquad a > 0,\ a \neq 1$$

Esta inversa es tan importante que tiene su nombre propio: *función logarítmica.*

Funciones logarítmicas

La **función logarítmica base *a*,** donde $a > 0$ y $a \neq 1$, se denota $y = \log_a x$ (se lee "y es el logaritmo base a de x") y se define como

$$y = \log_a x \quad \text{si, y sólo si,} \quad x = a^y$$

EJEMPLO 1 *Relación entre los logaritmos y los exponentes*

(a) Si $y = \log_3 x$, entonces $x = 3^y$. Así, cuando $x = 9$, $y = 2$, de ese modo $9 = 3^2$ es equivalente a $2 = \log_3 9$.

(b) Si $y = \log_5 x$, entonces $x = 5^y$. Así, cuando $x = \frac{1}{5} = 5^{-1}$, $y = -1$, de modo que $\frac{1}{5} = 5^{-1}$ es equivalente a $-1 = \log_5 \left(\frac{1}{5}\right)$.

EJEMPLO 2 *Cambio de expresiones exponenciales a expresiones logarítmicas*

Cambiar cada expresión exponencial a una equivalente con logaritmos.

(a) $1.2^3 = m$ (b) $e^b = 9$ (c) $a^4 = 24$

Solución Utilizamos el hecho de que $y = \log_a x$ y $x = a^y$, $a > 0$, $a \neq 1$, son equivalentes.

(a) Si $1.2^3 = m$, entonces $3 = \log_{1.2} m$.

(b) Si $e^b = 9$, entonces $b = \log_e 9$.

(c) Si $a^4 = 24$, entonces $4 = \log_a 24$.

Ahora resuelva el problema 1.

EJEMPLO 3 *Cambio de expresiones logarítmicas a expresiones exponenciales*

Cambiar cada expresión logarítmica a una equivalente con exponentes.

(a) $\log_a 4 = 5$ (b) $\log_e b = -3$ (c) $\log_3 5 = c$

Solución (a) Si $\log_a 4 = 5$, entonces $a^5 = 4$.

(b) Si $\log_e b = -3$, entonces $e^{-3} = b$.

(c) Si $\log_3 5 = c$, entonces $3^c = 5$.

Ahora resuelva el problema 13.

Para determinar con exactitud el valor de un logaritmo, escribimos el logaritmo en notación exponencial y utilizamos el siguiente hecho:

$$\text{Si } a^u = a^v, \quad \text{entonces} \quad u = v. \tag{1}$$

El resultado (1) es consecuencia de que las funciones exponenciales son uno a uno.

EJEMPLO 4 *Determinación del valor exacto de una función logarítmica*

Determine el valor exacto de:

(a) $\log_2 8$ (b) $\log_3 \frac{1}{3}$ (c) $\log_5 25$

Solución (a) Para $y = \log_2 8$, tenemos la ecuación exponencial equivalente $2^y = 8 = 2^3$, así, por (1), $y = 3$. Por lo tanto, $\log_2 8 = 3$.

(b) Para $y = \log_3 \frac{1}{3}$, tenemos $3^y = \frac{1}{3} = 3^{-1}$, así $y = -1$. Por lo tanto, $\log_3 \frac{1}{3} = -1$.

(c) Para $y = \log_5 25$, tenemos $5^y = 25 = 5^2$, así $y = 2$. Por lo tanto, $\log_5 25 = 2$.

Ahora resuelva el problema 25.

Dominio de una función logarítmica

La función logarítmica $y = \log_a x$ es la inversa de la función exponencial $y = a^x$. Es decir, si $f(x) = a^x$, entonces $f^{-1}(x) = \log_a x$. Según el análisis de la sección 4.5 sobre funciones inversas, sabemos que para una función f y su inversa f^{-1}

$$\text{Dominio } f^{-1} = \text{Rango } f \quad \text{y} \quad \text{Rango } f^{-1} = \text{Dominio } f$$

En consecuencia:

Dominio de la función logarítmica = Rango de la función exponencial = $(0, \infty)$
Rango de la función logarítmica = Dominio de la función exponencial = $(-\infty, \infty)$

En el siguiente recuadro resumimos algunas propiedades de la función logarítmica:

$y = \log_a x$ (ecuación que lo define: $x = a^y$)
Dominio: $0 < x < \infty$ Rango: $-\infty < y < \infty$

Observe que el dominio de una función logarítmica consta de los números reales *positivos*.

EJEMPLO 5 *Determinación del dominio de una función logarítmica*

Determinar el dominio de cada función logarítmica:

(a) $F(x) = \log_2 (1 - x)$ (b) $g(x) = \log_5 \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ (c) $h(x) = \log_{1/2} |x|$

Solución (a) El dominio de F consta de las x tales que $(1 - x) > 0$; es decir, $x < 1$, o $(-\infty, 1)$.

(b) El dominio de g está restringido a

$$\frac{1+x}{1-x} > 0$$

Al resolver la desigualdad, determinamos que el dominio de g consta de las x entre -1 y 1, es decir, $-1 < x < 1$, o $(-1, 1)$.

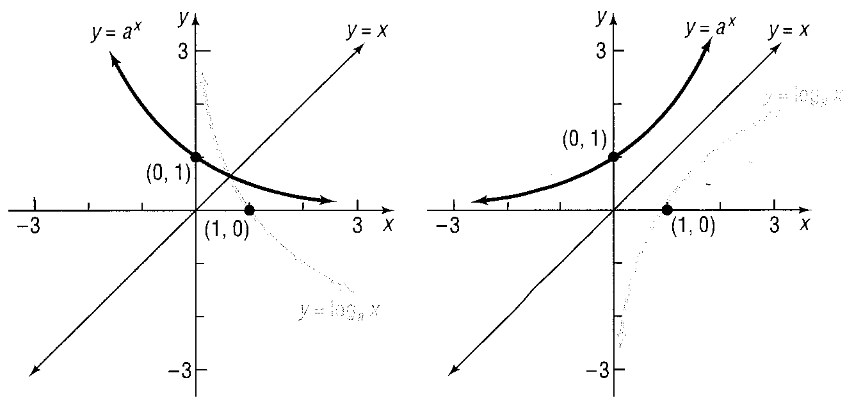
(c) Como $|x| > 0$ si $x \neq 0$, el dominio de h consta de todos los números reales distintos de cero.

Ahora resuelva el problema 39.

Gráficas de funciones logarítmicas

Dado que las funciones exponencial y logarítmica son inversas entre sí, la gráfica de una función logarítmica $y = \log_a x$ es la reflexión con respecto de la recta $y = x$ de la gráfica de la función exponencial $y = a^x$, como muestra la figura 10.

FIGURA 10



(a) $0 < a < 1$ **(b)** $a > 1$

Hechos inherentes a la gráfica de una función logarítmica $f(x) = \log_a x$

1. La intersección de la gráfica con el eje x es 1. No existe intersección con el eje y.
2. El eje y es una asíntota vertical de la gráfica.
3. Una función logarítmica es decreciente si $0 < a < 1$ y creciente si $a > 1$.
4. La gráfica es suave y continua, sin esquinas ni saltos.

Si la base de una función logarítmica es el número e, entonces tenemos la **función logaritmo natural.** Esta función se presenta con tal frecuencia en las aplicaciones que tiene asignado un símbolo especial, **ln** (del latín, *logarithmus naturalis*). Así,

$$y = \ln x \quad \text{si, y sólo si,} \quad x = e^y$$

Como $y = \ln x$ y la función exponencial $y = e^x$ son funciones inversas, podemos obtener la gráfica de $y = \ln x$ reflejando la gráfica de $y = e^x$ con respecto de la recta $y = x$. *Véase* la figura 11.

FIGURA 11

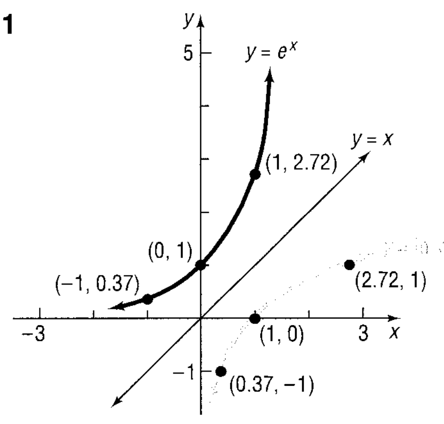


TABLA 5

x	$\ln x$
$\frac{1}{2}$	-0.69
2	0.69
3	1.10

Una calculadora con una tecla $\boxed{ln}$ permite obtener otros puntos en la gráfica de $f(x) = \ln x$. *Véase* la tabla 5.

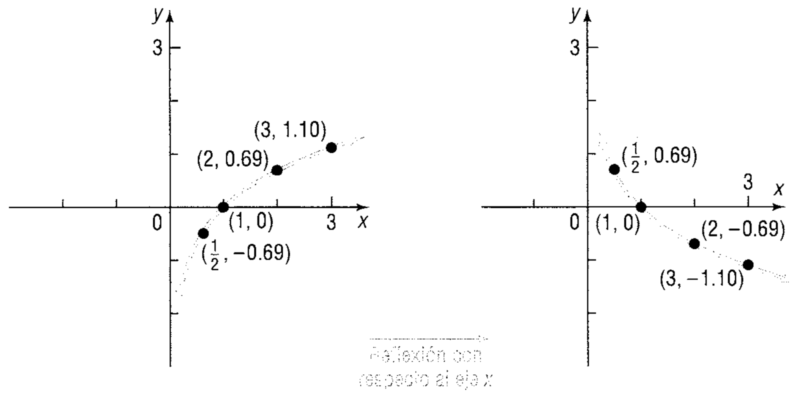
Verificación: haga la gráfica de $y = e^x$ y $y = \ln x$ en una misma pantalla cuadrada. Utilice TRACE para verificar los puntos sobre la gráfica dados en la figura 11. ¿Ve usted la simetría de las dos gráficas con respecto de la recta $y = x$?

EJEMPLO 6 *Graficaciones de funciones que son, en esencia, logarítmicas mediante corrimientos, reflexiones y semejanzas*

Haga la gráfica de $y = -\ln x$ a partir de la gráfica de $y = \ln x$.

Solución Obtenemos la gráfica de $y = -\ln x$ mediante una reflexión con respecto del eje x de la gráfica de $y = \ln x$. *Véase* la figura 12.

FIGURA 12



(a) $y = \ln x$ (b) $y = -\ln x$

EJEMPLO 7 *Graficaciones de funciones que son, en esencia, logarítmicas mediante corrimientos, reflexiones y semejanzas*

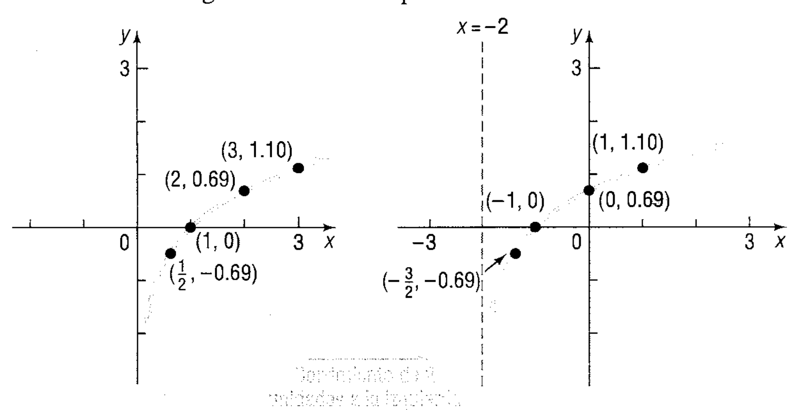
Haga la gráfica de: $y = \ln(x + 2)$

Solución El dominio consta de las x tales que

$$x + 2 > 0 \quad \text{o} \quad x > -2$$

Obtenemos la gráfica aplicando un corrimiento horizontal a la izquierda, en 2 unidades, como muestra la figura 13. Observe que la recta $x = -2$ es una asíntota vertical.

FIGURA 13



(a) $y = \ln x$ (b) $y = \ln(x + 2)$

EJEMPLO 8 *Graficación de funciones que son, en esencia, logarítmicas mediante corrimientos, reflexiones y semejanzas*

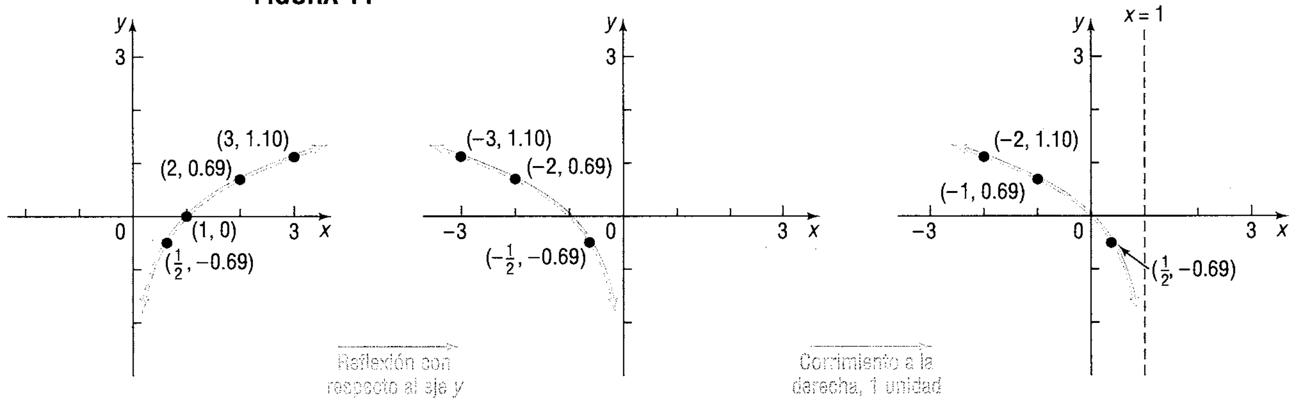
Haga la gráfica de: $y = \ln(1 - x)$

Solución El dominio consta de las x tales que

$$1 - x > 0 \quad \text{o} \quad x < 1$$

Obtenemos la gráfica de $y = \ln(1 - x)$, mediante los pasos ilustrados en la figura 14. Observe que la asíntota vertical de $y = \ln(1 - x)$ es $x = 1$.

FIGURA 14



(a) $y = \ln x$ **(b)** $y = \ln(-x)$ **(c)** $y = \ln(-x + 1) = \ln(1 - x)$

Ahora resuelva el problema 61.

EJEMPLO 9 *Alcohol y manejo*

Es posible medir la concentración de alcohol en la sangre de una persona. Investigaciones médicas recientes sugieren que el riesgo R (dado como un porcentaje) de tener un accidente automovilístico se modela mediante la ecuación

$$R = 6e^{kx}$$

donde x es la concentración variable de alcohol en la sangre y k una constante.

(a) Suponga que una concentración de alcohol en la sangre de 0.04 produce un riesgo del 10% ($R = 10$) de sufrir un accidente. Determine la constante k de la ecuación.

(b) Utilice el valor de k e indique cuál es el riesgo si la concentración es de 0.17.

(c) Con el mismo valor de k encuentre la concentración de alcohol correspondiente a un riesgo del 100 por ciento.

(d) Si la ley establece que las personas con riesgo de sufrir un accidente del 20% o mayor no deben manejar, ¿con cuál concentración de alcohol en la sangre debe un conductor ser arrestado y multado?

Solución (a) Para una concentración de alcohol en la sangre de 0.04 y un riesgo del 10%, haga $x = 0.04$ y $R = 10$ en la ecuación y resuelva para k.

$$R = 6e^{kx}$$
$$10 = 6e^{k(0.04)}$$
$$\frac{10}{6} = e^{0.04k} \qquad \text{Cambiar a una expresión logarítmica.}$$
$$0.04k = \ln\frac{10}{6} = 0.5108256$$
$$k = 12.77$$

(b) Con $k = 12.77$ y $x = 0.17$ en la ecuación, determinamos que el riesgo R es

$$R = 6e^{kx} = 6e^{(12.77)(0.17)} = 52.6$$

Para una concentración de alcohol en la sangre de 0.17, el riesgo de sufrir un accidente es cercano al 52.6 por ciento.

(c) Con $k = 12.77$ y $R = 100$ en la ecuación, determinamos que la concentración x de alcohol en la sangre es

$$\begin{aligned} R &= 6e^{kx} \\ 100 &= 6e^{12.77x} \\ \frac{100}{6} &= e^{12.77x} \\ 12.77x &= \ln\frac{100}{6} = 2.8134 \\ x &= 0.22 \end{aligned}$$

Cambiar a una expresión logarítmica.

Para una concentración de alcohol en la sangre de 0.22, el riesgo de tener un accidente es del 100 por ciento.

(d) Con $k = 12.77$ y $R = 20$ en la ecuación, determinamos que la concentración x de alcohol en la sangre es

$$\begin{aligned} R &= 6e^{kx} \\ 20 &= 6e^{12.77x} \\ \frac{20}{6} &= e^{12.77x} \\ 12.77x &= \ln\frac{20}{6} = 1.204 \\ x &= 0.094 \end{aligned}$$

Un conductor que presente una concentración de alcohol en la sangre a un nivel de 0.094, debe ser arrestado y multado.

Nota: En la mayor parte de Estados Unidos, al conductor que rebasa el 0.10 de contenido de alcohol en la sangre se le multa y se le hace llegar un citatorio. En algunos estados basta con el 0.08.

Resumen

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

$f(x) = \log_a x, \quad a > 1$ ($y = \log_a x$ significa $x = a^y$)	Dominio: $(0, \infty)$; rango: $(-\infty, \infty)$; intersección-x: 1; intersección-y: ninguna; asíntota vertical: eje y; creciente; uno a uno. *Véase* en la figura 10(b) una gráfica típica.
$f(x) = \log_a x, \quad 0 < a < 1$ ($y = \log_a x$ significa $x = a^y$)	Dominio: $(0, \infty)$; rango: $(-\infty, \infty)$; intersección-x: 1; intersección-y: ninguna; asíntota vertical: eje y; decreciente; uno a uno. *Véase* en la figura 10(a) una gráfica típica.

Ejercicio 4.2

En los problemas del 1 al 12, cambie cada expresión exponencial por una expresión equivalente con un logaritmo.

1. $9 = 3^2$ **2.** $16 = 4^2$ **3.** $a^2 = 1.6$ **4.** $a^3 = 2.1$ **5.** $1.1^2 = M$ **6.** $2.2^3 = N$

7. $2^x = 7.2$ **8.** $3^x = 4.6$ **9.** $x^{\sqrt{2}} = \pi$ **10.** $x^\pi = e$ **11.** $e^x = 8$ **12.** $e^{2.2} = M$

En los problemas del 13 al 24, cambie cada expresión logarítmica por una expresión equivalente con un exponente.

13. $\log_2 8 = 3$ **14.** $\log_3(\frac{1}{9}) = -2$ **15.** $\log_a 3 = 6$ **16.** $\log_b 4 = 2$

17. $\log_3 2 = x$ **18.** $\log_2 6 = x$ **19.** $\log_2 M = 1.3$ **20.** $\log_3 N = 2.1$

21. $\log_{\sqrt{2}} \pi = x$ **22.** $\log_\pi x = \frac{1}{2}$ **23.** $\ln 4 = x$ **24.** $\ln x = 4$

En los problemas del 25 al 36, determine el valor exacto de cada logaritmo sin utilizar una calculadora o una tabla.

25. $\log_2 1$ **26.** $\log_8 8$ **27.** $\log_5 25$ **28.** $\log_3(\frac{1}{9})$ **29.** $\log_{1/2} 16$ **30.** $\log_{1/3} 9$

31. $\log_{10} \sqrt{10}$ **32.** $\log_5 \sqrt[3]{25}$ **33.** $\log_{\sqrt{2}} 4$ **34.** $\log_{\sqrt{3}} 9$ **35.** $\ln \sqrt{e}$ **36.** $\ln e^3$

En los problemas del 37 al 46, determine el dominio de cada función.

37. $f(x) = \ln(3 - x)$ **38.** $g(x) = \ln(x^2 - 1)$ **39.** $F(x) = \log_2 x^2$

40. $H(x) = \log_5 x^3$ **41.** $h(x) = \log_{1/2}(x^2 - x - 6)$ **42.** $G(x) = \log_{1/2}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

43. $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ **44.** $g(x) = \ln(x - 5)$ **45.** $g(x) = \log_5\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ **46.** $h(x) = \log_3\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)$

En los problemas del 47 al 50, utilice una calculadora para evaluar cada expresión. Redondee la respuesta a tres cifras decimales.

47. $\ln \dfrac{5}{3}$ **48.** $\dfrac{\ln 5}{3}$ **49.** $\dfrac{\ln 10/3}{0.04}$ **50.** $\dfrac{\ln 2/3}{-0.1}$

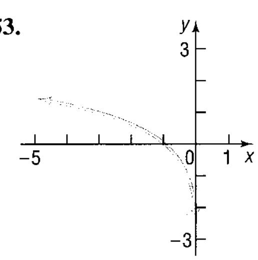
51. Determine a de modo que la gráfica de $f(x) = \log_a x$ contenga al punto $(2, 2)$.

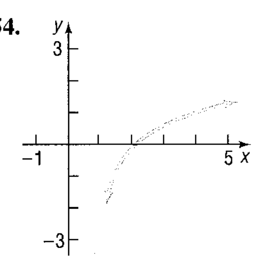
52. Determine a de modo que la gráfica de $f(x) = \log_a x$ contenga al punto $(\frac{1}{2}, -4)$.

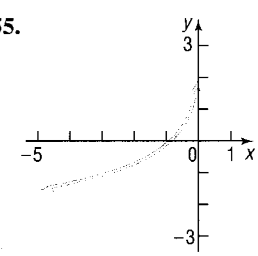
En los problemas del 53 al 60 aparecen las gráficas de una función logarítmica. Relacione cada gráfica con las siguientes funciones:

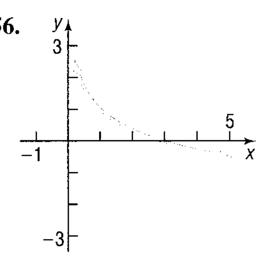
A. $y = \log_3 x$ *B.* $y = \log_3(-x)$ *C.* $y = -\log_3 x$ *D.* $y = -\log_3(-x)$

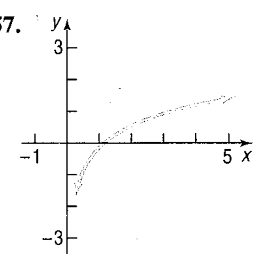
E. $y = \log_3 x - 1$ *F.* $y = \log_3(x - 1)$ *G.* $y = \log_3(1 - x)$ *H.* $y = 1 - \log_3 x$

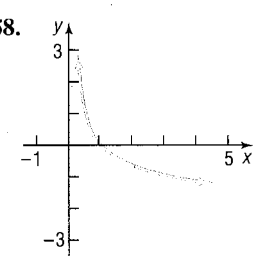
53.


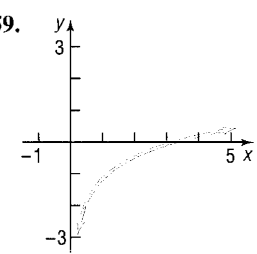
54.


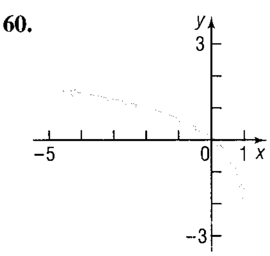
55.


56.


57.


58.


59.


60.


En los problemas del 61 al 70, utilice la gráfica de $y = \ln x$, junto con las técnicas de corrimiento, compresión, alargamiento y reflexión, para hacer la gráfica de cada función.

61. $f(x) = \ln(x + 4)$ **62.** $f(x) = \ln(x - 3)$ **63.** $f(x) = \ln(-x)$ **64.** $f(x) = -\ln(-x)$

65. $g(x) = \ln 2x$ **66.** $h(x) = \ln \frac{1}{2}x$ **67.** $f(x) = 3 \ln x$ **68.** $f(x) = -2 \ln x$

69. $g(x) = \ln(3 - x)$ **70.** $h(x) = \ln(4 - x)$

71. *Óptica.* Si un solo cristal obstruye el 10% de la luz que pasa por él, entonces el porcentaje de luz que pasa a través de n cristales consecutivos está dado aproximadamente por la ecuación

$$P = 100e^{-0.1n}$$

(a) ¿Cuántos cristales son necesarios para bloquear al menos un 50% de la luz?
(b) ¿Y para bloquear al menos el 75% de la luz?

72. *Química.* El pH de una solución química está dado aproximadamente por la fórmula

$$\text{pH} = -\log_{10} [\text{H}^+]$$

donde $[\text{H}^+]$ es la concentración de iones de hidrógeno en moles por litro. Los valores del pH varían de 0 (ácido) a 14 (alcalino).

(a) Determine el pH del agua en un recipiente de 1 litro, con 0.0000001 moles de iones de hidrógeno.
(b) Determine la concentración de iones de hidrógeno en una solución semiácida, con un pH de 4.2.

73. *Satélites espaciales.* El número de vatios w proporcionados por la fuente de energía de un satélite espacial después de un periodo de d días está dado por la fórmula

$$w = 50e^{-0.004d}$$

(a) ¿Cuánto tiempo transcurre hasta que la energía disponible llega a 30 vatios?
(b) ¿Y hasta que desciende a solamente 5 vatios?

74. *Recuperación de una herida.* La recuperación normal de una herida se puede modelar mediante una función exponencial. Si A_0 representa el área original de la herida y A es igual al área de la herida después de n días, entonces la fórmula

$$A = A_0e^{-0.35n}$$

describa el área de una herida en el n-ésimo día después de una lesión, si no hay infecciones que retarden la recuperación. Suponga que una herida tiene un área inicial de 1 centímetro cuadrado.

(a) Si hay un proceso de recuperación, ¿cuántos días deben transcurrir antes de que la herida tenga la mitad de su tamaño original?
(b) ¿Cuánto tiempo antes de que tenga el 10% de su tamaño original?

75. *Prescripción de los medicamentos.* La fórmula

$$D = 5e^{-0.4h}$$

sirve para determinar el número de miligramos D de cierto medicamento en el flujo sanguíneo de un paciente, h horas después de su administración. Cuando el número de miligramos llegue a 2 se debe administrar de nuevo el medicamento. ¿Cuánto tiempo transcurre entre las inyecciones?

76. *Difusión de rumores.* Un modelo para el número N de personas en una comunidad escolar que han escuchado cierto rumor es

$$N = P(1 - e^{-0.15d})$$

donde P es la población total de la comunidad y d el número de días transcurridos desde el inicio del rumor. En una comunidad de 1000 estudiantes, ¿cuántos días habrán transcurrido antes de que 450 estudiantes hayan escuchado el rumor?

77. *Corriente alterna en un circuito RL.* La ecuación que gobierna la cantidad de corriente I (en amperios) después de un tiempo t (en segundos) en un circuito RL individual, el cual consta de una resistencia R (en ohms), una inductancia L (en henrios) y una fuerza electromotriz E (en voltios) es

$$I = \frac{E}{R}[1 - e^{-(R/L)t}]$$

Si $E = 12$ voltios, $R = 10$ ohms, y $L = 5$ henrios, ¿cuánto tiempo transcurre antes de obtener una corriente de 0.5 amperios? ¿Y de 1.0 amperios? Haga la gráfica de la ecuación.

78. *Curva de aprendizaje.* En ocasiones los sicólogos utilizan la función

$$L(t) = A(1 - e^{-kt})$$

para medir la cantidad L aprendida en el tiempo t. El número A representa la cantidad por aprender y k mide el nivel de aprendizaje. Suponga que un estudiante debe aprender un total de A= 200 palabras de vocabulario. Un sicólogo determina que el estudiante aprendió 20 palabras del vocabulario cada 5 minutos.

(a) Determine la tasa de aprendizaje k.
(b) ¿Aproximadamente cuántas palabras habrá aprendido el estudiante después de 10 minutos?
(c) ¿Y después de 15 minutos?
(d) ¿Cuánto tiempo tardará el estudiante en aprender 180 palabras?

79. *Alcohol y manejo.* Es posible medir la concentración de alcohol en la sangre de una persona. Supongamos que el riesgo R (dado como un porcentaje) de tener un accidente de automóvil se modela mediante la ecuación

$$R = 3e^{kx}$$

donde x es la concentración variable de alcohol en la sangre y k una constante.

(a) Suponga que una concentración del 0.06 de alcohol en la sangre produce un riesgo del 10% ($R = 10$) de sufrir un accidente. Determine la constante k de la ecuación.
(b) Utilice ese valor de k e indique cuál es el riesgo si la concentración es de 0.17.
(c) Con el mismo valor de k indique la concentración de alcohol correspondiente a un riesgo del 100 por ciento.
(d) Si la ley establece que las personas con riesgo de sufrir un accidente de 15% o mayor no deben manejar, ¿con cuál concentración de alcohol en la sangre debe un conductor ser arrestado y multado?
(e) Compare esta situación con la del ejemplo 9. Si usted participase en la elaboración de las leyes, ¿cuál caso apoyaría? Proporcione sus razones.

80. Diga si existe una función de la forma $y = x^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, que crezca más lentamente que una función logarítmica con base mayor que 1. Explique su respuesta.

81. *Construcción de una función.* Revise la figura 2 en la página 194. Si los puntos (1950,20) y (1990,50) están sobre la gráfica, determine una ecuación exponencial $y = Ae^{bt}$ que se ajuste a los datos. [*Sugerencia*: Haciendo $t = 0$ correspondiente al año 1950, demuestre que $A = 20$. Luego determine b.] ¿La proyección de 102 millones en 2015 es confirmada por su modelo? Intente obtener datos similares acerca de las tasas de nacimiento y construya una función que se ajuste a esos datos.

82. *Pensamiento crítico.* Al comprar un automóvil nuevo existe un punto que puede considerarse como la forma en que el auto conserva su valor en el tiempo. Las diversas marcas de automóviles pueden tener diferentes tasas de depreciación. En seguida presentamos una forma de calcular la tasa de depreciación para un automóvil. Suponga que los precios actuales de un Mercedes son los siguientes:

NUEVO	**1 AÑO VIEJO**	**2 AÑOS VIEJO**	**3 AÑOS VIEJO**	**4 AÑOS VIEJO**	**5 AÑOS VIEJO**
\$38,000	\$36,600	\$32,400	\$28,750	\$25,400	\$21,200

Utilice la fórmula N = A(e^{Rt}) donde N es el precio del auto nuevo y A el precio en un año específico, para determinar R, la tasa anual de depreciación, para un tiempo específico t. ¿Cuándo será el mejor momento para vender el auto? Consulte una lista de precios de automóviles y compare dos modelos similares. ¿Cuál tiene la mejor tasa de depreciación?

4.3

Propiedades de los logaritmos

Los logaritmos tienen algunas propiedades muy útiles que se pueden deducir en forma directa de la definición y las leyes de los exponentes.

EJEMPLO 1 *Establecimiento de las propiedades de los logaritmos*

(a) Muestre que $\log_a 1 = 0$. (b) Muestre que $\log_a a = 1$.

Solución (a) Establecimos este hecho al hacer la gráfica de $y = \log_a x$ (*véase* la figura 10). En forma algebraica, si $y = \log_a 1$, tenemos $a^y = 1 = a^0$, de modo que $y = 0$.

(b) Si $y = \log_a a$, tenemos que $a^y = a = a^1$, de modo que $y = 1$.

$$\boxed{\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1}$$

Teorema propiedades de los logaritmos En las propiedades dadas a continuación, M y a son números reales positivos, con $a \neq 1$, y r es cualquier número real.

El número $\log_a M$ es el exponente al que debemos elevar a para obtener M. Es decir,

$$\boxed{a^{\log_a M} = M \qquad (1)}$$

El logaritmo base a de a elevada a una potencia es igual a esa potencia. Esto es,

$$\boxed{\log_a a^r = r \qquad (2)}$$

Demostración de la propiedad (1) Sea $x = \log_a M$. Cambiamos esta expresión logarítmica por la expresión exponencial equivalente:

$$a^x = M$$

Pero $x = \log_a M$, de modo que

$$a^{\log_a M} = M$$

Demostración de la propiedad (2) Sea $x = a^r$. Cambiamos esta expresión exponencial por la expresión logarítmica equivalente:

$$\log_a x = r$$

Pero $x = a^r$, de modo que

$$\log_a a^r = r$$

EJEMPLO 2 *Uso de las propiedades (1) y (2)*

(a) $2^{\log_2 \pi} = \pi$ (b) $\log_{0.2} 0.2^{-\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$ (c) $\ln e^{kt} = kt$

Ahora veamos otras propiedades útiles de los logaritmos.

Teorema En las siguientes propiedades M, N y a son números reales positivos, con $a \neq 1$, y r es cualquier número real.

El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N \qquad (3)$$

El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos

$$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N \qquad (4)$$

$$\log_a\left(\frac{1}{N}\right) = -\log_a N \qquad (5)$$

$$\log_a M^r = r \log_a M \qquad (6)$$

Realizaremos la deducción de las propiedades (3) y (6) y dejaremos la de las propiedades (4) y (5) como ejercicio (*véanse* los problemas 63 y 64).

Demostración de la propiedad (3) Sean $A = \log_a M$ y $B = \log_a N$. Estas expresiones son equivalentes a las expresiones exponenciales

$$a^A = M \quad \text{y} \quad a^B = N$$

Ahora

$$\begin{aligned} \log_a MN = \log_a a^A a^B &= \log_a a^{A+B} && \text{Ley de los exponentes.} \\ &= A + B && \text{Propiedad (2) de los logaritmos.} \\ &= \log_a M + \log_a N \end{aligned}$$

Demostración de la propiedad (6) Sea $A = \log_a M$. Esta expresión es equivalente a

$$a^A = M$$

Ahora

$$\begin{aligned} \log_a M^r = \log_a (a^A)^r &= \log_a a^{rA} && \text{Ley de los exponentes.} \\ &= rA && \text{Propiedades (2) de los logaritmos.} \\ &= r \log_a M \end{aligned}$$

Podemos utilizar los logaritmos para transformar productos en sumas, cocientes en diferencias, y potencias en factores. Tales transformaciones demuestran su utilidad cuando se aplican en ciertos tipos de problemas del cálculo.

EJEMPLO 3 *Una expresión logarítmica en forma de una suma de logaritmos*

Escribir $\log_a(x\sqrt{x^2+1})$ como una suma de logaritmos. Expresar todas las potencias como factores.

Solución

$$\begin{aligned} \log_a(x\sqrt{x^2+1}) &= \log_a x + \log_a \sqrt{x^2+1} && \text{Propiedad (3).} \\ &= \log_a x + \log_a (x^2+1)^{1/2} \\ &= \log_a x + \tfrac{1}{2}\log_a (x^2+1) && \text{Propiedad (6).} \end{aligned}$$

EJEMPLO 4 *Una expresión logarítmica en forma de diferencia de logaritmos*

Escribir

$$\log_a \frac{x^2}{(x-1)^3}$$

como una diferencia de logaritmos. Expresar todas las potencias como factores.

Solución

$$\log_a \frac{x^2}{(x-1)^3} \underset{\text{Propiedad (4)}}{=} \log_a x^2 - \log_a (x-1)^3 \underset{\text{Propiedad (6)}}{=} 2 \log_a x - 3 \log_a (x-1)$$

Ahora resuelva el problema 13.

EJEMPLO 5 *Una expresión logarítmica en forma de suma y diferencia de logaritmos*

Escribir

$$\log_a \frac{x^3\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^4}$$

como suma y diferencia de logaritmos. Expresar todas las potencias como factores.

Solución

$$\begin{aligned}
\log_a \frac{x^3\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^4} &= \log_a (x^3\sqrt{x^2+1}) - \log_a (x+1)^4 \\
&= \log_a x^3 + \log_a \sqrt{x^2+1} - \log_a (x+1)^4 \\
&= \log_a x^3 + \log_a (x^2+1)^{1/2} - \log_a (x+1)^4 \\
&= 3 \log_a x + \tfrac{1}{2} \log_a (x^2+1) - 4 \log_a (x+1)
\end{aligned}$$

Otro uso de las propiedades de la (3) a la (6) es escribir las sumas o restas de logaritmos con la misma base como un único logaritmo.

EJEMPLO 6 *Expresiones en forma de un único logaritmo*

Escriba cada una de las siguientes expresiones como un único logaritmo:

(a) $\log_a 7 + 4 \log_a 3$

(b) $\frac{2}{3} \log_a 8 - \log_a (3^4 - 8)$

(c) $\log_a x + \log_a 9 + \log_a (x^2+1) - \log_a 5$

Solución

(a)
$$\begin{aligned}
\log_a 7 + 4 \log_a 3 &= \log_a 7 + \log_a 3^4 && \text{Propiedad (6).} \\
&= \log_a 7 + \log_a 81 \\
&= \log_a (7 \cdot 81) && \text{Propiedad (3).} \\
&= \log_a 567
\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}
\tfrac{2}{3} \log_a 8 - \log_a (3^4 - 8) &= \log_a 8^{2/3} - \log_a (81 - 8) && \text{Propiedad (6).} \\
&= \log_a 4 - \log_a 73 \\
&= \log_a \left(\tfrac{4}{73}\right) && \text{Propiedad (4).}
\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}
\log_a x + \log_a 9 + \log_a (x^2+1) - \log_a 5 &= \log_a 9x + \log_a (x^2+1) - \log_a 5 \\
&= \log_a [9x(x^2+1)] - \log_a 5 \\
&= \log_a \left[\frac{9x(x^2+1)}{5}\right]
\end{aligned}$$

Cuidado: un error común entre estudiantes es expresar el logaritmo de una suma como la suma de logaritmos:

$$\log_a(M+N) \quad \text{no es igual a} \quad \log_a M + \log_a N$$

Enunciado correcto $\quad \log_a MN = \log_a M + \log_a N \quad$ Propiedad (3).

Otro error común es expresar la diferencia de logaritmos como el cociente de logaritmos:

$$\log_a M - \log_a N \quad \text{no es igual a} \quad \frac{\log_a M}{\log_a N}$$

Enunciado correcto $\quad \log_a M - \log_a N = \log_a\left(\frac{M}{N}\right) \quad$ Propiedad (4).

Ahora resuelva el problema 23.

Existen otras dos propiedades de los logaritmos que debemos conocer; ellas son consecuencia del hecho de que la función logarítmica $y = \log_a x$ es uno a uno.

Teorema En las siguientes propiedades M, N y a son números reales positivos, con $a \neq 1$:

$$\text{Si} \quad M = N, \quad \text{entonces} \quad \log_a M = \log_a N. \qquad (7)$$

$$\text{Si} \quad \log_a M = \log_a N, \quad \text{entonces} \quad M = N. \qquad (8)$$

Las propiedades (7) y (8) sirven para resolver *ecuaciones logarítmicas*, tema de la siguiente sección.

Uso de una calculadora para evaluar logaritmos con bases distintas de *e* o 10

Los logaritmos con base 10, llamados **logaritmos comunes,** fueron utilizados para facilitar los cálculos aritméticos antes de que las calculadoras tuvieran tan amplia difusión . (*Véase* la característica histórica al final de esta sección.) Los logaritmos naturales, es decir, aquellos cuya base es el número e, siguen siendo muy importantes debido a la frecuencia con que aparecen en el estudio de los fenómenos naturales.

Los logaritmos comunes se abrevian por lo general como **log,** donde se entiende que la base es 10, al igual que los logaritmos naturales se abrevian mediante **ln,** donde se entiende que la base es e.

Muchas calculadoras tienen teclas $\boxed{\log}$ e $\boxed{\ln}$ para calcular el logaritmo común y el logaritmo natural de un número. Veamos un ejemplo para calcular logaritmos con bases distintas de 10 o de e.

EJEMPLO 1

Evaluar: $\log_2 7$

Solución Sea $y = \log_2 7$. Entonces $2^y = 7$, de modo que

$$\begin{aligned} 2^y &= 7 \\ \ln 2^y &= \ln 7 \\ y \ln 2 &= \ln 7 \\ y &= \frac{\ln 7}{\ln 2} \\ &= 2.8074 \end{aligned}$$

El ejemplo 7 nos muestra la forma para cambiar la base de 2 a e. En general, para cambiar de la base b a la base a utilizamos la **fórmula para el cambio de base.**

Teorema fórmula para el cambio de base

Si $a \neq 1$, $b \neq 1$, y M son números reales positivos, entonces

$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a} \qquad (9)$$

Demostración

Deducimos esta fórmula como sigue: sea $y = \log_a M$. Entonces $a^y = M$, de modo que

$$\begin{aligned} \log_b a^y &= \log_b M && \text{Propiedad (7).} \\ y \log_b a &= \log_b M && \text{Propiedad (6).} \\ y &= \frac{\log_b M}{\log_b a} && \text{Despejamos } y. \\ \log_a M &= \frac{\log_b M}{\log_b a} && y = \log_a M \end{aligned}$$

Como algunas calculadoras sólo tienen teclas para $\boxed{\log}$ e $\boxed{\ln}$, en la práctica la fórmula para el cambio de base utiliza $b = 10$ o $b = e$. Así,

$$\log_a M = \frac{\log M}{\log a} \quad \text{y} \quad \log_a M = \frac{\ln M}{\ln a} \qquad (10)$$

Comentario: para hacer la gráfica de funciones logarítmicas cuando la base es distinta de e o de 10, necesitamos la fórmula para el cambio de base. Así, por ejemplo, para hacer la gráfica de $y = \log_2 x$, podemos hacer la gráfica de $y = (\ln x)/(\ln 2)$. Inténtelo.

EJEMPLO 8

Uso de la fórmula para el cambio de base

Calcule:

(a) $\log_5 89$ (b) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{5}$

Solución

(a) $\log_5 89 = \dfrac{\log 89}{\log 5} \approx \dfrac{1.94939}{0.69897} = 2.7889$

o

$$\log_5 89 = \frac{\ln 89}{\ln 5} \approx \frac{4.4886}{1.6094} = 2.7889$$

(b) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{5} = \dfrac{\log \sqrt{5}}{\log \sqrt{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}\log 5}{\frac{1}{2}\log 2} \approx \dfrac{0.69897}{0.30103} = 2.3219$

o

$$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{5} = \frac{\ln \sqrt{5}}{\ln \sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{2}\ln 5}{\frac{1}{2}\ln 2} \approx \frac{1.6094}{0.6931} = 2.3219$$

Ahora resuelva el problema 41.

Resumen de las propiedades de los logaritmos

En la siguiente lista, $a > 0$, $a \neq 1$, y $b > 0$, $b \neq 1$; también, $M > 0$ y $N > 0$.

Definición	$y = \log_a x$ significa que $x = a^y$
Propiedades de los logaritmos	$\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$
	$a^{\log_a M} = M$; $\log_a a^r = r$
	$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
	$\log_a\left(\dfrac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$
	$\log_a\left(\dfrac{1}{N}\right) = -\log_a N$
	$\log_a M^r = r \log_a M$
Fórmula para el cambio de base	$\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$

CARACTERÍSTICA HISTÓRICA

■ Los logaritmos fueron inventados hacia 1590 por John Napier (1550-1617) y Jobst Bürgi (1552-1632) en forma independiente uno del otro. Napier, cuyo trabajo tuvo mayor influencia, era un noble escocés, un hombre reservado de quien sus vecinos pensaban que tenía tratos con el diablo. Su enfoque de los logaritmos fue un poco distinto al de nosotros; se basaba en la relación entre las sucesiones aritméticas y geométricas (*véase* el capítulo 11), y no en la relación de función inversa de los logaritmos con las funciones exponenciales (descrita en la sección 4.2). Las tablas de Napier, publicadas en 1614, contienen lo que ahora llamaríamos *logaritmos naturales* de senos y eran más bien difíciles de utilizar. Un profesor de Londres, Henry Briggs, se interesó en las tablas y visitó a Napier. En sus conversaciones desarrollaron la idea de los logaritmos comunes y, entonces, Briggs convirtió las tablas de Napier en tablas de logaritmos comunes, publicadas en 1617. Su importancia para los cálculos fue reconocida de inmediato y en 1650 ya eran impresas en lugares tan remotos como China. Se mantuvieron como una importante herramienta de cálculo hasta el surgimiento de la calculadora manual barata, alrededor de 1972, lo que hizo disminuir su importancia al desarrollar los cálculos mas no su interés teórico.

Un efecto colateral de la invención de los logaritmos fue la popularización del sistema decimal de notación para los números reales. ■

4.3

Ejercicio 4.3

En los problemas del 1 al 12, suponga que $\ln 2 = a$ *y* $\ln 3 = b$. *Utilice las propiedades de los logaritmos para escribir cada logaritmo en términos de a y b.*

1. $\ln 6$	**2.** $\ln \frac{2}{3}$	**3.** $\ln 1.5$	**4.** $\ln 0.5$
5. $\ln 2e$	**6.** $\ln\left(\dfrac{3}{e}\right)$	**7.** $\ln 12$	**8.** $\ln 24$
9. $\ln \sqrt[5]{18}$	**10.** $\ln \sqrt[4]{48}$	**11.** $\log_2 3$	**12.** $\log_3 2$

En los problemas del 13 al 22, escriba cada expresión como una suma y diferencia de logaritmos. Exprese las potencias como factores.

13. $\ln(x^2\sqrt{1-x})$ **14.** $\ln(x\sqrt{1+x^2})$ **15.** $\log_2\left(\dfrac{x^3}{x-3}\right)$ **16.** $\log_5\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x^2-1}\right)$

17. $\log\left[\dfrac{x(x+2)}{(x+3)^2}\right]$ **18.** $\log\dfrac{x^3\sqrt{x+1}}{(x-2)^2}$ **19.** $\ln\left[\dfrac{x^2-x-2}{(x+4)^2}\right]^{1/3}$ **20.** $\ln\left[\dfrac{(x-4)^2}{x^2-1}\right]^{2/3}$

21. $\ln\dfrac{5x\sqrt{1-3x}}{(x-4)^3}$ **22.** $\ln\left[\dfrac{5x^2\sqrt[3]{1-x}}{4(x+1)^2}\right]$

En los problemas del 23 al 32, escriba cada expresión como un único logaritmo.

23. $3\log_5 u + 4\log_5 v$

24. $\log_3 u^2 - \log_3 v$

25. $\log_{1/2}\sqrt{x} - \log_{1/2} x^3$

26. $\log_2\left(\dfrac{1}{x}\right) + \log_2\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

27. $\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) + \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) - \ln(x^2-1)$

28. $\log\left(\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-4}\right) - \log\left(\dfrac{x^2+7x+6}{x+2}\right)$

29. $8\log_2\sqrt{3x-2} - \log_2\left(\dfrac{4}{x}\right) + \log_2 4$

30. $21\log_3\sqrt[3]{x} + \log_3 9x^2 - \log_5 25$

31. $2\log_a 5x^3 - \frac{1}{2}\log_a(2x+3)$

32. $\frac{1}{3}\log(x^3+1) + \frac{1}{2}\log(x^2+1)$

En los problemas del 33 al 40, utilice la fórmula para el cambio de base y una calculadora para evaluar cada logaritmo. Redondee la respuesta a tres cifras decimales.

33. $\log_3 21$ **34.** $\log_5 18$ **35.** $\log_{1/3} 71$ **36.** $\log_{1/2} 15$

37. $\log_{\sqrt{2}} 7$ **38.** $\log_{\sqrt{5}} 8$ **39.** $\log_\pi e$ **40.** $\log_\pi \sqrt{2}$

41. Muestre que $\log_a(x+\sqrt{x^2-1}) + \log_a(x-\sqrt{x^2-1}) = 0$

42. Muestre que $\log_a(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}) + \log_a(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}) = 0$

43. Muestre que $\ln(1+e^{2x}) = 2x + \ln(1+e^{-2x})$

44. Si $f(x) = \log_a x$, muestre que $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \log_a\left(1+\dfrac{h}{x}\right)^{1/h}, \quad h \neq 0$

45. Si $f(x) = \log_a x$, muestre que $-f(x) = \log_{1/a} x$

46. Si $f(x) = \log_a x$, muestre que $f(1/x) = -f(x)$

47. Si $f(x) = \log_a x$, muestre que $f(AB) = f(A) + f(B)$

48. Si $f(x) = \log_a x$, muestre que $f(x^\alpha) = \alpha f(x)$

En los problemas del 49 al 58, exprese a y como una función de x. La constante C es un número positivo.

49. $\ln y = \ln x + \ln C$ **50.** $\ln y = \ln(x+C)$ **51.** $\ln y = \ln x + \ln(x+1) + \ln C$

52. $\ln y = 2\ln x - \ln(x+1) + \ln C$ **53.** $\ln y = 3x + \ln C$ **54.** $\ln y = -2x + \ln C$

55. $\ln(y-3) = -4x + \ln C$ **56.** $\ln(y+4) = 5x + \ln C$

57. $3\ln y = \frac{1}{2}\ln(2x+1) - \frac{1}{3}\ln(x+4) + \ln C$

58. $2\ln y = -\frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{3}\ln(x^2+1) + \ln C$

59. Determine el valor de $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$.

60. Determine el valor de $\log_2 4 \cdot \log_4 6 \cdot \log_6 8$.

61. Determine el valor de $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \ldots \cdot \log_n(n+1) \cdot \log_{n+1} 2$.

62. Determine el valor de $\log_2 2 \cdot \log_2 4 \cdot \ldots \cdot \log_2 2^n$.

63. Muestre que $\log_a(M/N) = \log_a M - \log_a N$, donde a, M, y N son números reales positivos, con $a \neq 1$.

64. Muestre que $\log_a(1/N) = -\log_a N$, donde a y N son números reales positivos, con $a \neq 1$.

65. Determine el dominio de $f(x) = \log_a x^2$ y el dominio de $g(x) = 2\log_a x$. Dado que $\log_a x^2 = 2\log_a x$, ¿cómo explica usted el hecho de que los dominios no sean iguales? Escriba una breve explicación.

MISIÓN POSIBLE

Capítulo 4

Suponga que su equipo de trabajo ha sido llamado para resolver un problema en un restaurante de comida rápida cuyos propietarios piensan que el café debe prepararse a 170° Fahrenheit. Pero a esa temperatura el café está demasiado caliente y si a un cliente se le derramara por accidente le provocaría quemaduras de tercer grado.

Lo que necesitan es un recipiente especial donde se caliente el agua a 170°F para preparar el café a esa temperatura, y después enfriarlo con rapidez hasta una temperatura en que se pueda beber, como 140°F, y mantenerlo ahí, o al menos sobre los 120°F durante un periodo razonable sin tener que recalentarlo. Para enfriar el café, tres compañías han formulado propuestas con las siguientes especificaciones:

(a) CentiKeeper tiene un recipiente que reduce la temperatura de un líquido de 200°F a 100°F en 90 minutos, manteniendo una temperatura constante de 70°F.

(b) TempControl ofrece un recipiente que reduce la temperatura de un líquido de 200°F a 110°F en 60 minutos, manteniendo una temperatura constante de 60°F.

(c) Hot'n'Cold, Inc., propone un recipiente que reduce la temperatura de un líquido de 210°F a 90°F en 30 minutos, manteniendo una temperatura constante de 50°F.

El trabajo de usted y su equipo consiste en hacer una recomendación acerca del recipiente que debe adquirirse. Para ello necesitarán aplicar la ley del enfriamiento de Newton:

$$u = T + (u_0 - T)e^{kt}, \quad k < 0$$

En esta fórmula T representa la temperatura del ambiente, u_0 es la temperatura inicial del objeto calentado, t el intervalo de tiempo en minutos, k una constante negativa y u la temperatura en el instante t.

1. Utilice la ley del enfriamiento de Newton para determinar la constante k de la fórmula, para cada recipiente.
2. ¿Cuánto tiempo tarda cada recipiente en reducir la temperatura del café de 170°F a 140°F?
3. ¿Cuánto tiempo permanecerá la temperatura del café entre 120°F y 140°F?
4. Con base en esta información, ¿cuál compañía debe ganar el contrato con McNewton? ¿Cuáles son sus razones?
5. ¿Qué son el "costo de capital" y el "costo de operación"? ¿Cómo podrían afectar su elección?

4.4

Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

Ecuaciones logarítmicas

Las ecuaciones que contienen términos de la forma $\log_a x$, donde a es un número real positivo distinto de 1, son **ecuaciones logarítmicas.**

Ahora veremos cómo utilizar las propiedades de los logaritmos para resolver ecuaciones logarítmicas.

EJEMPLO 1

Resolver: $\log_3(4x - 7) = 2$

Solución

Pasamos la expresión a su forma exponencial para resolverla:

$$\begin{aligned} \log_3(4x - 7) &= 2 \\ 4x - 7 &= 3^2 \\ 4x - 7 &= 9 \\ 4x &= 16 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

EJEMPLO 2

Resolver: $2 \log_5 x = \log_5 9$

Solución

$$\begin{aligned} 2 \log_5 x &= \log_5 9 \\ \log_5 x^2 &= \log_5 9 && \text{Propiedad (6), sección 4.3.} \\ x^2 &= 9 && \text{Propiedad (8), sección 4.3.} \\ x = 3 \quad &\text{o} \quad \cancel{x = -3} \end{aligned}$$

Recuerde que los logaritmos de números negativos no están definidos, de modo que en la expresión $2 \log_5 x$, x debe ser positivo. Por lo tanto, -3 es una raíz extraña y la descartamos.

La ecuación sólo tiene una solución, 3.

Ahora resuelva el problema 1.

EJEMPLO 3

Resuelva $\log_4(x + 3) + \log_4(2 - x) = 1$

Solución

Debemos expresar el lado izquierdo como un único logaritmo. Después pasamos la expresión a su forma exponencial.

$$\begin{aligned} \log_4(x + 3) + \log_4(2 - x) &= 1 \\ \log_4[(x + 3)(2 - x)] &= 1 && \text{Propiedad (3), sección 4.3.} \\ (x + 3)(2 - x) &= 4^1 = 4 \\ -x^2 - x + 6 &= 4 \\ x^2 + x - 2 &= 0 \\ (x + 2)(x - 1) &= 0 \\ x = -2 \quad &\text{o} \quad x = 1 \end{aligned}$$

Verifique que ambas son soluciones.

Ahora resuelva el problema 11.

Hay que tener cuidado al resolver ecuaciones logarítmicas. Asegúrese de verificar cada presunta solución en la ecuación original y descartar las raíces que sean extrañas. En la expresión $\log_a M$, recuerde que a y M son positivos y $a \neq 1$.

Ecuaciones exponenciales

Las ecuaciones que contienen términos de la forma a^x, donde a es mayor que 0 y distinto de 1, se conocen como **ecuaciones exponenciales;** algunas de ellas se pueden resolver aplicando en forma adecuada las leyes de los exponentes y la ecuación (1), pág. 401, a saber,

$$\text{Si } a^u = a^v, \quad \text{entonces } u = v. \tag{1}$$

Para utilizar la ecuación (1), hay que escribir los dos lados de la igualdad en la misma base.

EJEMPLO 4

Resolver la ecuación $3^{x+1} = 81$

Solución Como $81 = 3^4$, podemos escribir la ecuación como

$$3^{x+1} = 81 = 3^4$$

Ahora tenemos la misma base (3) de cada lado, por lo que podemos aplicar (1) para obtener

$$x + 1 = 4$$
$$x = 3$$

Ahora resuelva el problema 19.

EJEMPLO 5

Resolver la ecuación $e^{-x^2} = (e^x)^2 \cdot \frac{1}{e^3}$

Solución Primero utilizamos algunas leyes de los exponentes para obtener la misma base e a cada lado:

$$e^{-x^2} = (e^x)^2 \cdot \frac{1}{e^3} = e^{2x} \cdot e^{-3} = e^{2x-3}$$

Ahora aplicamos (1) para obtener

$$-x^2 = 2x - 3$$
$$x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$(x + 3)(x - 1) = 0$$
$$x = -3 \quad \text{o} \quad x = 1$$

EJEMPLO 6

Resolver la ecuación $4^x - 2^x - 12 = 0$

Solución Observamos que $4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2$, de modo que en realidad, la ecuación tiene forma cuadrática y podemos reescribirla como

$$(2^x)^2 - 2^x - 12 = 0$$

Podemos factorizar de la manera usual:

$$(2^x - 4)(2^x + 3) = 0$$
$$2^x - 4 = 0 \quad \text{o} \quad 2^x + 3 = 0$$
$$2^x = 4 \qquad\qquad 2^x = -3$$

La ecuación de la izquierda tiene la solución $x = 2$, ya que $2^x = 4 = 2^2$; la ecuación de la derecha no tiene solución debido a que $2^x > 0$ para toda x.

En cada uno de los tres ejemplos anteriores pudimos escribir cada expresión exponencial utilizando la misma base, obteniendo así las soluciones exactas de la ecuación. Cuando esto no es posible, a veces se pueden utilizar los logaritmos para obtener la solución.

EJEMPLO 7 Resolver para x: $2^x = 5$

Solución Escribimos la ecuación exponencial en la forma logarítmica equivalente:

$$\begin{aligned} 2^x &= 5 \\ x &= \log_2 5 = \frac{\ln 5}{\ln 2} \end{aligned}$$

Fórmula de cambio de base (10).

Otra alternativa para resolver la ecuación $2^x = 5$ es tomar el logaritmo natural (o el logaritmo común) de cada lado. Si tomamos el logaritmo natural,

$$\begin{aligned} 2^x &= 5 \\ \ln 2^x &= \ln 5 \\ x \ln 2 &= \ln 5 \\ x &= \frac{\ln 5}{\ln 2} \end{aligned}$$

Utilizamos una calculadora para obtener la solución, redondeada a tres cifras decimales:

$$x = \frac{\ln 5}{\ln 2} = 2.322$$

Ahora resuelva el problema 33.

EJEMPLO 8 Resolver para x: $8 \cdot 3^x = 5$

Solución

$$\begin{aligned} 8 \cdot 3^x &= 5 && \text{Aislamos } 3^x \text{ del lado izquierdo.} \\ 3^x &= \tfrac{5}{8} && \text{Procedemos como en el ejemplo 7.} \\ x &= \log_3\left(\tfrac{5}{8}\right) = \frac{\ln \frac{5}{8}}{\ln 3} \end{aligned}$$

Utilizamos una calculadora para obtener la solución, redondeada a tres cifras decimales:

$$x = \frac{\ln\left(\frac{5}{8}\right)}{\ln 3} = -0.428$$

EJEMPLO 9 Resolver para x: $5^{x-2} = 3^{3x+2}$

Solución Como las bases son diferentes, consideramos el logaritmo natural de cada lado y aplicamos las propiedades adecuadas de los logaritmos. El resultado es una ecuación en x que podemos resolver.

$$\begin{aligned}
5^{x-2} &= 3^{3x+2} \\
\ln 5^{x-2} &= \ln 3^{3x+2} && \text{Propiedad (7).} \\
(x-2)\ln 5 &= (3x+2)\ln 3 && \text{Propiedad (6).} \\
(\ln 5)x - 2\ln 5 &= (3\ln 3)x + 2\ln 3 \\
(\ln 5 - 3\ln 3)x &= 2\ln 3 + 2\ln 5 \\
x &= \frac{2(\ln 3 + \ln 5)}{\ln 5 - 3\ln 3} = -3.212
\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 41.

Soluciones mediante dispositivos de graficación

Las técnicas presentadas en esta sección sólo se aplican a ciertos tipos de ecuaciones logarítmicas y exponenciales. Las soluciones a otros tipos se estudian por lo general en el cálculo mediante métodos numéricos. En el siguiente ejemplo mostraremos la forma de utilizar un dispositivo de graficación para obtener soluciones.

EJEMPLO 10 *Solución de ecuaciones mediante un dispositvo de graficación*

Resolver para x: $x + e^x = 2$

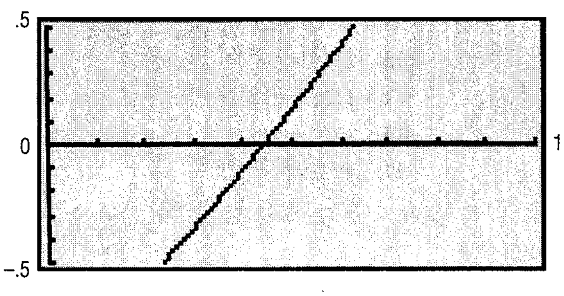
Expresar la solución (o soluciones) con dos cifras decimales.

Solución A Este tipo de ecuación exponencial no se puede resolver mediante los métodos anteriormente vistos. Sin embargo, podemos utilizar un dispositivo de graficación. Primero observamos que la ecuación por resolver es equivalente a

$$\begin{aligned}
x + e^x &= 2 \\
x + e^x - 2 &= 0
\end{aligned}$$

Las soluciones para esta ecuación son las intersecciones-x de la gráfica de la función $f(x) = x + e^x - 2$. Esta función f es creciente (¿puede advertir por qué?), de modo que, cuando mucho, tendrá una intersección-x. Como $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = 1 + e - 2 > 0$, el teorema del valor intermedio (sección 3.6, pág., 153) implica que existe una intersección-x entre 0 y 1, en consecuencia, hacemos la gráfica de la función con $0 \le x \le 1$. *Véase* la figura 15.

FIGURA 15



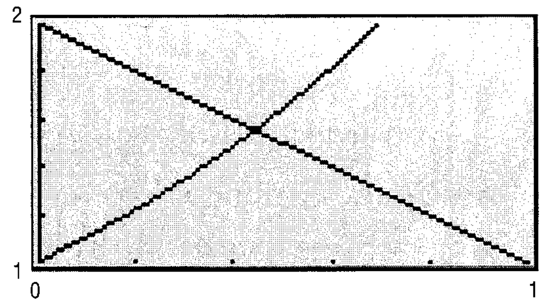
Utilizamos TRACE, ZOOM-IN y/o BOX para obtener la solución $x = 0.44$, con dos cifras decimales.

Solución B La ecuación por resolver es equivalente a

$$x + e^x = 2$$
$$e^x = 2 - x$$

Hacemos la gráfica de las dos ecuaciones $y = e^x$ y $y = 2 - x$. *Véase* la figura 16. La ordenada de su punto de intersección es la solución buscada. Utilizamos TRACE, ZOOM-IN y/o BOX para obtener la solución $x = 0.44$, con dos cifras decimales.

FIGURA 16



Ejercicio 4.4

En los problemas del 1 al 58 resuelva cada ecuación.

1. $\log_2(2x + 1) = 3$
2. $\log_3(3x - 2) = 2$
3. $\log_3(x^2 + 1) = 2$
4. $\log_5(x^2 + x + 4) = 2$
5. $\frac{1}{2} \log_3 x = 2 \log_3 2$
6. $-2 \log_4 x = \log_4 9$
7. $2 \log_5 x = 3 \log_5 4$
8. $3 \log_2 x = -\log_2 27$
9. $3 \log_2(x - 1) + \log_2 4 = 5$
10. $2 \log_3(x + 4) - \log_3 9 = 2$
11. $\log_{10} x + \log_{10}(x + 15) = 2$
12. $\log_4 x + \log_4(x - 3) = 1$
13. $\log_x 4 = 2$
14. $\log_x\left(\frac{1}{8}\right) = 3$
15. $\log_3(x - 1)^2 = 2$
16. $\log_2(x + 4)^3 = 6$
17. $\log_{1/2}(3x + 1)^{1/3} = -2$
18. $\log_{1/3}(1 - 2x)^{1/2} = -1$
19. $2^{2x+1} = 4$
20. $5^{1-2x} = \frac{1}{5}$
21. $3^{x^3} = 9^x$
22. $4^{x^2} = 2^x$
23. $8^{x^2-2x} = \frac{1}{2}$
24. $9^{-x} = \frac{1}{3}$
25. $2^x \cdot 8^{-x} = 4^x$
26. $\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} = 4$
27. $2^{2x} - 2^x - 12 = 0$
28. $3^{2x} + 3^x - 2 = 0$
29. $3^{2x} + 3^{x+1} - 4 = 0$
30. $4^x - 2^x = 0$
31. $4^x = 8$
32. $9^{2x} = 27$
33. $2^x = 10$
34. $3^x = 14$
35. $8^{-x} = 1.2$
36. $2^{-x} = 1.5$
37. $3^{1-2x} = 4^x$
38. $2^{x+1} = 5^{1-2x}$
39. $\left(\frac{3}{5}\right)^x = 7^{1-x}$
40. $\left(\frac{4}{3}\right)^{1-x} = 5^x$
41. $1.2^x = (0.5)^{-x}$
42. $(0.3)^{1+x} = 1.7^{2x-1}$
43. $\pi^{1-x} = e^x$
44. $e^{x+3} = \pi^x$
45. $5(2^{3x}) = 8$
46. $0.3(4^{0.2x}) = 0.2$
47. $400e^{0.2x} = 600$
48. $500e^{0.3x} = 600$
49. $\log_a(x - 1) - \log_a(x + 6) = \log_a(x - 2) - \log_a(x + 3)$
50. $\log_a x + \log_a(x - 2) = \log_a(x + 4)$
51. $\log_{1/3}(x^2 + x) - \log_{1/3}(x^2 - x) = -1$
52. $\log_4(x^2 - 9) - \log_4(x + 3) = 3$
53. $\log_2 8^x = -3$
54. $\log_3 3^x = -1$
55. $\log_2(x^2 + 1) - \log_4 x^2 = 1$
[*Sugerencia*: cambie $\log_4 x^2$ a base 2.]
56. $\log_2(3x + 2) - \log_4 x = 3$
57. $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$
58. $\log_9 x + 3 \log_3 x = 14$

En los problemas del 59 al 70 utilice un dispositivo de graficación para resolver cada ecuación. Exprese su respuesta con dos cifras decimales.

59. $e^x = -x$	60. $e^{2x} = x + 2$	61. $e^x = x^2$	62. $e^x = x^3$
63. $\ln x = -x$	64. $\ln 2x = -x + 2$	65. $\ln x = x^3 - 1$	66. $\ln x = -x^2$
67. $e^x + \ln x = 4$	68. $e^x - \ln x = 4$	69. $e^{-x} = \ln x$	70. $e^{-x} = -\ln x$

4.5 Interés compuesto

El interés es dinero pagado por el uso de dinero. La cantidad total prestada (ya sea por un banco a una persona, bajo la forma de un préstamo, o por una persona a un banco bajo la forma de una cuenta de ahorros) es el **capital.** La **tasa de interés,** expresada como un porcentaje, es la cantidad cobrada por el uso del capital durante cierto periodo, que por lo general se expresa sobre una base anual.

Si se presta un capital de P dólares durante un periodo de t años con una tasa de interés anual r, expresada como un decimal, el interés I cobrado será

Fórmula de interés simple

$$I = Prt \qquad (1)$$

El interés cobrado según la fórmula (1) es llamado **interés simple.**

Al trabajar con problemas de interés utilizamos el **periodo de pago** como sigue:

Anual	Una vez por año
Semestral	Dos veces al año
Trimestral	Cuatro veces al año
Mensual	12 veces al año
Diario	365 veces al año*

Cuando el interés generado al final de un periodo de pago se agrega al capital, de modo que el interés calculado al final del siguiente periodo de pago se base en la nueva cantidad de capital (capital anterior + interés), decimos que el interés es **compuesto.** Así, el **interés compuesto** es interés pagado sobre un interés anterior.

EJEMPLO 1 *Cálculo de interés compuesto*

Una asociación de crédito paga un interés del 8% anual, compuesto en forma trimestral, en cierto plan de ahorro. Si se depositan \$1000.00 bajo ese plan y el interés se deja acumular, ¿qué cantidad habrá en la cuenta después de 1 año?

Solución Utilizamos la fórmula del interés simple, $I = Prt$. El capital P es \$1000.00 y la tasa de interés $8\% = 0.08$. Después del primer trimestre del año, el tiempo es $t = \frac{1}{4}$ año, el interés ganado es

$$I = Prt = (\$1000)(0.08)\left(\tfrac{1}{4}\right) = \$20$$

El nuevo capital será $P + I = \$1000 + \$20 = \$1020$. Al final del segundo trimestre, el interés sobre este capital es

$$I = (\$1020)(0.08)\left(\tfrac{1}{4}\right) = \$20.40$$

*Algunos bancos utilizan un "año" de 360 días.

Al final del tercer trimestre, el interés sobre el nuevo capital de \$1020 + \$20.40 = \$1040.40 es

$$I = (\$1040.40)(0.08)\left(\tfrac{1}{4}\right) = \$20.81$$

Por último, después del cuarto trimestre, el interés es

$$I = (\$1061.21)(0.08)\left(\tfrac{1}{4}\right) = \$21.22$$

Así, después de 1 año, la cuenta tendrá \$1082.43.

El patrón de los cálculos realizados en el ejemplo 1 conduce a una fórmula general para el interés compuesto. Establezcamos el concepto: sea P el capital por invertir con una tasa de interés anual r, compuesta n veces al año. (Para fines de cálculo, r se expresa como un decimal.) El interés obtenido después de cada periodo es el capital por r/n. Así, la cantidad A después de un periodo es

$$A = P + P\left(\frac{r}{n}\right) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)$$

Después de dos periodos, la cantidad A, basada en el nuevo capital $P(1 + r/n)$, es

$$A = \underbrace{P\left(1 + \frac{r}{n}\right)}_{\text{Nuevo capital}} + \underbrace{P\left(1 + \frac{r}{n}\right)\left(\frac{r}{n}\right)}_{\text{Interés sobre nuevo capital}} = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)\left(1 + \frac{r}{n}\right) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^2$$

Después de tres periodos,

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^2 + P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^2\left(\frac{r}{n}\right) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^2\left(1 + \frac{r}{n}\right) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^3$$

Continuamos de esta forma y luego de n periodos (1 año),

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

Como t años tienen $n \cdot t$ periodos, después de t años tenemos

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Teorema La cantidad A generada después de t años por un capital P invertido a una tasa de interés anual r compuesta n veces por año es

Fórmula del interés compuesto

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \qquad (2)$$

EJEMPLO 2 *Comparación de inversiones con distintos periodos de composición*

La inversión de \$1000.00 a una tasa anual del 10% compuesto en forma anual, trimestral, mensual y diaria proporciona las siguientes cantidades después de 1 año:

Composición anual: $A = P(1 + r)$

$= (\$1000)(1 + 0.10) = \$1100.00$

$$\text{Composición trimestral:}\quad A = P\left(1 + \frac{r}{4}\right)^4$$
$$= (\$1000)(1 + 0.025)^4 = \$1103.81$$
$$\text{Composición mensual:}\quad A = P\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12}$$
$$= (\$1000)(1 + 0.00833)^{12} = \$1104.71$$
$$\text{Composición diaria:}\quad A = P\left(1 + \frac{r}{365}\right)^{365}$$
$$= (\$1000)(1 + 0.000274)^{365} = \$1105.16$$

Ahora resuelva el problema 1.

El ejemplo 2 permite ver que el efecto de una composición más frecuente es que la cantidad en la cuenta después de 1 año es mayor: \$1000.00 compuestos 4 veces al año al 10% producen \$1103.81; compuestos 12 veces al año al 10% producen \$1104.71; compuestos 365 veces al año al 10% producen \$1105.16. Esto hace surgir la siguiente pregunta: ¿qué ocurrirá con la cantidad inicial después de 1 año si el número de veces que el interés se compone crece sin límite?

Determinemos la respuesta. Si P es el capital, r la tasa de interés anual y n el número de veces que el interés se compone por año, la cantidad después de 1 año será

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

Ahora, supongamos que el número n de veces que el interés se compone por año es cada vez mayor; es decir, que $n \to \infty$. Entonces,

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = P\left[1 + \frac{1}{n/r}\right]^n = P\left(\left[1 + \frac{1}{n/r}\right]^{n/r}\right)^r \underset{h = \frac{n}{r}}{\uparrow}{=} P\left[\left(1 + \frac{1}{h}\right)^h\right]^r \quad (3)$$

Así, en (3), cuando $n \to \infty$, $h = n/r \to \infty$, y la expresión entre corchetes tiende a e [consulte (2) en la pág., 267], entonces $A \to Pe^r$. La tabla 6 compara $(1 + r/n)^n$, con e^r para valores grandes de n y $r = 0.05$, $r = 0.10$, $r = 0.15$, y $r = 1$. Cuando n aumenta $(1 + r/n)^n$ se acerca más a e^r. De manera que no importa la frecuencia de la composición pues la cantidad después de 1 año tiene como límite superior Pe^r.

TABLA 6

	$\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$			
	$n = 100$	$n = 1000$	$n = 10{,}000$	e^r
$r = 0.05$	1.0512579	1.05127	1.051271	1.0512711
$r = 0.10$	1.1051157	1.1051654	1.1051703	1.1051709
$r = 0.15$	1.1617037	1.1618212	1.1618329	1.1618342
$r = 1$	2.7048138	2.7169239	2.7181459	2.7182818

Cuando el interés se compone de modo que la cantidad al final de 1 año sea Pe^r, se dice que está **compuesto de manera continua.**

La cantidad A después de t años obtenida mediante un capital P invertido a una tasa de interés anual r compuesto de manera continua es

Composición continua

$$A = Pe^{rt} \tag{4}$$

EJEMPLO 3

La cantidad A que resulta de invertir un capital P de \$1000.00 a una tasa anual r del 10% compuesto de manera continua durante un tiempo t de 1 año es

$$A = \$1000e^{0.10} = (\$1000)(1.10517) = \$1105.17$$

Ahora resuelva el problema 9.

La **tasa efectiva de interés** es la tasa de interés anual simple equivalente que produciría la misma cantidad obtenida mediante una composición continua en 1 año. Así, en el ejemplo 3 un capital de \$1000.00 produce \$1105.17 a una tasa del 10% compuesto de manera continua. Para obtener la misma cantidad mediante una tasa de interés simple habría que invertir con un interés que produzca 1105.17 − \$1000.00 = \$105.17 sobre el capital. Como \$105.17 es el 10.517% de \$1000, se necesitaría una tasa de interés simple del 10.517% para igualar la del 10% compuesto de manera continua. En consecuencia, la tasa efectiva de interés compuesto de manera continua es del 10.517 por ciento.

Con base en los resultados de los ejemplos 2 y 3, tenemos las siguientes comparaciones:

	TASA ANUAL	**TASA EFECTIVA**
Compuesto en forma anual	10%	10%
Compuesto en forma trimestral	10%	10.381%
Compuesto en forma mensual	10%	10.471%
Compuesto en forma diaria	10%	10.516%
Compuesto en forma continua	10%	10.517%

Ahora resuelva el problema 21.

EJEMPLO 4 *Cálculo del valor de una cuenta de retiro*

El 2 de enero de 1996 se colocaron \$2000.00 en una cuenta de retiro que pagará un interés del 10% anual compuesto de manera continua. ¿A cuánto ascenderá la cuenta el primero de enero del año 2016?

Solución La cantidad A después de 20 años es

$$A = Pe^{rt} = \$2000e^{(0.10)(20)} = \$14{,}778.11$$

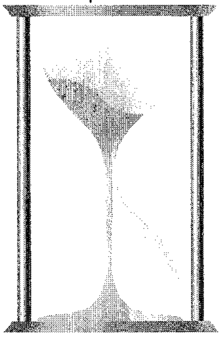
Verificación: haga la gráfica de $y = 2000e^{0.1x}$ y utilice TRACE para verificar que si $x = 20$ entonces $y = \$14{,}778.11$.

Investigación: ¿cuánto tiempo transcurrirá hasta que y sea igual a \$40,000.00?

Cuando las personas involucradas en las finanzas hablan del "valor del dinero en el tiempo", por lo general se refieren al **valor presente** del dinero. El valor presente de A dólares a recibir en una fecha próxima es el capital que usted debe in-

FIGURA 17

El tiempo es dinero



vertir ahora para que éste llegue a A dólares en el periodo establecido. Así, el valor presente del dinero a ser recibido en una fecha próxima siempre es menor que la cantidad a recibir, pues la cantidad a recibir es igual al valor presente (el dinero invertido en este momento) *más* el interés acumulado en el periodo contratado.

Utilizamos la fórmula del interés compuesto (2) para obtener una fórmula para el valor presente. Si P es el valor presente de A dólares a ser recibidos después de t años a una tasa de interés anual r compuesta n veces por año, entonces, por la fórmula (2),

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Para despejar P, dividimos ambos lados entre $(1 + r/n)^{nt}$, y el resultado es

$$\frac{A}{(1 + r/n)^{nt}} = P \quad \text{o} \quad P = A\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{-nt}$$

El valor presente P de A dólares a ser recibidos después de t años, con una tasa de interés anual r compuesta n veces por año, es

Fórmulas para el valor presente

$$P = A\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{-nt} \tag{5}$$

Si el interés es compuesto de manera continua, entonces

$$P = Ae^{-rt} \tag{6}$$

Para demostrar (6), despeje P en la fórmula (4).

Un bono "cupón cero" (sin intereses) puede ser amortizado en 10 años por \$1000.00. ¿Cuánto dinero estaría dispuesto a pagar por él ahora si quiere obtener un rendimiento de

(a) ¿8% compuesto en forma mensual?

(b) ¿7% compuesto en forma continua?

(a) Estamos buscando el valor presente de \$1000.00. Así, utilizamos la fórmula (5) con $A = \$1000$, $n = 12$, $r = 0.08$, y $t = 10$:

$$\begin{aligned} P &= A\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{-nt} \\ &= \$1000\left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^{-12(10)} \\ &\doteq \$450.52 \end{aligned}$$

Para una tasa del 8% compuesto mensualmente, se debe pagar \$450.52 por el bono.

(b) En este caso, utilizamos la fórmula (6) con $A = \$1000$, $r = 0.07$, y $t = 10$:

$$\begin{aligned} P &= Ae^{-rt} \\ &= \$1000e^{-(0.07)(10)} \\ &= \$496.59 \end{aligned}$$

Para una tasa del 7% compuesto en forma continua, se debe pagar \$496.59 por el bono.

Ahora resuelva el problema 11.

EJEMPLO 6 *Tasa de interés necesaria para duplicar una inversión*

¿Cuál es la tasa de interés anual, compuesta en forma anual, necesaria para duplicar una inversión en 5 años?

Solución Si P es el capital y queremos duplicarlo, la cantidad A será $2P$. Utilizamos la fórmula del interés compuesto, con $n = 1$ y $t = 5$ para determinar r:

$$\begin{aligned} 2P &= P(1 + r)^5 \\ 2 &= (1 + r)^5 \\ 1 + r &= \sqrt[5]{2} \\ r &= \sqrt[5]{2} - 1 = 1.148698 - 1 = 0.148698 \end{aligned}$$

La tasa de interés anual necesaria para duplicar el capital en 5 años es 14.87%.

Ahora resuelva el problema 23.

EJEMPLO 7 *Tiempo necesario para duplicar y triplicar una inversión*

(a) ¿Cuánto tiempo tarda una inversión en duplicar su valor si gana el 5% de interés compuesto en forma continua?

(b) ¿Cuánto tiempo tarda en triplicarse con esa tasa?

Solución (a) Si P es la inversión inicial y queremos que se duplique, la cantidad A será $2P$. Utilizamos la fórmula (4) para calcular el interés compuesto en forma continua, con $r = 0.05$. Entonces

$$\begin{aligned} A &= Pe^{rt} \\ 2P &= Pe^{0.05t} \\ 2 &= e^{0.05t} \\ 0.05t &= \ln 2 \\ t &= \frac{\ln 2}{0.05} = 13.86 \end{aligned}$$

Se necesitan 14 años para duplicar la inversión.

(b) Para triplicar la inversión, hacemos $A = 3P$ en la fórmula (4).

$$\begin{aligned} A &= Pe^{rt} \\ 3P &= Pe^{0.05t} \\ 3 &= e^{0.05t} \\ 0.05t &= \ln 3 \\ t &= \frac{\ln 3}{0.05} = 21.97 \end{aligned}$$

Se necesitan 22 años para triplicar la inversión.

Ahora resuelva el problema 29.

Ejercicio 4.5

En los problemas del 1 al 10, determine la cantidad que resulta de cada inversión.

1. \$100.00 al 4% compuesto en forma trimestral, después de 2 años.
2. \$50.00 al 6% compuesto mensualmente, después de 3 años.
3. \$500.00 al 8% compuesto en forma trimestral, después de $2\frac{1}{2}$ años.
4. \$300.00 al 12% compuesto mensualmente, después de $1\frac{1}{2}$ años.
5. \$600.00 al 5% compuesto diariamente, después de 3 años.
6. \$700.00 al 6% compuesto diariamente, después de 2 años.
7. \$10.00 al 11% compuesto en forma continua, después de 2 años.
8. \$40.00 al 7% compuesto en forma continua, después de 3 años.
9. \$100.00 al 10% compuesto en forma continua, después de $2\frac{1}{4}$ años.
10. \$100.00 al 12% compuesto en forma continua, después de $3\frac{3}{4}$ años.

En los problemas del 11 al 20, determine el capital necesario para obtener cada cantidad; es decir, calcule el valor presente.

11. Para \$100.00 después de 2 años al 6% compuesto mensualmente.
12. Para \$75.00 después de 3 años al 8% compuesto trimestralmente.
13. Para \$1000.00 después de 2 años y medio al 6% compuesto diariamente.
14. Para \$800.00 después de 3 años y medio al 7% compuesto mensualmente.
15. Para \$600.00 después de 2 años al 4% compuesto en forma trimestral.
16. Para \$300.00 después de 4 años al 3% compuesto en forma diaria.
17. Para \$80.00 después de 3 años y $\frac{1}{4}$ al 9% compuesto en forma continua.
18. Para \$800.00 después de 2 años y medio al 8% compuesto en forma continua.
19. Para \$400.00 después de 1 año al 10% compuesto en forma continua.
20. Para \$1000.00 después de 1 año al 12% compuesto en forma continua.
21. Determine la tasa efectiva de interés para $5\frac{1}{4}$% compuesto en forma trimestral.
22. ¿Cuál tasa de interés compuesta en forma trimestral dará una tasa efectiva del 7%?
23. ¿Cuál es la tasa de interés necesaria para duplicar una inversión en 3 años?
24. ¿Cuál es la tasa de interés necesaria para duplicar una inversión en 10 años?

En los problemas del 25 al 28, ¿cuál de las dos tasas produce la mayor cantidad en 1 año? [Sugerencia: Inicie con un capital de $10,000.00 en cada caso.]

25. 6% compuesto en forma trimestral o $6\frac{1}{4}$% compuesto anualmente.

26. 9% compuesto en forma trimestral o $9\frac{1}{4}$% compuesto anualmente.

27. 9% compuesto mensualmente o 8.8% compuesto diariamente.

28. 8% compuesto en forma semestral o 7.9% compuesto diariamente.

29. ¿Cuánto tiempo tardará una inversión en duplicar su valor si se ha contratado al 8% anual compuesto mensualmente? ¿Y compuesto en forma continua?

30. ¿Cuánto tiempo tardará una inversión en duplicar su valor si se ha contratado al 10% anual compuesto mensualmente? ¿Y compuesto en forma continua?

31. Si se dispone de $100.00 para invertir al 8% anual compuesto mensualmente, ¿en cuánto tiempo llegará la cantidad a $150.00? Si la composición es continua, ¿cuánto tiempo será necesario?

32. Si se dispone de $100.00 para invertir al 10% anual compuesto mensualmente, ¿en cuánto tiempo llegará la cantidad a $175.00? Si la composición es continua, ¿cuánto tiempo será necesario?

33. ¿Cuántos años son necesarios para que una inversión inicial de $10,000.00 crezca hasta $25,000.00? Suponga una tasa de interés del 6% compuesto en forma continua.

34. ¿Cuántos años son necesarios para que una inversión inicial de $25,000.00 crezca hasta $80,000.00? Suponga una tasa de interés del 7% compuesto en forma continua.

35. ¿Cuánto costará una casa de $90,000.00 dentro de 5 años si la tasa de inflación durante el periodo promedia un 3% compuesto en forma anual?

36. Una tienda de departamentos carga el 1.25% mensual a las cuentas atrasadas de sus clientes (el interés se compone mensualmente). Un cliente tiene un adeudo de $200.00 y no paga su cuenta durante 6 meses. ¿Cuál será su saldo en ese medio año?

37. Usted quiere adquirir un auto nuevo por $15,000.00 dentro de 3 años. ¿Cuánto dinero debe pedir a sus padres ahora, de modo que si lo invierte al 5% compuesto en forma continua tenga la cantidad suficiente para comprar el auto en ese tiempo?

38. Usted necesitará $3000.00 dentro de 6 meses para pagar un préstamo que no le da beneficios aunque pague por adelantado. Si ahora dispone de $3000.00, ¿cuánto debe guardar en una cuenta que paga el 3% compuesto mensualmente de modo que en 6 meses tenga exactamente $3000.00?

39. Usted está pensando en adquirir 100 acciones en la bolsa de valores, a $15.00 cada una, sin recibir dividendos. La historia de las acciones indica que deben crecer a una tasa anual del 15% por año. ¿Cuánto valdrán esas acciones dentro de 5 años?

40. Usted está pensando en adquirir 100 acciones en la bolsa de valores, a $15.00 cada una, sin recibir dividendos. Su corredor dice que las acciones valdrán $20.00 en 2 años. ¿Cuál es la tasa anual de rendimiento de esta inversión?

41. Una empresa adquirida por $650,000.00 en 1994 se vende en 1997 por $850,000.00. ¿Cuál es la tasa anual de rendimiento de esta inversión?

42. Usted acaba de heredar un anillo de diamantes valuado en $5000.00. Si los diamantes han aumentado su valor con una tasa anual del 8%, ¿cuál era el valor del anillo hace 10 años, cuando fue adquirido?

43. Usted abre con $1000.00 una cuenta bancaria que paga el 5.6% compuesto en forma continua. Después de 1 año, ¿tendrá el dinero suficiente para comprar un sistema de cómputo que cuesta $1060.00? Si otro banco le paga un 5.9% compuesto mensualmente, ¿será mejor invertir ahí el dinero?

44. El primero de enero usted compra por $1000.00 un certificado de depósito que paga el 6.8% compuesto en forma continua, y que vence en 3 meses. Después coloca los $1000.00 y el interés devengado en una cuenta que paga un 5.25% compuesto mensualmente. ¿Cuánto dinero habrá en la cuenta el primero de mayo?

45. Usted invierte $2000.00 en un bono que paga el 9% de interés compuesto en forma semestral. Un amigo suyo invierte $2000.00 en un certificado de depósito que paga un 8.5% compuesto en forma continua. ¿Quién tendrá más dinero después de 20 años, usted o su amigo?

46. Suponga que tiene acceso a una inversión que paga el 10% de interés compuesto en forma continua. ¿Qué será mejor, recibir $1000.00 en este momento para aprovechar esta oportunidad de inversión o recibir $1325.00 dentro de 3 años?

47. Usted acaba de adquirir una casa por \$150,000.00, la cual tiene una hipoteca de \$50,000.00, y se compromete a pagarle al vendedor \$50,000.00 más el interés acumulado en 5 años a partir de ahora. El vendedor le ofrece tres opciones de interés sobre la hipoteca:

(a) Interés simple al 12% anual. (b) 11.5 % de interés compuesto mensualmente.
(c) 11.25% de interés compuesto en forma continua.

¿Cuál opción es mejor? Es decir, ¿cuál produce el menor interés sobre el préstamo?

48. Un banco anuncia que paga intereses en cuentas de ahorro a una tasa del 4.25% compuesto en forma diaria. Determine la tasa efectiva si el banco utiliza (a) 360 días o (b) 365 días para calcular la tasa diaria.

Los problemas del 49 al 52 se relacionan con bonos cupón cero. Un bono cupón cero *es el que se adquiere ahora con descuento y pagará el valor marcado en cierta fecha futura, cuando se venza; no hay pagos por interés.*

49. Un bono cupón cero se puede hacer efectivo en 20 años por \$10,000.00. ¿Cuánto dinero estaría dispuesto a pagar por él ahora si desea tener un rendimiento del:

(a) 10% compuesto mensualmente? (b) ¿10% compuesto en forma continua?

50. Los abuelos de una niña están pensando en adquirir un bono con un valor nominal de \$40,000.00 en la fecha de su nacimiento, de modo que ella tenga el dinero suficiente para su educación universitaria, 17 años después. Si la inflación anual es del 8%, ¿cuánto deben pagar por el bono?

51. ¿En cuánto dinero debe venderse ahora un bono cupón cero con un valor nominal de \$10,000.00, con vencimiento en 10 años, si su tasa de rendimiento debe ser del 8% compuesto anualmente?

52. Si usted paga \$12,485.52 por un bono cupón cero con valor nominal de \$25,000.00 y que vence en 8 años, ¿cuál es tasa anual de rendimiento?

53. Explique con sus propias palabras lo que se entiende por *interés compuesto* y *composición continua.*

54. Explique con sus propias palabras el significado del concepto de valor presente.

Escriba un programa que calcule el valor de una inversión monto después de n años cuando se invierte un capital P al r % anual, compuesto en forma trimestral, y utilícelo para verificar sus respuestas a los problemas 1 y 3.

Escriba un programa que calcule el capital necesario ahora para obtener la cantidad A después de n años al r % anual, compuesto en forma diaria, y utilícelo para verificar su respuesta al problema 13.

Escriba un programa que calcule la tasa de interés anual necesaria para duplicar una inversión en n años. Utilícelo para verificar su respuesta a los problemas 23 y 24.

Escriba un programa que calcule el número de meses necesarios para que una inversión inicial de x dólares crezca hasta y dólares al r % anual compuesto en forma continua. Utilícelo para verificar su respuesta a los problemas 33 y 34.

59. La fórmula

$$y = \frac{\ln m}{n \ln\left(1 + \frac{r}{n}\right)}$$

permite determinar el número de años y necesarios para multiplicar una inversión m veces, cuando r es la tasa de interés anual compuesta n veces al año.

(a) ¿Cuántos años se necesitan para duplicar el valor de una cuenta de retiro compuesta en forma anual con una tasa del 12%?
(b) ¿Cuántos años se necesitan para triplicar el valor de una cuenta de ahorro compuesta en forma trimestral con una tasa anual del 6%?
(c) Deduzca esta fórmula.

60. La fórmula

$$y = \frac{\ln A - \ln P}{r}$$

permite determinar el número de años y necesarios para que una inversión P crezca hasta un valor A compuesto en forma continua a una tasa anual r.

(a) ¿Cuánto tiempo tardará una inversión inicial de \$1000.00 en crecer hasta \$8000.00 a una tasa anual del 10%?
(b) ¿Cuál es la tasa anual necesaria para incrementar el valor de una cuenta de retiro de \$2000.00 hasta \$30,000.00 en 35 años?
(c) Deduzca esta fórmula.

61. *Pensamiento crítico.* Usted acaba de firmar un contrato para adquirir una casa y busca financiamiento por la cantidad de $100,000.00, para lo cual acude a varios bancos. El banco 1 le presta $100,000.00 a una tasa del 8.75% amortizado en 30 años con una cuota inicial sobre el préstamo del 1.75%. El banco 2 le presta $100,000.00 a una tasa del 8.375% amortizado en 15 años con una cuota inicial sobre el préstamo del 1.5%. El banco 3 le presta $100,000.00 a una tasa del 9.125% amortizado en 30 años sin cuota inicial sobre el préstamo. El banco 4 le presta $100,000.00 a una tasa del 8.625% amortizado en 15 años, también sin cuota inicial. ¿Cuál es el préstamo que contratará? ¿Por qué? Asegúrese de tener buenas razones para hacer su elección. Si el monto del pago mensual no le preocupa, ¿cuál préstamo elegirá? De nuevo, hágase de buenas razones para su elección. Utilice la información de la tabla siguiente como ayuda. Compare su decisión final con las decisiones de sus condiscípulos; analice algunas y escriba sus impresiones.

	PAGO MENSUAL	CUOTA INICIAL DEL PRÉSTAMO
Banco 1	$786.70	$1750.00
Banco 2	$977.42	$1500.00
Banco 3	$813.63	$0.00
Banco 4	$990.68	$0.00

Crecimiento y decaimiento

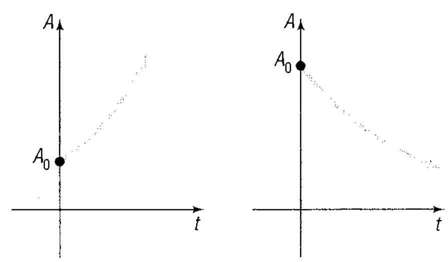
Muchos fenómenos naturales siguen la ley de que una cantidad A varía con el tiempo t según la fórmula

$$A = A_0 e^{kt} \qquad (1)$$

donde A_0 es la cantidad original ($t = 0$) y $k \neq 0$ es una constante.

Si $k > 0$, entonces la ecuación (1) establece que la cantidad A aumenta con el tiempo; si $k < 0$, la cantidad A disminuye con el tiempo. En ambos casos, cuando una cantidad A varía con el tiempo de acuerdo con la ecuación (1), obedece la **ley exponencial** o **ley del crecimiento** ($k > 0$) **o decaimiento** ($k < 0$) **no inhibido.** *Véase* la figura 18.

FIGURA 18



(a) $A = A_0e^{kt}$, $k > 0$ (b) $A = A_0e^{kt}$, $k < 0$

Por ejemplo, en la sección 4.5 vimos que el interés compuesto en forma continua sigue la ley del crecimiento no inhibido. En esta sección veremos otros tres fenómenos que obedecen a esta ley exponencial.

Biología

La **mitosis,** o división celular, es un proceso universal indispensable en el crecimiento de los organismos vivos como las amibas, plantas, células humanas y muchas otras. Con base en una situación ideal donde no mueren células ni hay efectos colaterales, el número de células presentes en un instante dado obedece la ley del crecimiento no inhibido. Sin embargo, en la realidad, después de cierto tiempo el crecimiento en forma exponencial cesa debido a la influencia de factores como la carencia de espacio, la disminución de la fuente alimenticia, etc. La ley del crecimiento no inhibido sólo refleja de manera exacta las primeras etapas del proceso de mitosis.

El proceso de mitosis comienza con un cultivo de N_0 células donde cada célula crece durante cierto periodo y después se divide en dos células idénticas. Suponemos que el tiempo necesario para que cada célula se divida en dos es constante y que no cambia al aumentar el número de células. Después, estas células crecen y se dividen en dos, y así sucesivamente.

Una fórmula que proporciona el número N de células en el cultivo después de transcurrir un tiempo t (en las primeras etapas de crecimiento) es

Crecimiento no inhibido de células

$$N(t) = N_0 e^{kt} \qquad k > 0 \tag{2}$$

donde k es una constante positiva.

Al modelar el crecimiento de las células mediante la ecuación (2) utilizamos una función que proporciona números reales positivos, aunque estemos contando el número de células el cual debe ser un entero. Esta es una práctica común en muchas aplicaciones.

EJEMPLO 1 *Crecimiento exponencial*

Una colonia de bacterias crece de acuerdo con la ley del crecimiento no inhibido. Si la cantidad de bacterias se duplica en 3 horas, ¿cuánto tiempo tardará la colonia en triplicar su número?

Solución Utilizamos la fórmula (2); el número N de células en un instante t es

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

donde N_0 es la cantidad inicial de bacterias presentes y k un número positivo. Primero determinaremos el número k. La cantidad de células se duplica en 3 horas; así, tenemos

$$N(3) = 2N_0$$

Pero $N(3) = N_0 e^{k(3)}$, de modo que

$$\begin{aligned} N_0 e^{k(3)} &= 2N_0 \\ e^{3k} &= 2 \\ 3k &= \ln 2 \quad \text{Escribimos la ecuación exponencial como un logaritmo.} \\ k &= \tfrac{1}{3}\ln 2 \approx \tfrac{1}{3}(0.6931) = 0.2310 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la fórmula (2) para este proceso de crecimiento es

$$N(t) = N_0 e^{0.2310t}$$

El tiempo t necesario para que el tamaño de la colonia se triplique requiere que $N = 3N_0$. Así, sustituimos $3N_0$ en vez de N para obtener

$$\begin{aligned} 3N_0 &= N_0 e^{0.2310t} \\ 3 &= e^{0.2310t} \\ 0.2310t &= \ln 3 \\ t &= \frac{1}{0.2310}\ln 3 \approx \frac{1.0986}{0.2310} = 4.756 \text{ horas} \end{aligned}$$

Se necesitan cerca de 4.756 horas para que el tamaño de la colonia se triplique.

Ahora resuelva el problema 1.

Decaimiento radiactivo

Los materiales radiactivos obedecen la ley del decaimiento no inhibido. Así, la cantidad A de un material radiactivo presente en el instante t está dada por la fórmula

Decaimiento radiactivo no inhibido

$$A = A_0 e^{kt} \qquad k < 0 \tag{3}$$

donde A_0 es la cantidad original de material radiactivo y k un número negativo.

Todas las sustancias radiactivas tienen una **vida media** específica, la cual es el tiempo necesario para que la mitad de la sustancia radiactiva desaparezca (decaiga). En el **fechado por carbono** se utiliza el hecho de que todos los organismos vivientes tienen dos tipos de carbono, el carbono–12 (un elemento estable) y el carbono 14 (un elemento radiactivo con vida media de 5600 años). Cuando un organismo está vivo la proporción entre el carbono–12 y el 14 es constante; pero al morir, la cantidad total de carbono–12 presente permanece sin alteración, mientras que la cantidad de carbono–14 comienza a disminuir. Esta variación permite calcular la edad de los restos de organismos vivientes.

Restos de madera quemada, hallados junto con antiguas herramientas de piedra en un sitio arqueológico en Chile, contienen 1.67% de la cantidad original de carbono–14. Si la vida media del carbono–14 es de 5600 años, ¿aproximadamente cuándo se cortó y quemó el árbol?

Utilizamos la ecuación (3); la cantidad A de carbono–14 presente en el instante t es

$$A = A_0 e^{kt}$$

donde A_0 es la cantidad original de carbono–14 presente y k un número negativo. Primero determinaremos el número k. Para ello utilizamos el hecho de que después de 5600 años, se conserva la mitad de la cantidad original del carbono–14. Así,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}A_0 &= A_0 e^{k(5600)} \\
\frac{1}{2} &= e^{5600k} \\
5600k &= \ln \frac{1}{2} \\
k &= \frac{1}{5600} \ln \frac{1}{2} \approx -0.000124
\end{aligned}$$

Entonces, la fórmula (3) queda como

$$A = A_0 e^{-0.000124t}$$

Si la cantidad A de carbono–14 presente en la actualidad es 1.67% de la cantidad original, entonces

$$\begin{aligned}
0.0167A_0 &= A_0 e^{-0.000124t} \\
0.0167 &= e^{-0.000124t} \\
-0.000124t &= \ln 0.0167 \\
t &= \frac{1}{-0.000124} \ln 0.0167 \approx 33{,}000 \text{ años}
\end{aligned}$$

El árbol fue cortado y quemado hace 33,000 años aproximadamente. Algunos arqueólogos utilizan esta conclusión para afirmar que un grupo humano vivió en América hace 33,000 años, mucho antes de lo generalmente aceptado.

Ahora resuelva el problema 3.

Ley del enfriamiento de Newton

La **ley del enfriamiento de Newton*** establece que la temperatura de un objeto caliente disminuye en forma exponencial con el tiempo hacia la temperatura del ambiente. Es decir, la temperatura u de un objeto caliente en un instante t satisface la ecuación

Ley del enfriamiento de Newton

$$u = T + (u_0 - T)e^{kt} \qquad k < 0 \tag{4}$$

donde T es la temperatura constante del ambiente, u_0 la temperatura inicial del objeto caliente y k un número negativo.

Un objeto se calienta a 100°C y después se deja enfriar en un cuarto cuya temperatura del aire es de 30°C. Si la temperatura del objeto es de 80°C después de 5 minutos, ¿en qué momento llegará a 50°C?

Utilizamos la ecuación (4) con $T = 30$ y $u_0 = 100$, la temperatura (en grados Celsius) del objeto en el instante t (en minutos) es

$$u = 30 + (100 - 30)e^{kt} = 30 + 70e^{kt} \tag{5}$$

donde k es un número negativo. Para determinar k utilizamos el hecho de que $u = 80$ cuando $t = 5$. Entonces

$$\begin{aligned} 80 &= 30 + 70e^{k(5)} \\ 50 &= 70e^{5k} \\ e^{5k} &= \frac{50}{70} \\ 5k &= \ln \frac{5}{7} \\ k &= \frac{1}{5} \ln \frac{5}{7} \approx -0.0673 \end{aligned}$$

Así, la fórmula (5) se escribe

$$u = 30 + 70e^{-0.0673t}$$

*Recibe el nombre de Isaac Newton (1642–1727), uno de los cofundadores del cálculo.

Ahora determinemos t cuando $u = 50°C$, de modo que

$$50 = 30 + 70e^{-0.0673t}$$
$$20 = 70e^{-0.0673t}$$
$$e^{-0.0673t} = \frac{20}{70}$$
$$-0.0673t = \ln \frac{2}{7}$$
$$t = \frac{1}{-0.0673} \ln \frac{2}{7} \approx 18.6 \text{ minutos}$$

Así, la temperatura del objeto será de 50°C a los 18.6 minutos, aproximadamente.

Verificación: haga la gráfica de $y = 30 + 70e^{-0.0673x}$ y utilice TRACE para verificar que $x = 18.6$ cuando $y = 50$.

Investigación: ¿cuánto vale y cuando $x = 30$ minutos? ¿Cuándo ocurre que $y = 35°C$? ¿Cuándo ocurre que $y = 30°C$?

Ejercicio 4.6

1. *Crecimiento de una población de insectos.* El tamaño P de cierta población de insectos en el instante t (en días) obedece la ecuación $P = 500e^{0.02t}$. ¿Después de cuántos días llegará la población a 1000? ¿Y a 2000?

2. *Crecimiento de bacterias.* El número N de bacterias presentes en un cultivo en el instante t (en horas) obedece la ecuación $N = 1000e^{0.01t}$. ¿Después de cuántas horas llegará ese número a 1500? ¿Y a 2000?

3. *Decrecimiento radiactivo.* El estroncio–90 es un material radiactivo que disminuye de acuerdo con la ley $A = A_0e^{-0.0244t}$, donde A_0 es la cantidad inicial y A la cantidad presente en el instante t (en años). ¿Cuál es la vida media del estroncio–90?

4. *Decaimiento radiactivo.* El iodo–131 es un material radiactivo que disminuye de acuerdo con la ley $A = A_0e^{-0.087t}$, donde A_0 es la cantidad inicial y A la cantidad presente en el instante t (en días). ¿Cual es la vida media del iodo–131?

5. Utilice la información del problema 3 para determinar el tiempo que tardan 100 gramos de estroncio–90 en disminuir hasta 10 gramos.

6. Utilice la información del problema 4 para determinar el tiempo que tardan 100 gramos de iodo–131 en disminuir hasta 10 gramos.

7. *Crecimiento de una colonia de mosquitos.* La población de una colonia de mosquitos obedece la ley del crecimiento no inhibido. Si en un principio existen 1000 mosquitos y despues de 1 día hay 1800, ¿cuál será el tamaño de la colonia después de 3 días? ¿Cuánto tiempo pasará hasta que haya 10,000 mosquitos?

8. *Crecimiento bacterial.* Un cultivo de bacterias obedece la ley del crecimiento no inhibido. Si en un principio existen 500 bacterias y después de 1 hora hay 800, ¿cuántas bacterias habrá después de 5 horas? ¿Cuánto tiempo pasará hasta que haya 20,000 bacterias?

9. *Crecimiento poblacional.* La población de una ciudad obedece la ley exponencial. Si la población duplica su tamaño en un periodo de 18 meses y actualmente hay 10,000 habitantes, ¿cuánta será dentro de 2 años?

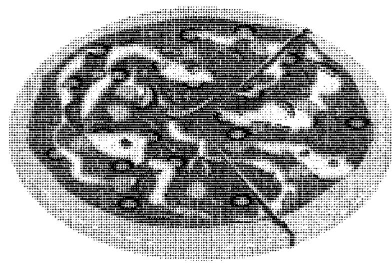
10. *Crecimiento poblacional.* La población de una ciudad obedece la ley exponencial. Si disminuye de 900,000 a 800,000 entre 1993 y 1995, ¿cuánta será la población en 1997?

11. *Decaimiento radiactivo.* La vida media del radio es de 1690 años. Si actualmente existen 10 gramos, ¿qué cantidad habrá dentro de 50 años?

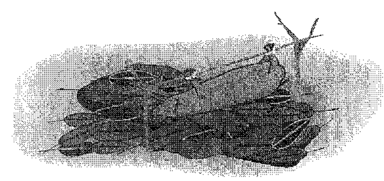
12. *Decaimiento radiactivo.* La vida media del potasio radiactivo es de 1.3 miles de millones de años. Si actualmente existen 10 gramos, ¿qué cantidad habrá dentro de 100 años? ¿Y en 1000 años?

13. *Estimación de la edad de un árbol.* Se determina que un pedazo de carbón tiene el 30% del carbono–14 que tenía originalmente. ¿Cuándo murió el árbol de dónde provino ese carbón? Utilice 5600 años como la vida media del carbono–14.

14. *Estimación de la edad de un fósil.* Una hoja fosilizada contiene el 70% de la cantidad normal de carbono–14. ¿Qué antigüedad tiene este fósil?



15. *Tiempo de enfriamiento de una pizza.* Una pizza horneada a 450°F se retira del horno a las 5:00 p.m. en un cuarto que tiene una temperatura constante de 70°F. Después de 5 minutos la pizza está a 300°F. ¿En qué momento podrá comenzar a comer la pizza si desea que esté a 135°F?
16. Un termómetro con una lectura de 72°F se introduce en un refrigerador que tiene una temperatura constante de 38°F. Si el termómetro marca 60°F después de 2 minutos, ¿cuál será su lectura después de 7 minutos? ¿Cuánto tiempo transcurrirá antes de que el termómetro mida 39°F?
17. Un termómetro con una lectura de 8°C se lleva a un cuarto que tiene una temperatura constante de 35°C. Si el termómetro marca 15°C después de 3 minutos, ¿cuál será su lectura luego de estar en el cuarto 5 minutos? ¿Y después de 10 minutos? [*Sugerencia*: Construya una fórmula similar a la ecuación (4).]
18. *Tiempo de descongelamiento de una carne.* Una carne congelada a 28°F se coloca en un cuarto que tiene una temperatura constante de 70°F. Después de 10 minutos la temperatura de la carne ha subido a 35°F. ¿Cuál será su temperatura luego de 30 minutos? ¿Cuánto tiempo tardará la carne en alcanzar los 45°F? [*Véase* la sugerencia dada para el problema 17.]
19. *Descomposición de la sal en el agua.* La sal (NaCl) se descompone en el agua en iones de sodio (NA^+) y cloruro (Cl^-) según la ley del decaimiento no inhibido. Si una cantidad inicial de sal son 25 kilogramos y después de 10 horas quedan 15, ¿cuánta sal habrá después de 1 día? ¿Cuánto tiempo transcurrirá hasta que haya solo 1/2 kilogramo de sal?
20. *Voltaje de un condensador.* El voltaje de cierto condensador disminuye con el tiempo según la ley del decaimiento no inhibido. Si el voltaje inicial es de 40 voltios y 2 segundos después hay 10 voltios, ¿cuál es el voltaje luego de 5 segundos?
21. *Radiactividad de Chernobyl.* Después del escape de material radiactivo de la planta nuclear de Chernobyl (Ucrania) en 1986, el heno de Austria fue contaminado por iodo–131 (*véase* el problema 4). Si es conveniente alimentar al ganado con ese heno sólo cuando en él reste un 10% del iodo–131, ¿cuánto tiempo deben esperar los granjeros para poder utilizarlo?
22. *Carne asada.* El hotel Bora-Bora ofrece un servicio de barbacoa. A mediodía el cocinero coloca la carne en un gran horno dentro de la tierra. La temperatura original de la carne era 75°F pero a las 2:00 p.m. que se verificó sólo había llegado a los 100°F. Si la temperatura del horno es constante e igual a 325°F, ¿en qué momento podrá servirse la carne si su temperatura ideal es a los 175°F?



4.7 Escalas logarítmicas

Los logaritmos comunes aparecen con frecuencia al medir cantidades, pues proporcionan una forma de establecer escalas de números positivos que van desde muy pequeños hasta muy grandes. Por ejemplo, si cierta cantidad puede tomar valores desde $0.0000000001 = 10^{-10}$ hasta $10{,}000{,}000{,}000 = 10^{10}$, los logaritmos comunes de tales números se encontrarán entre -10 y 10.

Volumen del sonido

Nuestra primera aplicación utiliza una escala logarítmica para medir el volumen de un sonido. Los físicos definen la **intensidad de una onda sonora** como la cantidad de energía transmitida por la onda a través de un área dada. Por ejemplo, la menor intensidad que un oído humano puede detectar a una frecuencia de 100 hertzios es cercana a los 10^{-12} vatios por metro cuadrado. El **volumen** $L(x)$, medido en **decibeles** (en honor de Alexander Graham Bell), de un sonido con intensidad x (medida en vatios por metro cuadrado) es

Volumen

$$L(x) = 10 \log \frac{x}{I_0} \qquad (1)$$

donde $I_0 = 10^{-12}$ vatios por metro cuadrado es el sonido menos intenso que puede detectar un oído humano. Si $x = I_0$ en la ecuación (1), obtenemos

$$L(I_0) = 10 \log \frac{I_0}{I_0} = 10 \log 1 = 0$$

Así, en el umbral de audibilidad humana el volumen es de cero decibeles. La figura 19 proporciona el volumen de algunos sonidos comunes.

FIGURA 19
Volumen de sonidos comunes (en decibeles)

DECIBELES			
140	Disparo de una pistola, jet a 100 pies al despegar.	Dolor	
130	Cámara de pruebas de un motor.	Umbral de dolor del oído humano	
120	Petardos, truenos fuertes, martillo neumático, multitud gritando en un estadio.	Volumen incómodo	
110	Música de rock amplificada.		
100	Telar, tren subterráneo, tren elevado, tractor, cortadora de pasto, prensa de periódico.	Volumen alto	
90	Tráfico intenso, fábrica con mucho ruido.		
80	Camión diesel a 40 millas por hora y 50 pies de distancia, restaurante con mucha gente, procesador de basura fábrica promedio, aspiradora.	Volumen moderado	
70	Auto de pasajeros a 50 millas por hora y 50 pies de distancia.		
60	Máquina de escribir silenciosa, pájaros cantando, aire acondicionado, auto silencioso.	Tranquilo	
50	Conversación normal, oficina promedio.		
40	Refrigerador casero, oficina tranquila.	Muy tranquilo	
30	Casa promedio, llave de agua goteando, susurro a 5 pies.		
20	Lluvia ligera, sonido de las hojas de un árbol	Umbral de audibilidad de una persona promedio	
10	Susurro a través del cuarto	Apenas audible	
0		Umbral para el oído agudo	

Observe que un decibel no es una unidad lineal como el metro. Por ejemplo, un nivel sonoro de 10 decibeles es 10 veces más sonoro que uno de cero decibeles. [Si $L(x) = 10$, entonces $x = 10I_0$.] Un nivel sonoro de 20 decibeles es 100 veces mayor que uno de 10 decibeles. [Si $L(x) = 20$, entonces $x = 100I_0$.] Un nivel de 30 decibeles es 1000 veces mayor que uno de cero decibeles, etcétera.

Utilice la figura 19 para determinar la intensidad del sonido en el caso de una llave de agua que gotea.

Por la figura 19, vemos que el volumen del sonido que nos ocupa es de 30 decibeles. Así, por la ecuación (1), podemos determinar su intensidad x como sigue:

$$30 = 10 \log\left(\frac{x}{I_0}\right)$$

$$3 = \log\left(\frac{x}{I_0}\right)$$

$$\frac{x}{I_0} = 10^3$$

$$x = 1000I_0$$

donde $I_0 = 10^{-12}$ vatios por metro cuadrado. Así, la intensidad de ese sonido es 1000 veces mayor que un nivel de cero decibeles; es decir, una llave de agua que gotea produce un sonido con intensidad de $1000 \cdot 10^{-12} = 10^{-9}$ vatios por metro cuadrado.

Ahora resuelva el problema 5.

Utilice la figura 19 para determinar el volumen del sonido de un tren subterráneo; se sabe que este sonido es 10 veces más intenso que el debido al tráfico citadino en horas "pico".

El sonido de un tráfico intenso tiene un volumen de 90 decibeles. Por lo tanto, su intensidad es el valor x en la ecuación

$$90 = 10 \log\left(\frac{x}{I_0}\right)$$

Un sonido 10 veces más intenso que x tendrá un volumen $L(10x)$. Así, el volumen del tren subterráneo es

$$\begin{aligned} L(10x) &= 10 \log\left(\frac{10x}{I_0}\right) \\ &= 10 \log\left(10 \cdot \frac{x}{I_0}\right) \\ &= 10 \left[\log 10 + \log\left(\frac{x}{I_0}\right)\right] \\ &= 10 \log 10 + 10 \log\left(\frac{x}{I_0}\right) \\ &= 10 + 90 = 100 \text{ decibeles} \end{aligned}$$

Magnitud de un terremoto

Nuestra segunda aplicación utiliza una escala logarítmica para medir la magnitud de un terremoto.

La **escala de Richter*** es una forma de convertir las lecturas sismográficas en números que proporcionen una referencia sencilla para medir la magnitud M de un terremoto. Todos los terremotos se comparan con un **terremoto de nivel cero** cuya lectura sismográfica mide 0.001 de milímetro a una distancia de 100 kilómetros del epicentro. Un terremoto cuya lectura sismográfica mide x milímetros tiene una **magnitud** $M(x)$ dada por

Magnitud de un terremoto

$$M(x) = \log\left(\frac{x}{x_0}\right) \tag{2}$$

donde $x_0 = 10^{-3}$ es la lectura de un terremoto de nivel cero a la misma distancia del epicentro.

¿Cuál es la magnitud de un terremoto cuya lectura sismográfica es de 0.1 milímetros a una distancia de 100 kilómetros del epicentro?

Si $x = 0.1$, la magnitud $M(x)$ de este terremoto es

$$M(0.1) = \log\left(\frac{x}{x_0}\right) = \log\left(\frac{0.1}{0.001}\right) = \log\left(\frac{10^{-1}}{10^{-3}}\right) = \log 10^2 = 2$$

El terremoto mide entonces 2.0 en la escala de Richter.

Ahora resuelva el problema 7.

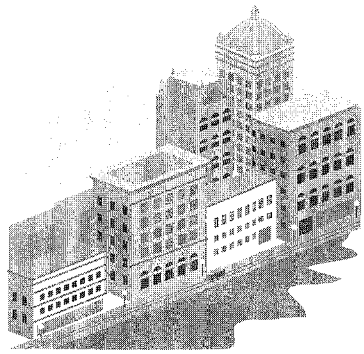
*Recibe el nombre del científico norteamericano, C.F. Richter, quien la diseñó en 1935.

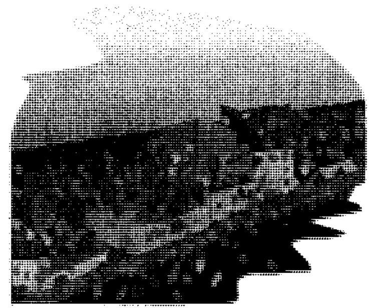
Con base en la fórmula (2), definimos la **intensidad de un terremoto** como la proporción entre x y x_0. Por ejemplo, la intensidad del terremoto descrito en el ejemplo 3 es $\frac{0.1}{0.001} = 10^2 = 100$. Es decir, 100 veces más intenso que un terremoto de nivel cero.

EJEMPLO 4 *Comparación de la intensidad de dos terremotos*

El devastador terremoto de San Francisco en 1906 midió 8.9 en la escala de Richter. ¿Cómo se compara ese terremoto con el de Papúa, Nueva Guinea, en 1988, que midió 6.7 en la escala de Richter?

FIGURA 20





Solución Sean x_1 y x_2 las lecturas sismográficas respectivas de los terremotos de San Francisco y Papúa, Nueva Guinea. Entonces, con base en la fórmula (2),

$$8.9 = \log\left(\frac{x_1}{x_0}\right) \qquad 6.7 = \log\left(\frac{x_2}{x_0}\right)$$

En consecuencia,

$$\frac{x_1}{x_0} = 10^{8.9} \qquad \frac{x_2}{x_0} = 10^{6.7}$$

El terremoto de San Francisco fue $10^{8.9}$ veces más intenso que uno de nivel cero. El terremoto de Papúa, Nueva Guinea fue $10^{6.7}$ veces más intenso que uno de nivel cero. Así,

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{10^{8.9}x_0}{10^{6.7}x_0} = 10^{2.2} \approx 158$$

$$x_1 \approx 158x_2$$

Por lo tanto, el terremoto de San Francisco fue 158 veces más intenso que el de Papúa, Nueva Guinea.

El ejemplo 4 muestra que la intensidad relativa de dos terremotos se puede determinar elevando 10 a una potencia igual a la diferencia de sus lecturas en la escala de Richter.

Ejercicio 4.7

1. *Volumen del sonido de una lavadora de loza.* Determine el volumen del sonido de una lavadora de loza que opera con una intensidad de 10^{-5} vatios por metro cuadrado. Exprese su respuesta en decibeles.
2. *Volumen del sonido de un motor diesel.* Determine el volumen del sonido de un motor diesel que opera con una intensidad de 10^{-3} vatios por metro cuadrado. Exprese su respuesta en decibeles.

3. Con los motores trabajando a toda su capacidad, un jet Boeing 727 produce ruido con una intensidad de 0.15 vatios por metro cuadrado. Determine el volumen del sonido de los motores en decibeles.
4. Un susurro produce un sonido con una intensidad de $10^{-9.8}$ vatios por metro cuadrado. ¿Cuál será su volumen en decibeles?
5. Para los humanos, el umbral del dolor debido al sonido promedia 130 decibeles. ¿Cuál es la intensidad de dicho sonido en vatios por metro cuadrado?
6. Si un sonido es 50 veces más intenso que otro, ¿cuál es la diferencia en el volumen de ambos? Exprese su respuesta en decibeles.
7. Determine la magnitud de un terremoto cuya lectura sismográfica es de 10.0 milímetros a una distancia de 100 kilómetros del epicentro.
8. Determine la magnitud de un terremoto cuya lectura sismográfica es de 1210 milímetros a 100 kilómetros del epicentro.
9. El terremoto de la Ciudad de México en 1978 registró 7.85 en la escala de Richter. ¿Cuánto habrá medido un sismógrafo situado a 100 kilómetros del epicentro durante este terremoto? ¿Cómo se compara la intensidad de este terremoto con el de San Francisco en 1906, el cual registró 8.9 en la escala de Richter?
10. Dos terremotos difieren en 1.0 al ser medidos en la escala de Richter. ¿En cuánto diferirán sus lecturas sismográficas a una distancia de 100 kilómetros del epicentro? ¿Cómo se relacionan sus intensidades?

Repaso del capítulo

Conceptos fundamentales

Propiedades de la función exponencial

$f(x) = a^x$, $a > 1$ — Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $(0, \infty)$; intersecciones-x: ninguna; intersección-y: 1; asíntota horizontal: eje x, cuando $x \to -\infty$; creciente; uno a uno.
Véase la figura 3 para apreciar una gráfica típica.

$f(x) = a^x$, $0 < a < 1$ — Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $(0, \infty)$; intersecciones-x: ninguna; intersección-y: 1; asíntota horizontal: eje x, cuando $x \to \infty$; decreciente; uno a uno.
Véase la figura 5 para una gráfica típica.

Propiedades de la función logarítmica

$f(x) = \log_a x$, $a > 1$ ($y = \log_a x$ significa $x = a^y$) — Dominio: $(0, \infty)$; rango: $(-\infty, \infty)$; intersección-x: 1; intersección-y: ninguna; asíntota vertical: eje y; creciente; uno a uno.
Véase la figura 10(b) para apreciar una gráfica típica.

$f(x) = \log_a x$, $0 < a < 1$ ($y = \log_a x$ significa $x = a^y$) — Dominio: $(0, \infty)$; rango: $(-\infty, \infty)$; intersección-x: 1; intersección-y: ninguna; asíntota vertical: eje y; decreciente; uno a uno.
Véase la figura 10(a) para apreciar una gráfica típica.

Número e

Valor al que tiende la expresión $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ cuando $n \to \infty$; es decir, $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Logaritmo natural

$y = \ln x$ significa que $x = e^y$

Propiedades de los logaritmos

$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1 \qquad a^{\log_a M} = M \qquad \log_a a^r = r$

$\log_a MN = \log_a M + \log_a N \qquad \log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N \qquad \log_a\left(\frac{1}{N}\right) = -\log_a N \qquad \log_a M^r = r \log_a M$

FÓRMULAS

Fórmula para el cambio de base	$\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$
Interés compuesto	$A = P\left(1 + \dfrac{r}{n}\right)^{nt}$
Composición continua	$A = Pe^{rt}$
Valor presente	$P = A\left(1 + \dfrac{r}{n}\right)^{-nt}$ o $P = Ae^{-rt}$
Crecimiento y decaimiento	$A = A_0 e^{kt}$

CÓMO HACER PARA

Hacer las gráficas de funciones exponenciales y logarítmicas.
Resolver ciertas ecuaciones exponenciales.
Resolver ciertas ecuaciones logarítmicas.
Solucionar problemas de interés compuesto.
Resolver problemas de crecimiento y decaimiento.
Resolver problemas de intensidad del sonido y de terremotos.

COMPLETE EN LOS ESPACIOS

1. La gráfica de toda función exponencial $f(x) = a^x$, con a mayor que cero y distinta de 1, pasa por los dos puntos __________.
2. Si la gráfica de una función exponencial $f(x) = a^x$, con a mayor que cero y distinta de 1, es decreciente, entonces su base debe ser menor que __________.
3. Si $3^x = 3^4$, entonces $x =$ __________.
4. El logaritmo de un producto es igual a __________ de los logaritmos.
5. Para cualquier base, el logaritmo de __________ es igual a 0.
6. Si $\log_8 M = \log_5 7 / \log_5 8$, entonces $M =$ __________.
7. El dominio de la función logarítmica $f(x) = \log_a x$ consta de __________.
8. La gráfica de toda función logarítmica $f(x) = \log_a x$, con a mayor que cero y distinta de 1, pasa por los dos puntos __________.
9. Si la gráfica de una función logarítmica $f(x) = \log_a x$, siendo a mayor que cero y distinta de 1, es creciente, entonces su base debe ser mayor que __________.
10. Si $\log_3 x = \log_3 7$, entonces $x =$ __________.

CIERTO O FALSO

C F 1. La gráfica de toda función exponencial $f(x) = a^x$, con a mayor que cero y distinta de 1, contiene los puntos (0,1) y (1, a).
C F 2. Las gráficas de $y = 3^{-x}$ y $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ son idénticas.
C F 3. El valor presente de \$1000.00 a ser recibidos después de 2 años al 10% anual compuesto en forma continua, es aproximadamente de \$1205.00.
C F 4. Si $y = \log_a x$, entonces $y = a^x$.
C F 5. La gráfica de toda función logarítmica $f(x) = \log_a x$, con a mayor que cero y distinta de 1, contiene los puntos (1,0) y (a,1).

C F 6. $a^{\log_M a} = M$, donde $a > 0$, $a \neq 1$, $M > 0$

C F 7. $\log_a(M + N) = \log_a M + \log_a N$, donde $a > 0$, $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$

C F 8. $\log_a M - \log_a N = \log_a(M/N)$, donde $a > 0$, $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$

EJERCICIOS DE REPASO

En los problemas del 1 al 6 evalúe cada expresión.

1. $\log_2(\frac{1}{8})$ **2.** $\log_3 81$ **3.** $\ln e^{\sqrt{2}}$ **4.** $e^{\ln 0.1}$ **5.** $2^{\log_2 0.4}$ **6.** $\log_2 2^{\sqrt{3}}$

En los problemas del 7 al 12, escriba cada expresión como un único logaritmo.

7. $3 \log_4 x^2 + \frac{1}{2} \log_4 \sqrt{x}$

8. $-2 \log_3\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{3} \log_3 \sqrt{x}$

9. $\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \ln(x^2 - 1)$

10. $\log(x^2 - 9) - \log(x^2 + 7x + 12)$

11. $2 \log 2 + 3 \log x - \frac{1}{2} [\log(x + 3) + \log(x - 2)]$

12. $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - 4 \ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}[\ln(x - 4) + \ln x]$

En los problemas del 13 al 20, determine a y como una función de x. La constante C es un número positivo.

13. $\ln y = 2x^2 + \ln C$

14. $\ln(y - 3) = \ln 2x^2 + \ln C$

15. $\frac{1}{2} \ln y = 3x^2 + \ln C$

16. $\ln 2y = \ln(x + 1) + \ln(x + 2) + \ln C$

17. $\ln(y - 3) + \ln(y + 3) = x + C$

18. $\ln(y - 1) + \ln(y + 1) = -x + C$

19. $e^{y+C} = x^2 + 4$

20. $e^{3y-C} = (x + 4)^2$

En los problemas del 21 al 30 haga la gráfica de cada función. Inicie cada problema con la gráfica de $y = e^x$ o con la de $y = \ln x$.

21. $f(x) = e^{-x}$ **22.** $f(x) = \ln(-x)$ **23.** $f(x) = 1 - e^x$ **24.** $f(x) = 3 + \ln x$

25. $f(x) = 3e^x$ **26.** $f(x) = \frac{1}{2} \ln x$ **27.** $f(x) = e^{|x|}$ **28.** $f(x) = \ln|x|$

29. $f(x) = 3 - e^{-x}$ **30.** $f(x) = 4 - \ln(-x)$

En los problemas del 31 al 50 resuelva cada ecuación.

31. $4^{1-2x} = 2$ **32.** $8^{6+3x} = 4$ **33.** $3^{x^2+x} = \sqrt{3}$

34. $4^{x-x^2} = \frac{1}{2}$ **35.** $\log_x 64 = -3$ **36.** $\log_{\sqrt{2}} x = -6$

37. $5^x = 3^{x+2}$ **38.** $5^{x+2} = 7^{x-2}$ **39.** $9^{2x} = 27^{3x-4}$

40. $25^{2x} = 5^{x^2-12}$ **41.** $\log_3\sqrt{x - 2} = 2$ **42.** $2^{x+1} \cdot 8^{-x} = 4$

43. $8 = 4^{x^2} \cdot 2^{5x}$ **44.** $2^x \cdot 5 = 10^x$ **45.** $\log_6(x + 3) + \log_6(x + 4) = 1$

46. $\log_{10}(7x - 12) = 2 \log_{10} x$ **47.** $e^{1-x} = 5$ **48.** $e^{1-2x} = 4$

49. $2^{3x} = 3^{2x+1}$ **50.** $2^{x^3} = 3^{x^2}$

En los problemas del 51 al 54 utilice el siguiente resultado: si x es la presión atmosférica (medida en milímetros de mercurio), entonces la fórmula para la altitud h(x) (medida en metros sobre el nivel del mar) es

$$h(x) = (30T + 8000)\log\left(\frac{P_0}{x}\right)$$

donde T es la temperatura (en grados Celsius) y P_0 la presión atmosférica al nivel del mar, que es aproximadamente 760 milímetros de mercurio.

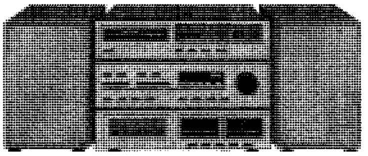
51. ¿A qué altura se encuentra un avión cuyos instrumentos registran una temperatura exterior de 0°C y una presión atmosférica de 300 milímetros de mercurio?

52. ¿Qué altura tiene una montaña si los instrumentos colocados en su cima registran una temperatura de 5°C y una presión atmosférica de 500 milímetros de mercurio?

53. ¿Cuál es la presión atmosférica fuera de un avión que vuela a una altitud de 10,000 metros si la temperatura del aire en el exterior es de −100°C?

54. ¿Cuál es la presión atmosférica (en milímetros de mercurio) sobre el monte Everest, el cual tiene una altura aproximada de 8900 metros, si la temperatura del aire es allí de 5°C?

55. La potencia P de salida de un amplificador (en vatios) se relaciona con la ganancia de voltaje (en decibeles) d mediante la fórmula $P = 25e^{0.1d}$.



(a) Determine la potencia de salida para una ganancia de voltaje de 4 decibeles.
(b) Para una potencia de salida de 50 vatios, ¿cuál es la ganancia de voltaje?

56. Un telescopio tiene una utilidad limitada por el brillo de la estrella a la que está dirigido y por el diámetro de su lente. Una medida del brillo de una estrella es su *magnitud*: mientras más oscura sea una estrella mayor será su magnitud. Una fórmula para la magnitud límite L de un telescopio, es decir, la magnitud de la estrella más oscura que puede observarse con él, está dada por

$$L = 9 + 5.1 \log d$$

donde d es el diámetro (en pulgadas) de la lente.

(a) ¿Cuál es la magnitud límite de un telescopio de 3.5 pulgadas?
(b) ¿Cuál es el diámetro necesario para ver una estrella de magnitud 14?

57. La demanda de un producto nuevo aumenta rápidamente al principio y después se nivela. El porcentaje P de compras reales del producto después de estar en el mercado durante t meses es

$$P = 90 - 80\left(\frac{3}{4}\right)^t$$

(a) ¿Cuál será el porcentaje de ventas del producto después de 5 meses?
(b) ¿Cuál será el porcentaje de ventas del producto después de 10 meses?
(c) ¿Cuál será el porcentaje máximo de ventas del producto?
(d) ¿Cuántos meses transcurrirán antes de llegar al 40% de ventas?
(e) ¿Cuántos meses transcurrirán antes de llegar al 70% de ventas?

58. Un muestreo de cierta comunidad de 10,000 residentes deja ver que el número de residentes N que han escuchado cierta información después de m meses está dado por la fórmula

$$m = 55.3 - 6 \ln(10{,}000 - N)$$

¿Cuántos meses transcurren hasta que la mitad de la población haya escuchado acerca de cierto programa comunitario de toma de lectura gratuita de la presión sanguínea?

59. El número de años n para que cierta maquinaria se deprecie hasta un valor de recuperación conocido está dado por la fórmula

$$n = \frac{\log_{10} s - \log_{10} i}{\log_{10}(1 - d)}$$

donde s es el valor de recuperación de la maquinaria, i su valor inicial y d su tasa anual de depreciación.

(a) ¿Cuántos años transcurrirán para que cierta maquinaria disminuya su valor de $90,000.00 hasta $10,000.00 si la tasa anual de depreciación es 0.20 (20%)?
(b) ¿Cuántos años transcurrirán para que cierta maquinaria pierda la mitad de su valor si la tasa anual de depreciación es del 15 por ciento?

60. Los abuelos de una niña adquieren un bono de $10,000.00, que vence en 18 años, para su educación universitaria. Si el bono paga 4% de interés compuesto en forma semestral, ¿cuánto valdrá a su vencimiento?

61. Los abuelos de una niña desean adquirir un bono que vence en 18 años, para la educación universitaria de su nieta. El bono paga un 4% de interés compuesto en forma semestral. ¿Qué cantidad deben pagar por el bono para que el bono valga $85,000.00 a su vencimiento?

62. La compañía First Colonial Bankshares anuncia los siguientes planes de inversión para el retiro.

(a) Con un interés compuesto en forma continua, ¿cuál tasa anual de interés ofrecen?

(b) La compañía afirma que $4000.00 invertidos hoy tendrán un valor de $32,000.00 en 20 años. Utilice la respuesta de la parte (a) para determinar el valor real de $4000.00 en 20 años, con una composición continua.

PLANES PARA EL RETIRO

POR CADA $5000.00 DESEADOS AL VENCIMIENTO

DEPOSITE:	CON UN PLAZO DE:
$620.17	20 años
$1045.02	15 años
$1760.92	10 años
$2967.26	5 años

63. Determine el volumen del sonido que produce una unidad de procesamiento de basura que opera con una intensidad de 10^{-4} vatios por metro cuadrado. Exprese su respuesta en decibeles.

64. El 9 de septiembre de 1985, los suburbios del oeste de Chicago sufrieron un leve terremoto que registró 3.0 en la escala de Richter. ¿Cómo se compara la intensidad de este terremoto con la del gran terremoto de San Francisco en 1906, que registró 8.9 en la escala de Richter?

65. La osamenta de un hombre prehistórico encontrada en el desierto de Nuevo México tiene aproximadamente el 5% de la cantidad original de carbono–14. Si la vida media del carbono–14 es de 5600 años, ¿aproximadamente hace cuántos años murió ese hombre?

66. Una sartén se retira del fuego a una temperatura de 450°F y se coloca en un cuarto que tiene una temperatura constante de 70°F. Después de 5 minutos, la temperatura de la sartén es de 400°F. ¿Cuánto tiempo pasará hasta que su temperatura sea de 150°F?

67. En un cuarto cuya temperatura es de 70°F, ¿una pizza horneada a 450°F llegará en algún momento a los 70°F? La ley del enfriamiento de Newton parece indicar que no. ¿Qué es lo que realmente ocurre? ¿Cuáles son las hipótesis esgrimidas al utilizar la ley de Newton? Escriba un breve ensayo con sus conclusiones.

TEMA 4

CAPÍTULO 9

GEOMETRÍA ANALÍTICA

Panorama Antenas parabólicas

Una antena parabólica tiene la figura de un ***paraboloide de revolución****; una superficie que se forma al hacer girar una parábola alrededor de su eje de simetría. Las señales que provienen de un satélite chocan en la superficie de una antena parabólica y son reflejadas hacia un solo punto, donde está colocado el receptor. Si la antena mide 8 pies de diámetro en su abertura y tiene 3 pies de profundidad en su centro, ¿en qué posición debe ser colocado el receptor? [ejemplo 8 en la sección 9.2].* ■

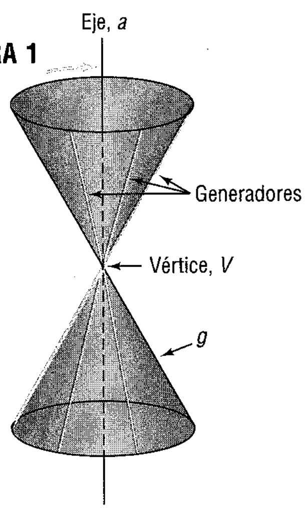
Apolonio (200 a. C.) fue uno de los primeros estudiosos de las cónicas y descubrió algunas de sus interesantes propiedades. En la actualidad se estudian aún las cónicas por sus múltiples usos. Los paraboloides de revolución (parábolas giradas alrededor de su eje de simetría) son usados como receptores de señales (por ejemplo, las antenas parabólicas utilizadas en los sistemas de radar y de televisión por cable), como receptores de energía solar y como reflectores (telescopios, proyección de luz, etc.). Los planetas giran alrededor del Sol en órbitas aproximadamente *elípticas*. Las superficies elípticas pueden ser usadas para reflejar señales como la luz y el sonido desde un lugar a otro. Y las hipérbolas pueden ser empleadas para determinar la ubicación de barcos en el mar.

Los griegos aplicaron los métodos de geometría euclidiana para estudiar las cónicas. Nosotros nos serviremos de los métodos más poderosos de geometría analítica, combinando el álgebra y la geometría, para nuestro estudio de las cónicas. Así, daremos una descripción geométrica de cada cónica y luego, por medio de coordenadas rectangulares y de la fórmula de distancia, encontraremos las ecuaciones que representen cónicas. Recuerde que nos valimos de este procedimiento cuando definimos un círculo en la sección 1.6.

Este capítulo termina con una sección sobre ecuaciones de las cónicas en coordenadas polares, seguido por un estudio de curvas planas y coordenadas paramétricas.

Preliminares

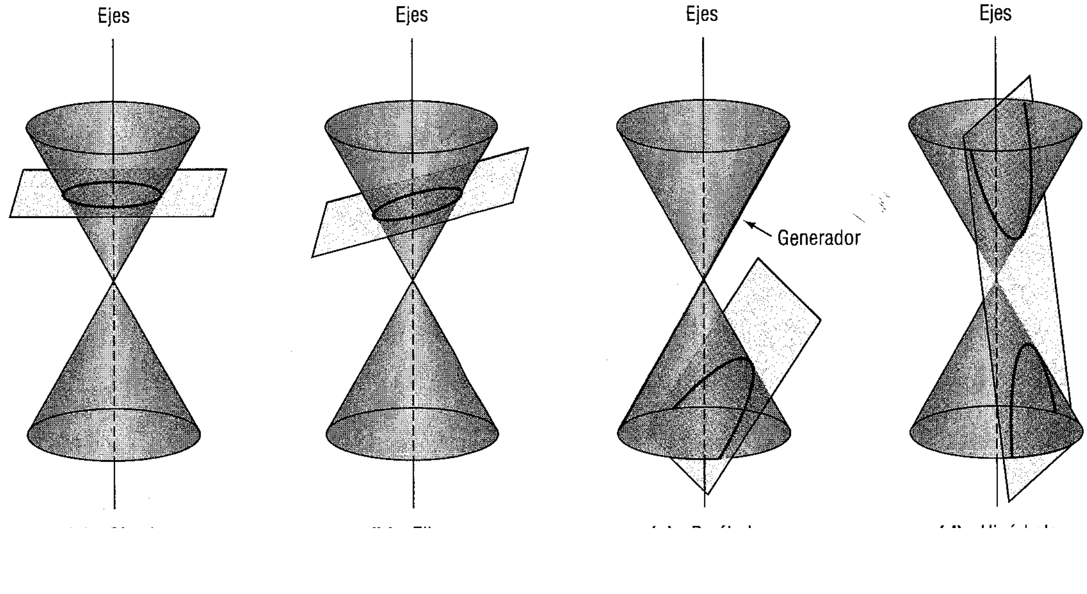
FIGURA 1



La palabra *cónica* se deriva de *cono*, una figura geométrica que puede ser construida de la siguiente manera: Sean a y g dos rectas distintas que se cortan en un punto V. Manteniendo la recta a fija, se hace girar la recta g alrededor de a manteniendo el mismo ángulo entre a y g. Al conjunto de puntos generados por la recta g se le llama **cono (circular recto).** *Véase* la figura 1. La recta fija a es llamada **eje** del cono; el punto V es su **vértice;** las rectas que pasan por V y forman el mismo ángulo con a y g son llamadas **generadores** del cono. Así, cada generador es una recta que pertenece por completo al cono. El cono está constituido por dos partes, llamadas **mantos** (u hojas), que se cortan en el vértice.

Las **cónicas,** una abreviación de **secciones cónicas,** son curvas que resultan de la intersección de un cono (circular recto) y un plano. Las cónicas que estudiaremos en este capítulo surgen cuando el plano no contiene al vértice, como se muestra en la figura 2. Estas cónicas son **círculos** cuando el plano es perpendicular al eje del cono y corta a cada generador del cono; son **elipses** cuando el plano está ligeramente inclinado de modo que corta a cada generador pero sólo en un manto del cono; son **parábolas** cuando el plano es más inclinado de manera que sea paralelo a un (y sólo uno) generador y corta sólo a un manto del cono; y son **hipérbolas** cuando el plano corta a ambos mantos.

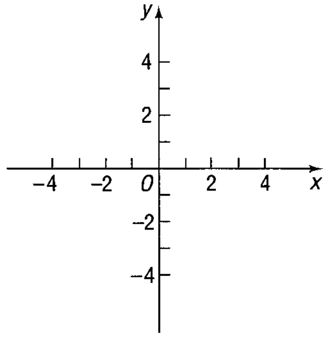
FIGURA 2



Si el plano contiene al vértice, su intersección con el cono es un punto, una recta, o un par de rectas que se cortan. Éstas, por lo regular, son llamadas **cónicas degeneradas.**

1.6 Coordenadas rectangulares y gráficas

FIGURA 29



Ubicamos un punto en la recta de los números reales asignándole un solo número real, llamado *coordenada del punto*. Para trabajar en un plano de dos dimensiones, ubicamos puntos utilizando dos números.

Empezamos con dos rectas de números reales en el mismo plano: una horizontal y otra vertical. A la recta horizontal le llamamos **eje *X*,** a la vertical **eje *Y*,** y al punto de intersección de ellas **origen *O*.** Asignamos coordenadas a cada punto de estas rectas de números, como se describió anteriormente (sección 1.1) y se muestra en la figura 29, utilizando una escala conveniente. En matemáticas, por lo común utilizamos la misma escala en cada uno de los ejes; en aplicaciones, con frecuencia se utilizan escalas diferentes en cada eje. El origen O tiene un valor de cero en los dos ejes. Seguimos la convención usual de que puntos a la derecha de O están asociados con números reales positivos y puntos a la izquierda de O tienen coordenada negativa. Los puntos por encima de O están asociados con números reales positivos y aquellos abajo del origen se asocian con números reales negativos. En la figura 29 el eje X y el eje Y están marcados con x y y, respectivamente, y hemos utilizado una flecha en los extremos superior y derecho de cada eje para indicar la dirección positiva.

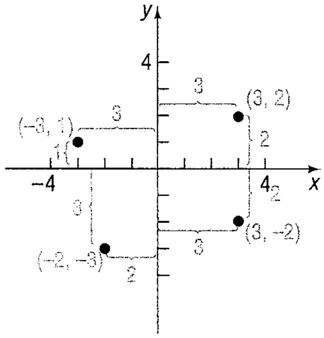
El sistema de coordenadas descrito líneas arriba es llamado **sistema rectangular** o **cartesiano* de coordenadas.** El plano formado por los ejes X y Y algunas veces es llamado **plano *xy*,** y nos referimos al eje x y al eje y como los **ejes de coordenadas.**

Cualquier punto P en el plano xy puede ser localizado utilizando una **pareja ordenada (x, y)** de números reales. Sea x la distancia con signo desde P al eje y (*con signo* quiere decir que si P está a la derecha del eje y entonces $x > 0$, y si P está a la izquierda del eje y, entonces $x < 0$) y y la distancia con signo desde P al eje x. La pareja ordenada (x, y), también llamada **coordenadas** de P, nos dan suficiente información para localizar al punto P en el plano.

Por ejemplo, para localizar al punto cuyas coordenadas son $(-3, 1)$, avanzamos 3 unidades a lo largo del eje x hacia la izquierda de O, después avanzamos una unidad

*Llamado así en honor de René Descartes (1596-1650), un matemático, filósofo y teólogo francés.

FIGURA 30



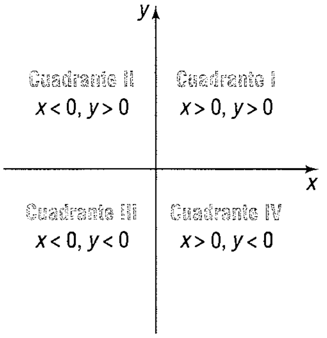
hacia arriba. **Marcamos** este punto colocando un punto en ese lugar. *Véase* la figura 30, en la cual están marcados los puntos $(-3, 1)$, $(-2, -3)$, $(3, -2)$ y $(3, 2)$.

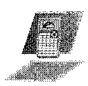
El origen tiene coordenadas $(0, 0)$. Cualquier punto en el eje x tiene coordenada $(x, 0)$ y cualquier punto en el eje y tiene coordenada $(0, y)$.

Si (x, y) son las coordenadas de un punto P, entonces x es llamada **coordenada x**, o **abscisa**, de P y y es la **coordenada y**, u **ordenada**, de P. Identificamos al punto P mediante sus coordenadas (x, y) escribiendo $P = (x, y)$. Por lo común, sólo diremos "el punto (x, y)", en lugar de "el punto cuyas coordenadas son (x, y)".

Los ejes de coordenadas dividen al plano xy en cuatro secciones, llamadas **cuadrantes**, como se muestra en la figura 31. En el primer cuadrante las coordenadas x, y de todos los puntos son positivas; en el segundo cuadrante x es negativa y y positiva; en el tercer cuadrante, tanto x como y son negativas; en el cuarto cuadrante x es positiva y y negativa. Los puntos que se ubiquen sobre los ejes coordenados no pertenecen a ningún cuadrante.

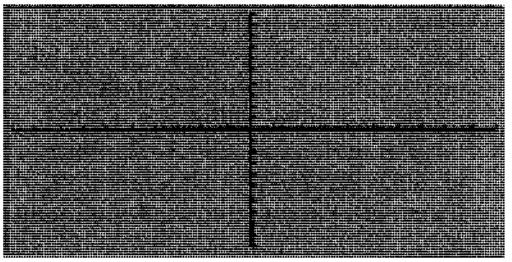
FIGURA 31





Comentario: En una calculadora gráfica puede establecer la escala de cada eje y luego obtener **la ventana o pantalla de visualización**. *Véase* la figura 32 para conocer una ventana típica. Ahora es momento de leer la sección B.1, *La ventana (pantalla) de visualización*, en el apéndice B.

FIGURA 32



Si se utilizan las mismas unidades de medida, tales como pulgadas, centímetros, pies, metros, etc., en ambos ejes, entonces todas las distancias en el plano xy podrán ser medidas utilizando esta unidad de medida. La *fórmula de distancia* proporciona un método directo para calcular la distancia entre dos puntos en el plano xy.

Teorema

La distancia entre dos puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$, denotada por $d(P_1, P_2)$, es

Fórmula de distancia

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{1}$$

EJEMPLO 1 *Determinación de la distancia entre dos puntos*

Encontrar la distancia d entre los puntos $(-4, 5)$ y $(3, 2)$.

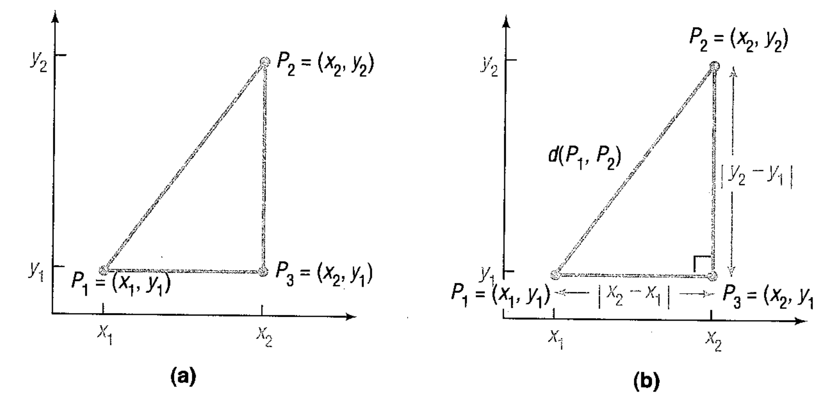
Solución Utilizando la fórmula (1), la solución se obtiene como sigue:

$$d = \sqrt{[3-(-4)]^2 + (2-5)^2} = \sqrt{7^2 + (-3)^2}$$
$$= \sqrt{49+9} = \sqrt{58} \approx 7.62$$

Demostración de la fórmula de distancia Sean (x_1, y_1) las coordenadas del punto P_1 y (x_2, y_2) las coordenadas del punto P_2. Suponga que la recta que une P_1 y P_2 no es horizontal ni vertical. *Véase* la figura 33(a). Las coordenadas de P_3 son (x_2, y_1). La distancia horizontal de P_1 a P_3 es el valor absoluto de la diferencia de sus coordenadas x, o $|x_2 - x_1|$. La distancia vertical desde P_3 hasta P_2 es el valor absoluto de la diferencia de sus coordenadas y, o $|y_2 - y_1|$. *Véase* la figura 33(b). La distancia $d(P_1, P_2)$ que buscamos es la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo; de modo que, por el teorema de Pitágoras, deducimos

$$[d(P_1, P_2)]^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$
$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

FIGURA 33

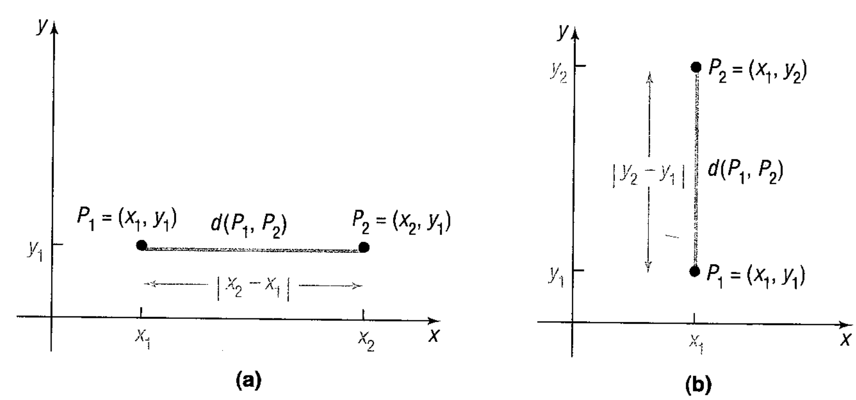


Ahora, si la recta que une a P_1 y a P_2 es horizontal, entonces la coordenada y de P_1 es igual a la coordenada y de P_2; esto es, $y_1 = y_2$. *Véase* la figura 34(a). En este caso, la fórmula de distancia (1) aún sirve, ya que, para $y_1 = y_2$, se reduce a

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + 0^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|$$

De manera semejante, este argumento es cierto si la recta que une a P_1 y P_2 es vertical. *Véase* la figura 34(b). Por lo tanto, la fórmula de distancia es válida en todos los casos.

FIGURA 34



La distancia entre dos puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ nunca es un número negativo. Además, la distancia entre dos puntos es cero sólo cuando los puntos son idénticos —esto es, cuando $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$. También, puesto que $(x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2$ y $(y_2 - y_1)^2 = (y_1 - y_2)^2$, no hay diferencia si la distancia es calculada de P_1 a P_2 o desde P_2 a P_1 —esto es, $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$.

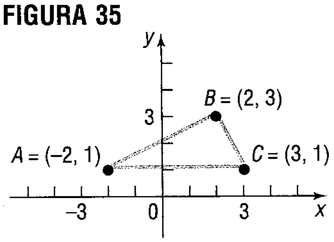
Las coordenadas rectangulares nos permiten traducir problemas de geometría a problemas de álgebra, y viceversa. El ejemplo siguiente muestra cómo el álgebra (la fórmula de distancia) puede ser utilizada para resolver un problema de geometría.

EJEMPLO 2 *Uso de álgebra para resolver un problema geométrico*

Considerar los tres puntos $A = (-2, 1)$, $B = (2, 3)$ y $C = (3, 1)$.

(a) Marcar cada punto y formar el triángulo ABC.
(b) Encontrar la longitud de cada lado del triángulo.
(c) Verificar que el triángulo es un triángulo rectángulo.
(d) Encontrar el área del triángulo.

FIGURA 35



Solución

(a) En la figura 35 se marcan los puntos A, B, C y el triángulo ABC.

(b) $d(A, B) = \sqrt{[2 - (-2)]^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$d(B, C) = \sqrt{(3 - 2)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$

$d(A, C) = \sqrt{[3 - (-2)]^2 + (1 - 1)^2} = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5$

(c) Para demostrar que el triángulo es un triángulo rectángulo, necesitamos comprobar que la suma de los cuadrados de las longitudes de los dos lados más pequeños es igual al cuadrado de la longitud del lado más grande. (¿Por qué es esto suficiente?) Al observar la figura 35, parece razonable conjeturar que el ángulo recto está en el vértice B. Por tanto, verificaremos que

$$[d(A, B)]^2 + [d(B, C)]^2 = [d(A, C)]^2$$

Encontramos

$$\begin{aligned}[d(A, B)]^2 + [d(B, C)]^2 &= (2\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 \\ &= 20 + 5 = 25 = [d(A, C)]^2\end{aligned}$$

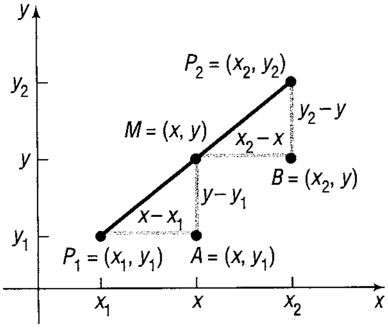
de modo que se deduce del recíproco del teorema de Pitágoras que el triángulo ABC es un triángulo rectángulo.

(d) Ya que el ángulo recto está en B, los lados AB y BC forman la base y la altura del triángulo. Por lo tanto, su área es

$$\text{Área} = \tfrac{1}{2}(\text{Base})(\text{Altura}) = \tfrac{1}{2}(2\sqrt{5})(\sqrt{5}) = 5 \text{ bases cuadradas}$$

Ahora resuelva el problema 19.

FIGURA 36



Ahora deduciremos una fórmula para las coordenadas del **punto medio de un segmento de recta.** Sean $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ los extremos de un segmento de recta, y sea $M = (x, y)$ el punto del segmento de la recta que está a la misma distancia de P_1 y de P_2. *Véase* la figura 36. Los triángulos P_1AM y MBP_2 son congruentes.* [¿Advierte por qué? Porque el ángulo AP_1M = ángulo

*La proposición siguiente es un teorema de geometría. Dos triángulos son congruentes si sus lados son de la misma longitud (LLL), o si dos lados y el ángulo incluido son iguales (LAL), o si dos ángulos u el lado incluido son iguales (ALA).

BMP_2,* El ángulo P_1MA = ángulo MP_2B, y, por hipótesis, $d(P_1, M) = d(M, P_2)$. Así que tenemos Ángulo-Lado-Ángulo.] En consecuencia, los lados correspondientes son de la misma longitud. Esto es,

$$\begin{aligned} x - x_1 &= x_2 - x \quad &\text{y}\quad y - y_1 &= y_2 - y \\ 2x &= x_1 + x_2 & 2y &= y_1 + y_2 \\ x &= \frac{x_1 + x_2}{2} & y &= \frac{y_1 + y_2}{2} \end{aligned}$$

Teorema

El punto medio (x, y) del segmento de recta $P_1 = (x_1, y_1)$ a $P_2 = (x_2, y_2)$ está dado por

Fórmula del punto medio

$$(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \qquad (2)$$

Por tanto, para encontrar el punto medio de un segmento de recta promediamos las coordenadas x, y las coordenadas y de los puntos extremos

EJEMPLO 3

Determinación del punto medio de un segmento de recta

Encontrar el punto medio del segmento de recta que va de $P_1 = (-5, 3)$ a $P_2 = (3, 1)$. Marcar los puntos P_1 y P_2 y su punto medio. Verificar la respuesta..

Solución

Aplicamos la fórmula del punto medio (2) utilizando $x_1 = -5$, $x_2 = 3$, $y_1 = 3$, y $y_2 = 1$. *Véase* la figura 37. Entonces las coordenadas (x, y) del punto medio M son

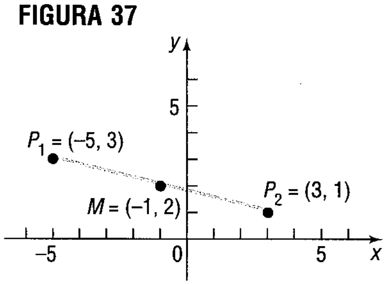
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-5 + 3}{2} = -1 \quad \text{y} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{3 + 1}{2} = 2$$

Esto es, $M = (-1, 2)$.

Verificación: Ya que M es el punto medio, revisamos la respuesta verificando que $d(P_1, M) = d(M, P_2)$:

$$d(P_1, M) = \sqrt{[-1 - (-5)]^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$$
$$d(M, P_2) = \sqrt{[3 - (-1)]^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$$

FIGURA 37



Ahora resuelva el problema 5.

Gráficas de ecuaciones

La **gráfica de una ecuación** de dos variables x y y está constituida por el conjunto de puntos en el plano xy cuyas coordenadas satisfacen la ecuación.

Veamos algunos ejemplos.

*Otra proposición de la geometría afirma que la transversal $\overline{P_1P_2}$ forma ángulos correspondientes iguales con las rectas paralelas $\overline{P_1A}$ y $\overline{MB}$.

EJEMPLO 4 *Gráfica de una ecuación*

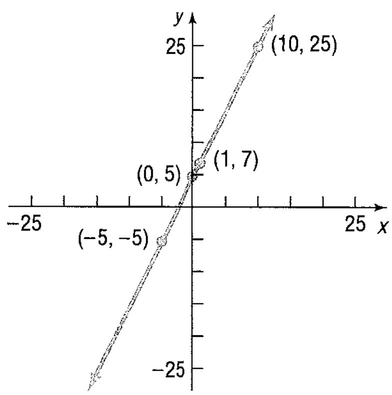
Hacer la gráfica de la ecuación: $y = 2x + 5$

Solución Queremos encontrar todos los puntos (x, y) que satisfacen la ecuación. Para localizar algunos (y así tener una idea del patrón de la gráfica), asignamos algunos números a x y encontramos los valores correspondientes para y:

SI	ENTONCES	PUNTO DE LA GRÁFICA
$x = 0$	$y = 2(0) + 5 = 5$	$(0, 5)$
$x = 1$	$y = 2(1) + 5 = 7$	$(1, 7)$
$x = -5$	$y = 2(-5) + 5 = -5$	$(-5, -5)$
$x = 10$	$y = 2(10) + 5 = 25$	$(10, 25)$

Marcamos estos puntos y conectándolos después, obtenemos la gráfica de la ecuación (una línea recta), como se muestra en la figura 38.

FIGURA 38
$y = 2x + 5$



EJEMPLO 5 *Gráfica de una ecuación*

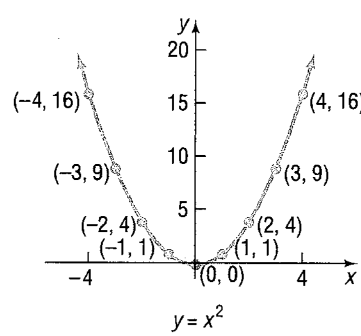
Hacer la gráfica de la ecuación: $y = x^2$

Solución La tabla 1 proporciona varios puntos de la gráfica. En la figura 39, marcamos estos puntos y los conectamos con una curva suave para obtener la gráfica (una *parábola*).

TABLA 1

x	$y = x^2$	(x, y)
−4	16	(−4, 16)
−3	9	(−3, 9)
−2	4	(−2, 4)
−1	1	(−1, 1)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	4	(2, 4)
3	9	(3, 9)
4	16	(4, 16)

FIGURA 39
$y = x^2$

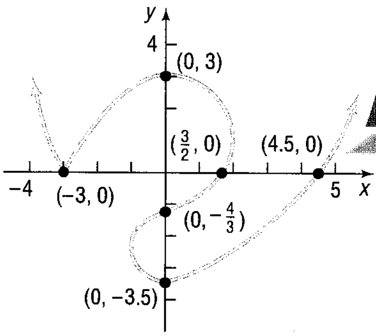


Las gráficas de las ecuaciones mostradas en las figuras 38 y 39 no muestran todos los puntos. Por ejemplo, en la figura 38 el punto $(20, 45)$ es una parte de la gráfica de $y = 2x + 5$, pero no se muestra. Ya que la gráfica de $y = 2x + 5$ podría ser extendida tanto como quisiéramos, utilizamos flechas para indicar que el patrón mostrado continúa. Así, cuando se ilustre una gráfica, es importante presentar una parte suficiente de ella para que cualquiera pueda "ver" el resto como una continuación obvia de lo que aparece. Esto se llama una **gráfica completa.**

Una manera de obtener una gráfica completa de una ecuación es marcando un número suficiente de puntos de la gráfica hasta que sea evidente un patrón. Luego esos puntos se conectan mediante una curva suave que siga el patrón sugerido. Pero, ¿cuántos puntos son suficientes? Algunas veces el conocimiento de la ecuación nos lo dice. Por ejemplo, aprenderemos en la sección siguiente que, si una ecuación es de la forma $y = mx + b$ entonces su gráfica es una línea recta. En este caso, dos puntos serían suficientes para obtener la gráfica.

Un objetivo de este libro es investigar las propiedades de las ecuaciones con el fin de poder decidir cuándo una gráfica es completa. En esta sección haremos gráficas de ecuaciones marcando un número suficiente de puntos de la gráfica hasta que sea evidente un patrón; luego conectaremos esos puntos con una curva suave que siga el patrón sugerido. En resumen, investigaremos varias técnicas que nos permitirán hacer la gráfica de una ecuación sin tener que marcar demasiados puntos.

FIGURA 40



Comentario: Otra manera de obtener la gráfica de una ecuación es utilizando un instrumento de graficación. Lea la sección B.2, *Graficación de ecuaciones mediante un dispositivo de graficación,* en el apéndice B.

Dos técnicas que reducen el número de puntos necesarios para hacer la gráfica de una ecuación involucran la determinación de *intersecciones* y la verificación de *simetría.*

Los puntos, si los hay, en los cuales la gráfica cruza los ejes de coordenadas son llamados **intersecciones.** La coordenada x de un punto en el cual la gráfica cruza o toca el eje x es una **intersección-x**, y la coordenada y de un punto en el que la gráfica cruza o toca el eje y es una **intersección-y**. Por ejemplo, la gráfica de la figura 40 tiene tres intersecciones -3, $\frac{3}{2}$, y 4.5, y tres intersecciones -3.5, $-\frac{4}{3}$, y 3.

Procedimiento para encontrar intersecciones

1. Para encontrar las intersecciones-x, si las hay, de la gráfica de una ecuación, se debe hacer $y = 0$ en la ecuación y resolver para x.
2. Para encontrar las intersecciones-y, si las hay, de la gráfica de una ecuación, se debe hacer $x = 0$ en la ecuación y resolver para y.

Comentario: En muchas ecuaciones puede no ser fácil encontrar las intersecciones. En tales casos un dispositivo de graficación puede ser utilizado. Lea la sección B.3, funciones TRACE, ZOOM-IN y BOX, en el apéndice B para encontrar cómo un dispositivo de graficación localiza las intersecciones.

Otra herramienta útil para la graficación de ecuaciones involucra la *simetría*; en particular, la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen.

Simetría con respecto al eje x

Una gráfica es **simétrica con respecto al eje x** si, para cada punto (x, y) en la gráfica, el punto $(x, -y)$ también está en la gráfica.

Simetría con respecto al eje y

Una gráfica es **simétrica con respecto al eje y** si, para cada punto (x, y) en la gráfica, el punto $(-x, y)$ también está en la gráfica.

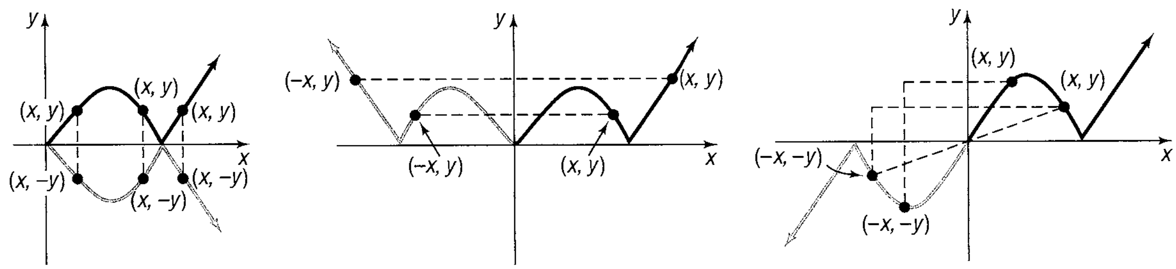
Simetría con respecto al eje *centro*

Una gráfica es **simétrica con respecto al origen** si, para cada punto (x, y) en la gráfica, el punto $(-x, -y)$ también está en la gráfica.

La figura 41 ilustra la definición. Observe que, cuando una gráfica es simétrica con respecto al eje x, la parte de la gráfica por encima de ese eje es una reflexión de la parte que está abajo de él, y viceversa. Y cuando una gráfica es simétrica con respecto al eje y, la parte de la gráfica a la derecha de ese eje es una reflexión de la parte que está a la izquierda de él, y viceversa. La simetría con respecto al origen puede verse de dos maneras:

1. Como una reflexión con respecto al eje y seguida de una reflexión con respecto al eje x.
2. Como una proyección a lo largo de una recta que pasa por el origen de modo que las distancias desde el origen son iguales.

FIGURA 41



Simétrica con respecto al eje x — Simétrica con respecto al eje y — Simétrica con respecto al origen

Ahora resuelva el problema 29.

Cuando la gráfica de una ecuación es simétrica, se reduce el número de puntos que se necesita trazar para ver el patrón que sigue la gráfica. Por ejemplo, si la gráfica de una ecuación es simétrica con respecto al eje y, entonces, una vez que los puntos a la derecha de ese eje son trazados, se puede obtener un número igual de puntos de la gráfica reflejándolos con respecto al eje y. Así, antes de que hagamos la gráfica de una ecuación, primero determinemos si tiene alguna simetría. Las pruebas siguientes son utilizadas con ese fin.

Pruebas de simetría

Para verificar la simetría de la gráfica de una ecuación con respecto al:

Eje x: Reemplazar y por $-y$ en la ecuación. Si se obtiene una ecuación equivalente, la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto al eje x.

Eje y: Reemplazar x por $-x$ en la ecuación. Si se obtiene una ecuación equivalente, la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto al eje y.

Origen: Reemplazar x por $-x$ y y por $-y$ en la ecuación. Si se obtiene una ecuación equivalente, la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto al origen.

EJEMPLO 6

Graficación de una ecuación determinando intersecciones y verificando la simetría.

Hacer la gráfica de la ecuación $y = x^3$. Primero encontrar las intersecciones con los ejes y verificar la simetría.

Solución Primero, buscamos las intersecciones con los ejes. Cuando $x = 0$, entonces $y = 0$; y cuando $y = 0$, entonces $x = 0$. Por tanto, el origen (0, 0) es la única intersección con los ejes. Ahora verificamos la simetría:

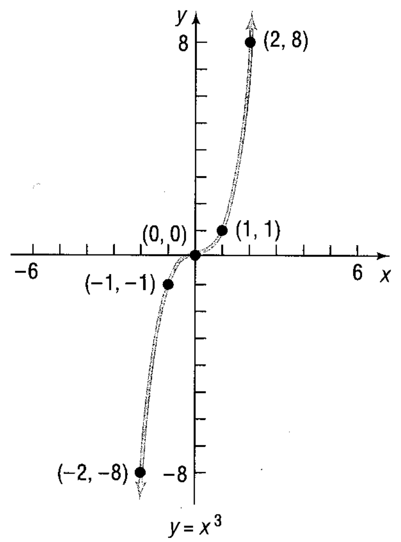
Eje x: Reemplazar y por $-y$. Como el resultado, $-y = x^3$, no es equivalente a $y = x^3$, la gráfica no es simétrica con respecto al eje x.

Eje y: Reemplazar x por $-x$. Como el resultado, $y = -x^3$, no es equivalente a $y = x^3$, la gráfica no es simétrica con respecto al eje y.

Origen: Reemplazar x por $-x$ y y por $-y$. Como el resultado, $-y = -x^3$, es equivalente a $y = x^3$, la gráfica es simétrica con respecto al origen.

Como consecuencia de la simetría, sólo necesitamos localizar puntos de la gráfica para $x \geq 0$, tales como (0, 0), (1, 1) y (2, 8). La figura 42 muestra la gráfica.

FIGURA 42
Simetría con respecto al origen



Ahora resuelva el problema 35.

EJEMPLO 7 *Graficación de una ecuación*

Hacer la gráfica de la ecuación $x = y^2$. Primero encontrar las intersecciones con los ejes y verificar la simetría.

Solución La única intersección con los ejes es (0, 0). La gráfica es simétrica con respecto al eje x. (¿Advierte por qué? remplace y por $-y$.) La figura 43 muestra la gráfica.

FIGURA 43
Simetría con respecto al eje x

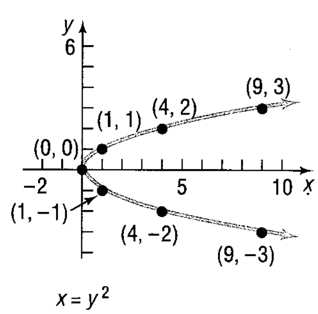
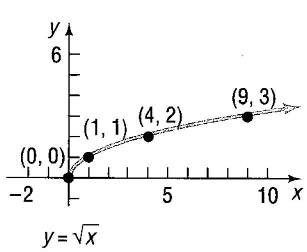


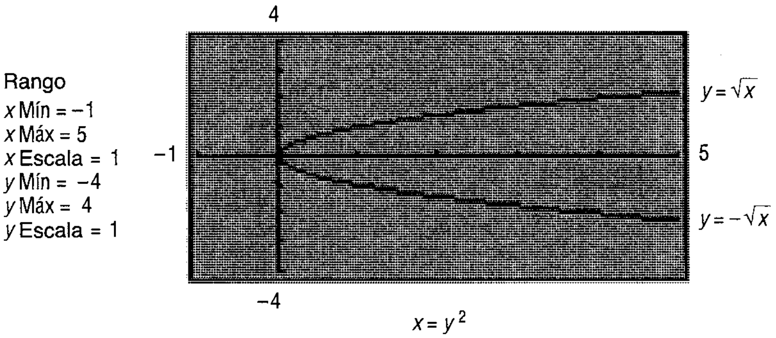
FIGURA 44
$y = \sqrt{x}$



Si restringimos y de modo que $y \geq 0$, la ecuación $x = y^2$, $y \geq 0$, puede ser escrita de manera equivalente como $y = \sqrt{x}$. Por lo tanto, la parte de la gráfica $x = y^2$ en el primer cuadrante es la gráfica de $y = \sqrt{x}$. *Véase* la figura 44.

Comentario: Para ver la gráfica de la ecuación $x = y^2$ en una calculadora gráfica, necesitaremos hacer las gráficas de dos ecuaciones, $y = \sqrt{x}$ y $y = -\sqrt{x}$. Se analizará la razón en el capítulo siguiente. *Véase* la figura 45.

FIGURA 45



EJEMPLO 8 *Graficación de una ecuación*

Hacer la gráfica de la ecuación: $y = \dfrac{1}{x}$

Primero encontrar las intersecciones con los ejes y verificar la simetría.

Solución Primero buscamos las intersecciones con los ejes. Si hacemos $x = 0$ obtenemos un 0 en el denominador, lo cual no está permitido. En consecuencia, no hay intersecciones-y. Si hacemos $y = 0$, obtenemos la ecuación $1/x = 0$, que no tiene solución. De aquí que no haya intersección-x. Por tanto, la gráfica de $y = 1/x$ no cruza los ejes de coordenadas.

Ahora verificamos la simetría:

Eje x: Reemplazando y por $-y$ se obtiene $-y = 1/x$, que no es equivalente a $y = 1/x$.

Eje y: Reemplazando x por $-x$ se obtiene $y = -1/x$, que no es equivalente a $y = 1/x$.

Origen: Reemplazando x por $-x$ y y por $-y$ se obtiene $-y = -1/x$, que sí es equivalente a $y = 1/x$.

La gráfica es simétrica con respecto al origen.

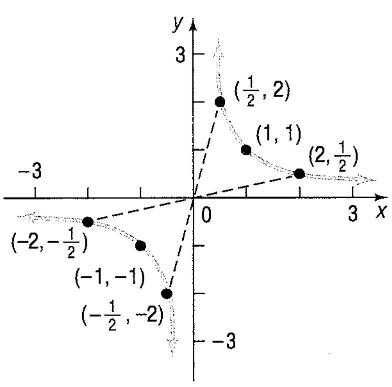
Por último, construimos la tabla 2 enlistando varios puntos de la gráfica. Como consecuencia de la simetría con respecto al origen, sólo usamos valores positivos de x. De la tabla 2 inferimos que, si x es un número positivo grande, entonces $y = 1/x$ es un número positivo cercano a cero. También podemos deducir que, si x es un número positivo cercano a cero, entonces $y = 1/x$ es un número positivo grande. Con base en esta información, podemos hacer la gráfica de la ecuación. La figura 46 ilustra algunos de estos puntos y la gráfica de $y = 1/x$. Observe cómo fue utilizada la ausencia de intersecciones con los ejes y la existencia de simetría con respecto al origen.

TABLA 2

x	$y = 1/x$	(x, y)
$\frac{1}{10}$	10	$(\frac{1}{10}, 10)$
$\frac{1}{3}$	3	$(\frac{1}{3}, 3)$
$\frac{1}{2}$	2	$(\frac{1}{2}, 2)$
1	1	$(1, 1)$
2	$\frac{1}{2}$	$(2, \frac{1}{2})$
3	$\frac{1}{3}$	$(3, \frac{1}{3})$
10	$\frac{1}{10}$	$(10, \frac{1}{10})$

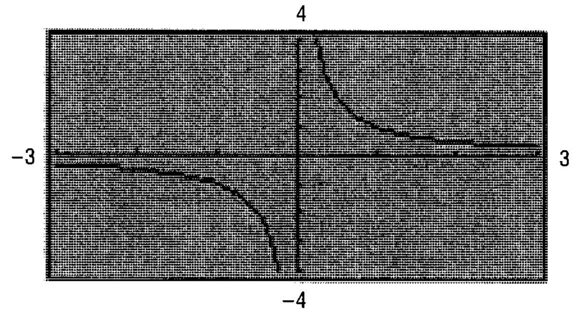
FIGURA 46

$y = \dfrac{1}{x}$



Comentario: La figura 47 muestra la gráfica de $y = 1/x$ utilizando un dispositivo de graficación. De la gráfica inferimos que no hay intersecciones con los ejes. También podemos conjeturar que hay simetría con respecto al origen. La función TRACE proporciona más evidencia de esta simetría. Conforme la gráfica se va trazando se obtienen los puntos $(-x, -y)$ y (x, y). Por ejemplo, la pareja de puntos $(-0.95238, -1.05)$ y $(0.95238, 1.05)$ pertenecen a la gráfica.

FIGURA 47
$y = \dfrac{1}{x}$



$y = \frac{1}{x}$

Ahora resuelva el problema 77.

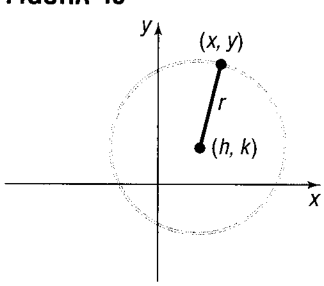
Círculos

Una de las ventajas de un sistema de coordenadas es que nos permite traducir un enunciado geométrico en uno algebraico, y viceversa. Por ejemplo, considere el siguiente enunciado geométrico que define un círculo.

Círculo

Un **círculo** es un conjunto de puntos en el plano *xy* que están a una distancia fija, *r*, de un punto fijo (h, k). La distancia fija *r* es llamada **radio,** y el punto fijo (h, k) es el **centro** del círculo.

FIGURA 48



La figura 48 muestra la gráfica de un círculo. ¿Hay una ecuación que tenga esta gráfica? Siendo así, ¿cuál es esa ecuación? Para encontrarla, hacemos que (x, y) represente las coordenadas de cualquier punto en el círculo con radio r y centro en (h, k). Entonces la distancia entre los puntos (x, y) y (h, k) siempre debe ser igual a r. Esto es, por la fórmula de distancia,

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

o, de manera equivalente,

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

La **forma estándar de la ecuación de un círculo** con radio r y centro (h, k) es

Forma estándar de la ecuación de un círculo

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad (3)$$

De igual manera, invirtiendo los pasos, concluimos: la gráfica de cualquier ecuación de la forma de la ecuación (3) es un círculo con radio r y centro (h, k).

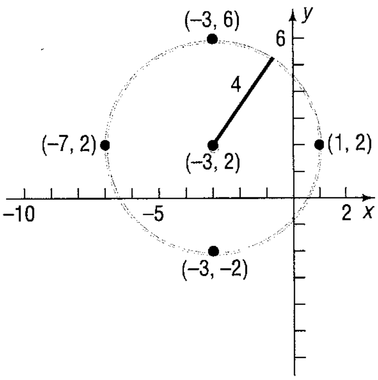
EJEMPLO 9 *Graficación de un círculo*

Hacer la gráfica de la ecuación: $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$

Solución Comparando la ecuación dada con la forma estándar de la ecuación de un círculo, concluimos que la gráfica de la ecuación dada es un círculo. Además, la comparación da información acerca del círculo:

$$\begin{aligned}(x + 3)^2 + (y - 2)^2 &= 16\\ [x - (-3)]^2 + (y - 2)^2 &= 4^2\\ (x - h)^2 + (y - k)^2 &= r^2\end{aligned}$$

FIGURA 49



Vemos que $h = -3$, $k = 2$, y $r = 4$. En consecuencia, el círculo tiene centro en $(-3, 2)$ y un radio de 4 unidades. Para trazar este círculo primero marcamos el centro $(-3, 2)$. Como el radio es 4, localizamos cuatro puntos sobre el círculo al ir 4 unidades a la izquierda, a la derecha, hacia arriba y hacia abajo del centro. Estos cuatro puntos pueden ser utilizados como guías para obtener la gráfica. *Véase* la figura 49.

Ahora resuelva el problema 61.

Comentario: Lea la sección B.4, Pantallas cuadradas, en el apéndice B.

EJEMPLO 10 *Uso de un dispositivo de graficación para trazar un círculo*

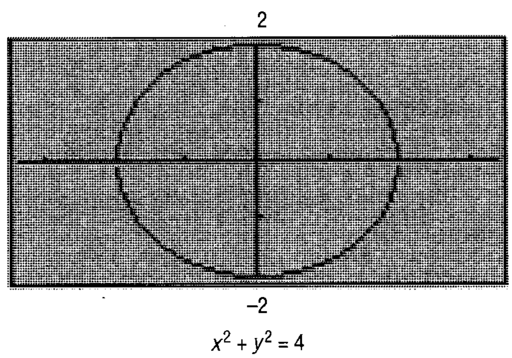
Hacer la gráfica de la ecuación: $x^2 + y^2 = 4$

Solución Esta es la ecuación de un círculo con centro en el origen y radio 2. Para hacer su gráfica primero debemos resolver para y.

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 4\\ y^2 &= 4 - x^2\\ y &= \pm\sqrt{4 - x^2}\end{aligned}$$

Debemos hacer las gráficas de dos ecuaciones: primero haremos la gráfica de $y = \sqrt{4 - x^2}$ y después $y = -\sqrt{4 - x^2}$ en la misma pantalla cuadrada. (Su círculo parecerá óvalo si no utiliza una pantalla cuadrada.) *Véase* la figura 50.

FIGURA 50
$x^2 + y^2 = 4$



EJEMPLO 11 *Forma estándar de la ecuación de un círculo*

Escribir la forma estándar de la ecuación del círculo con radio 3 y centro $(1, -2)$.

Solución Usando la forma de la ecuación (3) y sustituyendo los valores $r = 3$, $h = 1$, y $k = -2$, tenemos

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$
$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$$

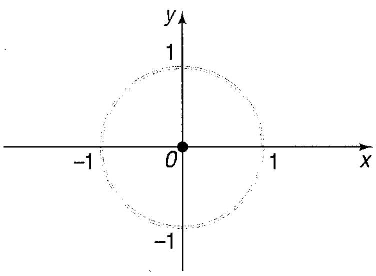
La forma estándar de la ecuación de un círculo de radio r con centro en el origen (0, 0), es

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

Si el radio es igual a uno, el círculo cuyo centro está en el origen es llamado **círculo unitario** y tiene la ecuación

$$\boxed{x^2 + y^2 = 1}$$

FIGURA 51
Círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$



Véase la figura 51.

Si eliminamos los paréntesis en la forma estándar de la ecuación de un círculo obtenida en el ejemplo 11, tenemos

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 9$$

que encontramos, después de simplificar, que es equivalente a

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

Completando los cuadrados en los términos de x y de y, puede demostrarse que cualquier ecuación de la forma

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

tiene una gráfica que es un círculo, un punto o que no representa ninguna gráfica. Por ejemplo, la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 0$ es el único punto (0, 0). La ecuación $x^2 + y^2 + 5 = 0$, o $x^2 + y^2 = -5$, no tiene gráfica, ya que la suma de cuadrados de números reales nunca es negativa. Cuando su gráfica es un círculo, la ecuación

Forma general de la ecuación de un círculo

$$\boxed{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0}$$

recibe el nombre de **forma general de la ecuación de un círculo.**

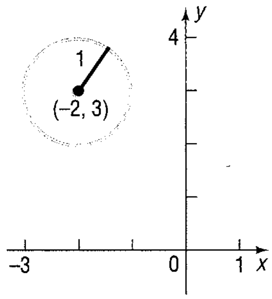
Ahora resuelva el problema 45.

El siguiente ejemplo muestra cómo transformar una ecuación que está en la forma general en una ecuación equivalente que tenga forma estándar. Como dijimos antes, la idea es utilizar el método de completar cuadrados en los términos x y y.

EJEMPLO 12 *Graficación de un círculo cuya ecuación está en la forma general*

Hacer la gráfica de la ecuación: $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$

FIGURA 52
$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$



Solución Reacomodamos la ecuación como sigue:

$$(x^2 + 4x) + (y^2 - 6y) = -12$$

Ahora, completamos el cuadrado de cada expresión entre paréntesis. Recuerde que cualquier número que se sume del lado izquierdo también debe sumarse del lado derecho:

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = -12 + 4 + 9$$
$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$$

Reconocemos esta ecuación como la forma estándar de la ecuación de un círculo con radio 1 y centro $(-2, 3)$. La figura 52 ilustra la gráfica.

Ahora resuelva el problema 63.

Ejercicio 1.6

En los problemas 1 y 2 marque cada punto en el plano xy. Diga en qué cuadrante o en qué eje coordenado está cada punto.

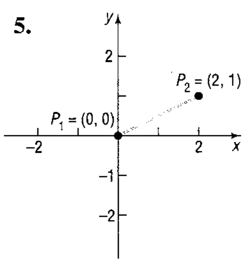
1. (a) $A = (-3, 2)$ (b) $B = (6, 0)$ (c) $C = (-2, -2)$
(d) $D = (6, 5)$ (e) $E = (0, -3)$ (f) $F = (6, -3)$

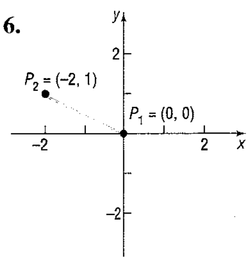
2. (a) $A = (1, 4)$ (b) $B = (-3, -4)$ (c) $C = (-3, 4)$
(d) $D = (4, 1)$ (e) $E = (0, 1)$ (f) $F = (-3, 0)$

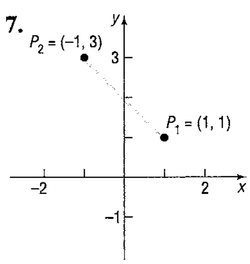
3. Marque los puntos (2, 0), (2, −3), (2, 4), (2, 1) y (2, −1). Describa el conjunto de todos los puntos de la forma $(2, y)$, donde y es un número real.

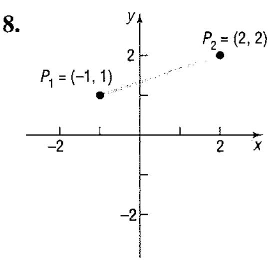
4. Marque los puntos (0, 3), (1, 3), (−2, 3), (5, 3) y (−4, 3). Describa todos los puntos de la forma $(x, 3)$, donde x es un número real.

En los problemas del 5 al 10 encuentre la distancia $d(P_1, P_2)$ entre los puntos P_1 y P_2. También encuentre el punto medio del segmento de recta que une a P_1 y P_2.

5.


6.


7.


8.


9. $P_1 = (3, -4)$; $P_2 = (3, 1)$

10. $P_1 = (-1, 0)$; $P_2 = (2, 1)$

11. $P_1 = (-3, 2)$; $P_2 = (6, 0)$

12. $P_1 = (2, -3)$; $P_2 = (4, 2)$

13. $P_1 = (4, -3)$; $P_2 = (6, 1)$

14. $P_1 = (-4, -3)$; $P_2 = (2, 2)$

15. $P_1 = (-0.2, 0.3)$; $P_2 = (2.3, 1.1)$

16. $P_1 = (1.2, 2.3)$; $P_2 = (-0.3, 1.1)$

17. $P_1 = (a, b)$; $P_2 = (0, 0)$

18. $P_1 = (a, a)$; $P_2 = (0, 0)$

En los problemas del 19 al 22, marque cada punto y forme un triángulo ABC. Verifique si el triángulo es un triángulo rectángulo y encuentre su área.

19. $A = (-2, 5)$; $B = (1, 3)$; $C = (-1, 0)$

20. $A = (-2, 5)$; $B = (12, 3)$; $C = (10, -11)$

21. $A = (-5, 3)$; $B = (6, 0)$; $C = (5, 5)$

22. $A = (-6, 3)$; $B = (3, -5)$; $C = (-1, 5)$

23. Encuentre todos los puntos que tengan coordenada x igual a 2 y cuya distancia al punto $(-2, 1)$ sea 5.

24. Encuentre todos los puntos que tengan coordenada y igual a -3 y cuya distancia al punto $(1, 2)$ sea 13.

25. Encuentre todos los puntos sobre el eje x que estén a 5 unidades del punto $(2, -3)$.

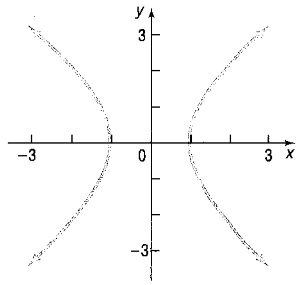
26. Encuentre todos los puntos sobre el eje y que estén a 5 unidades del punto $(-4, 4)$.

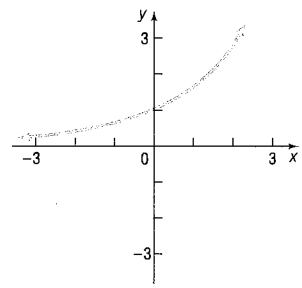
En los problemas del 27 al 34 marque cada punto y su simétrico con respecto:
(a) Al eje x *(b) Al eje y* *(c) Al origen*

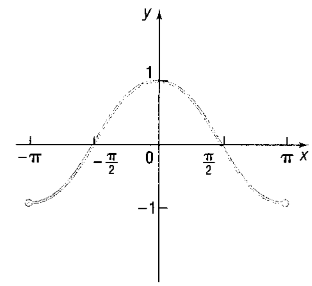
27. $(3, 4)$ **28.** $(5, 3)$ **29.** $(-2, 1)$ **30.** $(4, -2)$

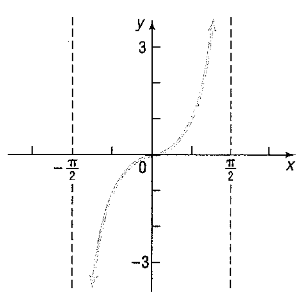
31. $(1, 1)$ **32.** $(-1, -1)$ **33.** $(-3, -4)$ **34.** $(4, 0)$

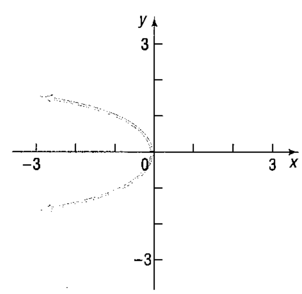
En los problemas del 35 al 44 se da la gráfica de una ecuación.
(a) Enliste las intersecciones con los ejes de cada gráfica.
(b) Diga si cada gráfica es simétrica con respecto al eje x, al eje y y/o al origen.

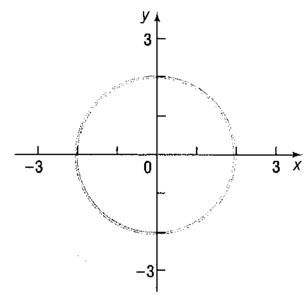
35.


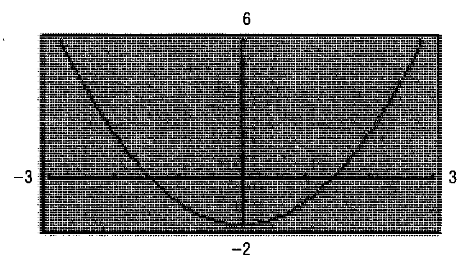
36.


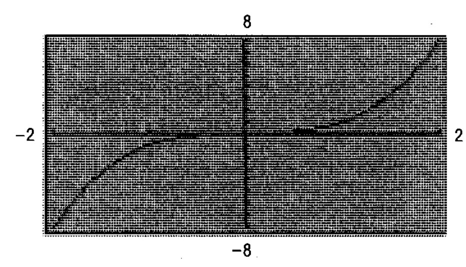
37.


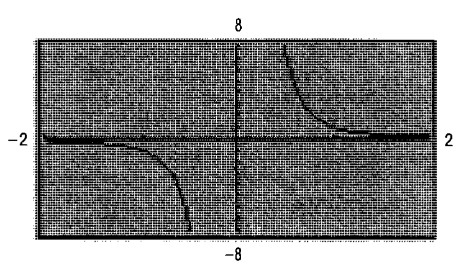
38.


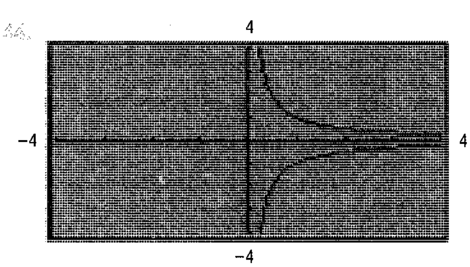
39.


40.


41.


42.


43.


44.


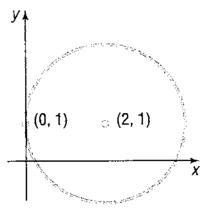
En los problemas del 45 al 50, escriba la forma estándar de la ecuación y la forma general de la ecuación de cada círculo de radio r y centro (h, k).

45. $r = 2$; $(h, k) = (0, 2)$ **46.** $r = 3$; $(h, k) = (1, 0)$ **47.** $r = 5$; $(h, k) = (4, -3)$

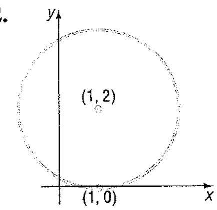
48. $r = 4$; $(h, k) = (2, -3)$ **49.** $r = 2$; $(h, k) = (0, 0)$ **50.** $r = 3$; $(h, k) = (0, 0)$

En los problemas del 51 al 54 encuentre el centro y el radio de cada círculo. Escriba la forma estándar de la ecuación.

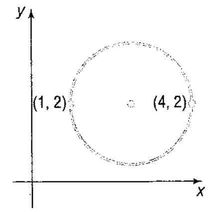
51.



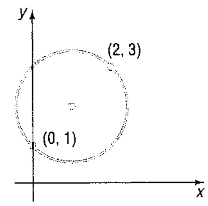
52.



53.



54.

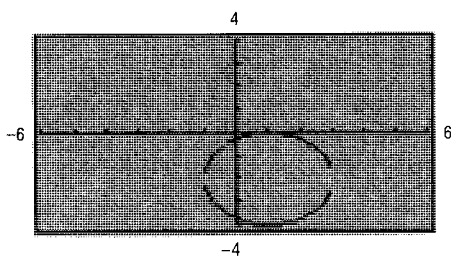


En los problemas del 55 al 58 relacione cada gráfica con la ecuación correcta.

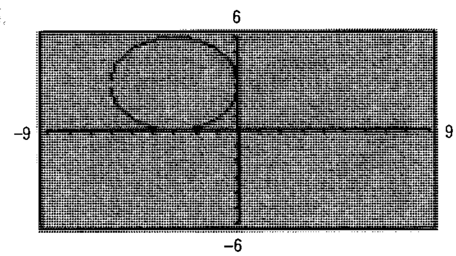
(a) $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$ *(c)* $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$

(b) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ *(d)* $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$

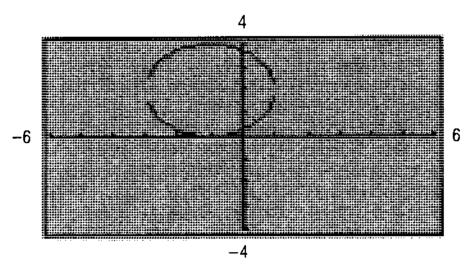
55.



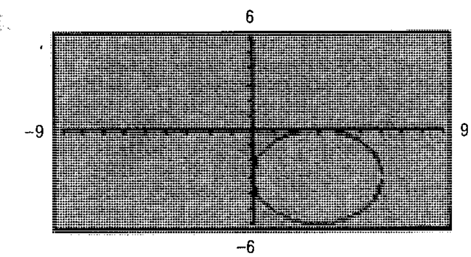
56.



57.



58.



En los problemas del 59 al 68, encuentre el centro (h, k) y el radio r de cada círculo. Haga la gráfica del círculo.

59. $x^2 + y^2 = 4$ **60.** $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ **61.** $(x - 3)^2 + y^2 = 4$

62. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$ **63.** $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$ **64.** $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$

65. $x^2 + y^2 - x + 2y + 1 = 0$ **66.** $x^2 + y^2 + x + y - \frac{1}{2} = 0$ **67.** $2x^2 + 2y^2 - 12x + 8y - 24 = 0$

68. $2x^2 + 2y^2 + 8x + 7 = 0$

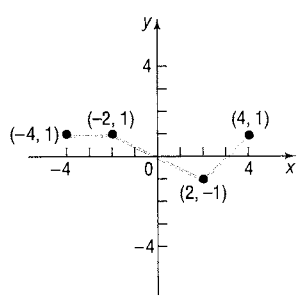
En los problemas del 69 al 72, utilice la gráfica anexa.

69. Extienda la gráfica para hacerla simétrica con respecto al eje x.

70. Extienda la gráfica para hacerla simétrica con respecto al eje y.

71. Extienda la gráfica para hacerla simétrica con respecto al origen.

72. Extienda la gráfica para hacerla simétrica con respecto al eje x, al eje y y al origen.



En los problemas del 73 al 86, enliste las intersecciones con los ejes y verifique la simetría.

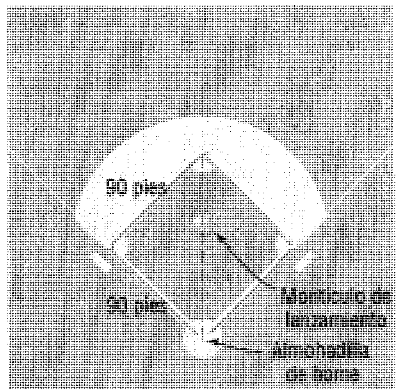
73. $x^2 = y$ **74.** $y^2 = x$ **75.** $y = 3x$ **76.** $y = -5x$

77. $x^2 + y - 9 = 0$ **78.** $y^2 - x - 4 = 0$ **79.** $4x^2 + 9y^2 = 36$ **80.** $x^2 + 4y^2 = 4$

81. $y = x^3 - 27$ **82.** $y = x^4 - 1$ **83.** $y = x^2 - 3x - 4$ **84.** $y = x^2 + 4$

85. $y = \dfrac{x}{x^2 + 9}$ **86.** $y = \dfrac{x^2 - 4}{x}$

87. *Béisbol.* En el juego de béisbol, el "diamante" en realidad es un cuadrado de 90 pies por lado (*véase* la figura). Sobreponiendo un sistema de coordenadas en el diamante de manera que el origen esté en el *home*, la dirección positiva del eje x en la dirección de *home* a primera base, y la dirección positiva del eje y apunte del *home* a la tercera base:
(a) ¿Cuáles son las coordenadas de la primera, segunda y tercera bases? Utilice pies como la unidad de medida.
(b) Si el jardinero derecho está ubicado en (310, 15), ¿a qué distancia está de la segunda base?
(c) Si el jardinero central está en (300, 300), ¿a qué distancia está de la tercera base?

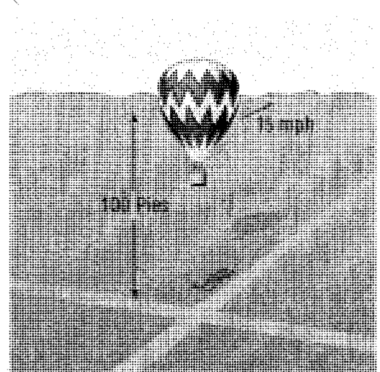


88. *Liga infantil de béisbol.* La disposición de un campo de béisbol de liga infantil es un cuadrado de 60 pies por lado.* Sobreponiendo un sistema rectangular sobre el diamante de modo que el origen esté en el *home*, el sentido positivo del eje x esté en la dirección de *home* a primera base, y la dirección positiva del eje y vaya de *home* a la tercera base:

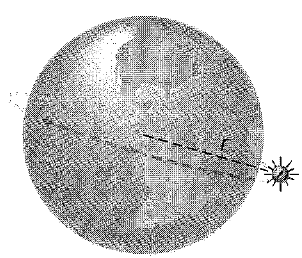
(a) ¿Cuáles son las coordenadas de la primera, segunda y tercera bases? Utilice pies como la unidad de medida.
(b) Si el jardinero derecho está ubicado en (180, 20), ¿a qué distancia está de la segunda base?
(c) Si el jardinero central está ubicado en (220, 220), ¿a qué distancia está de la tercera base?

89. Un automóvil y un camión pasan por una intersección al mismo tiempo. El automóvil va rumbo al este a una velocidad promedio de 40 millas por hora, mientras que el camión va hacia el sur a una velocidad promedio de 30 millas por hora. Encuentre una expresión para la distancia entre estos vehículos d (en millas) después de t horas.

90. Un globo aerostático que va hacia el este, a una velocidad promedio de 15 millas por hora y altitud constante de 100 pies, pasa sobre una intersección (véase la figura). Encuentre una expresión para la distancia d (medida en pies) del globo a la intersección t segundos después.



91. La Tierra está representada en un mapa de una parte del Sistema solar de modo que su superficie es el círculo con ecuación $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4091 = 0$. Un satélite da vueltas alrededor de la Tierra 0.6 unidades por arriba de ella con el centro de su órbita circular en el centro del planeta. Encuentre la ecuación para la órbita del satélite en ese mapa.



**Fuente: Little League Baseball, Official Regulations and Playing Rules,* 1991.

En el problema 92 puede utilizar una calculadora gráfica, pero en realidad no se necesita.

92. (a) Haga la gráfica de $y = \sqrt{x^2}$, $y = x$, $y = |x|$, y $y = (\sqrt{x})^2$, tome nota de cuáles gráficas son iguales.
(b) Explique por qué las gráficas de $y = \sqrt{x^2}$ y $y = |x|$ son iguales.
(c) Explique por qué las gráficas de $y = x$ y $y = (\sqrt{x})^2$ no son iguales.
(d) Explique por qué las gráficas de $y = \sqrt{x^2}$ y $y = x$ no son iguales.

93. Construya una ecuación con intersecciones (2, 0), (4, 0) y (0, 1). Compare su ecuación con la de un compañero y comente sus semejanzas.

94. Se está verificando la simetría de una ecuación con respecto al eje x, al eje y y al origen. Explique por qué, si dos de estas simetrías están presentes, la restante debe estarlo también.

95. Dibuje una gráfica que contenga los puntos $(-2, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$ y $(3, 5)$. Compare su gráfica con las gráficas de otros estudiantes. ¿Son la mayoría líneas rectas? ¿Cuántas están curvas? Analice las diferentes maneras en que podrían ser conectados los puntos.

La parábola

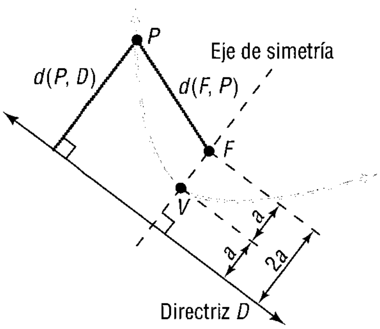
Establecimos anteriormente (sección 3.1) que la gráfica de una función cuadrática es una parábola. En esta sección, empezaremos con una definición geométrica de parábola y la usaremos para obtener una ecuación.

Parábola

Una **parábola** se define como el conjunto de todos los puntos P en el plano que están a la misma distancia de un punto fijo F y de una recta fija D. El punto F es llamado foco de la parábola; la recta D es la **directriz** de la parábola. Como consecuencia, una parábola es el conjunto de puntos P para los cuales

$$d(F, P) = d(P, D) \qquad (1)$$

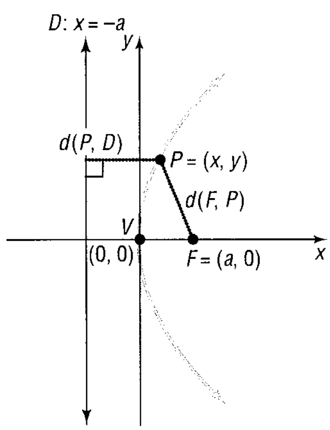
FIGURA 3



La figura 3 muestra una parábola. La recta que pasa por el foco F y es perpendicular a la directriz D es llamada **eje de simetría.** El punto de intersección de la parábola con su eje de simetría es llamado **vértice** V.

Ya que el vértice V pertenece a la parábola, debe satisfacer la ecuación (1): $d(F, V) = d(V, D)$. Así, el vértice es el punto medio entre el foco y la directriz. Hacemos a igual a la distancia $d(F, V)$ de F a V. Ahora estamos preparados para deducir la ecuación de una parábola. Para hacer esto, usamos un sistema de coordenadas rectangulares, colocado de modo que el vértice V, el foco F y la directriz D de la parábola estén ubicados de manera adecuada. Si ubicamos al vértice F en el origen $(0, 0)$, entonces podremos colocar al foco F en cualquiera de los ejes x o y.

FIGURA 4
$y^2 = 4ax$



Primero, consideremos el caso cuando el foco F está sobre la parte positiva del eje x, como se muestra en la figura 4. Dado que la distancia desde F hasta V es a, las coordenadas de F serán $(a, 0)$ con $a > 0$. De manera análoga, ya que la distancia desde V a la directriz D también es a y como D debe ser perpendicular al eje x (ya que es el eje de simetría), la ecuación de la directriz D debe ser $x = -a$. Ahora, si $P = (x, y)$ es cualquier punto en la parábola, entonces P debe satisfacer la ecuación (1):

$$d(F, P) = d(P, D)$$

De esta manera tenemos

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-a)^2 + y^2} &= |x + a| && \text{Usar el fórmula de distancia.} \\ (x-a)^2 + y^2 &= (x+a)^2 && \text{Elevar al cuadrado ambos lados.} \\ x^2 - 2ax + a^2 + y^2 &= x^2 + 2ax + a^2 \\ y^2 &= 4ax \end{aligned}$$

Teorema

La ecuación de una parábola con vértice en $(0, 0)$, foco en $(a, 0)$ y directriz $x = -a$, $a > 0$, es

Ecuación de una parábola; vértice en $(0, 0)$, foco en $(a, 0)$, $a > 0$

$$y^2 = 4ax \qquad (2)$$

EJEMPLO 1 *Determinación de la ecuación de una parábola*

Encontrar la ecuación de la parábola con vértice en (0, 0) y foco en (3, 0). Trazar la gráfica de la ecuación.

Solución La distancia desde el vértice (0, 0) al foco (3, 0) es $a = 3$. Con base en la ecuación (2), la ecuación de esta parábola es

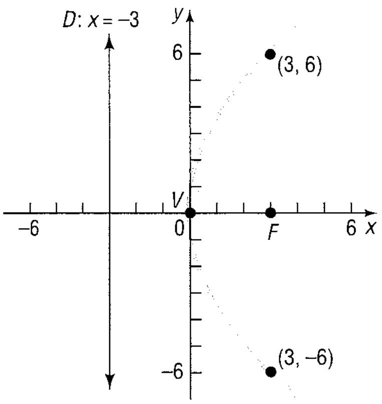
$$y^2 = 4ax$$
$$y^2 = 12x$$

Para trazar la gráfica de esta parábola resulta útil trazar los dos puntos en la gráfica arriba y abajo del foco. Para localizarlos, hacemos $x = 3$. Entonces

$$y^2 = 12x = 36$$
$$y = \pm 6$$

Los puntos en la parábola arriba y abajo del foco son (3, −6) y (3, 6). *Véase* la figura 5.

FIGURA 5
$y^2 = 12x$



En general, los puntos en la parábola $y^2 = 4ax$ que están arriba y abajo del foco $(a, 0)$, quedan cada uno a una distancia de $2a$ del foco. Esto se deduce de que si $x = a$ entonces $y^2 = 4ax = 4a^2$, o $y = \pm 2a$. El segmento de recta que une a estos dos puntos es llamado **lado recto;** su longitud es $4a$.

Comentario: Para trazar la gráfica de la parábola $y^2 = 12x$ analizada en el ejemplo 1, necesitamos trazar la gráfica de las dos funciones $y = \sqrt{12x}$ y $y = -\sqrt{12x}$. Hágalo y compare su resultado con la figura 5.

Ahora resuelva el problema 9.

Al invertir los pasos usados para obtener la ecuación (2), se concluye que la gráfica de una ecuación con esta forma es una parábola; su vértice está en (0, 0), su foco en $(a, 0)$, su directriz es la recta $x = -a$, y su eje de simetría es el eje x.

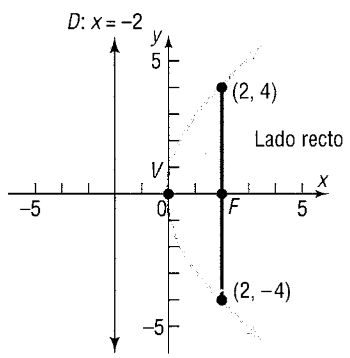
Para el resto de esta sección, la instrucción "Analizar la ecuación" significará encontrar el vértice, el foco, la directriz de la parábola y trazar su gráfica.

EJEMPLO 2 *Análisis de la ecuación de una parábola*

Analizar la ecuación: $y^2 = 8x$

Solución La ecuación $y^2 = 8x$ es de la forma $y^2 = 4ax$, donde $4a = 8$. Así, $a = 2$. En consecuencia, la gráfica de la ecuación es una parábola con vértice en (0, 0) y foco sobre la parte positiva del eje x en (2, 0). La directriz es la recta vertical $x = -2$. Los dos puntos que definen el lado recto se obtienen haciendo $x = 2$. Entonces $y^2 = 16$, o $y = \pm 4$. Estos puntos ayudan a trazar la gráfica de la parábola, ya que determinan la *abertura* de la gráfica. *Véase* la figura 6.

FIGURA 6
$y^2 = 8x$

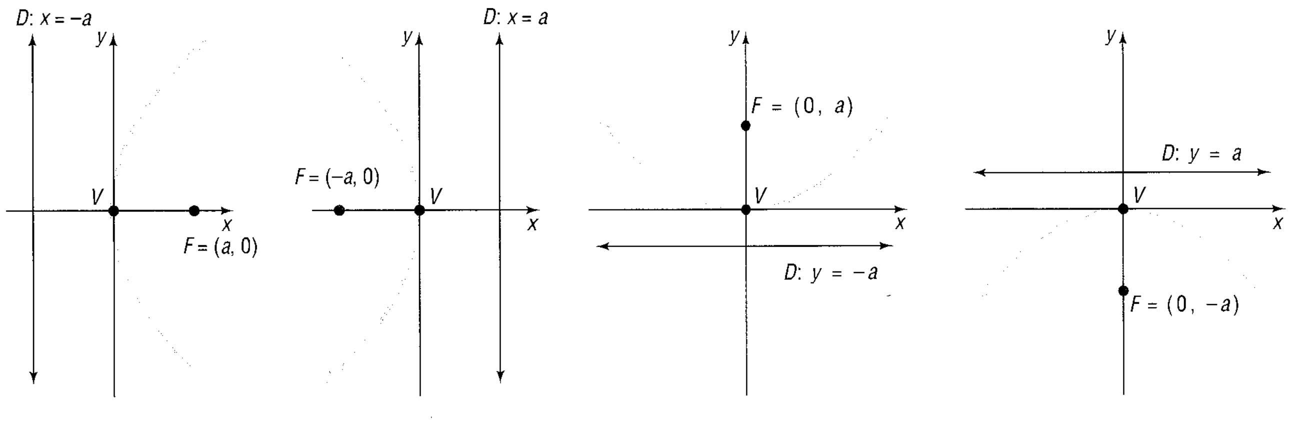


Recuerde que llegamos a la ecuación (2) después de colocar el foco sobre la parte positiva del eje x. Si el foco es colocado en la parte negativa del eje x, en la parte positiva del eje y o en su parte negativa, se obtiene una forma diferente de la ecuación para la parábola. Las cuatro formas de la ecuación de una parábola con vértice en un eje de coordenadas a una distancia a del origen (0, 0) están dadas en la tabla 1, y sus gráficas se aprecian en el figura 7. Obsérvese que cada gráfica es simétrica respecto a su eje de simetría.

TABLA 1 ECUACIONES DE UNA PARÁBOLA: VERTICE EN (0, 0); FOCO EN EL EJE; $a > 0$

VÉRTICE	FOCO	DIRECTRIZ	ECUACIÓN	DESCRIPCIÓN
(0, 0)	$(a, 0)$	$x = -a$	$y^2 = 4ax$	Parábola, el eje de simetría es el eje x, abre hacia la derecha
(0, 0)	$(-a, 0)$	$x = a$	$y^2 = -4ax$	Parábola, el eje de simetría es el eje x, abre hacia la izquierda
(0, 0)	$(0, a)$	$y = -a$	$x^2 = 4ay$	Parábola, el eje de simetría es el eje y, abre hacia arriba
(0, 0)	$(0, -a)$	$y = a$	$x^2 = -4ay$	Parábola, el eje de simetría es el eje y, abre hacia abajo

FIGURA 7



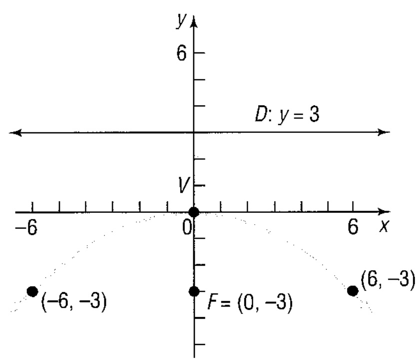
(a) $y^2 = 4ax$ (b) $y^2 = -4ax$ (c) $x^2 = 4ay$ (d) $x^2 = -4ay$

EJEMPLO 3 *Análisis de la ecuación de una parábola*

Analizar la ecuación: $x^2 = -12y$

Solución La ecuación $x^2 = -12y$ es de forma $x^2 = -4ay$, con $a = 3$. En consecuencia, la gráfica de la ecuación es una parábola con vértice en (0, 0), foco en (0, −3) y cuya directriz es la recta $y = 3$. La parábola abre hacia abajo y su eje de simetría es el eje y. Para obtener los puntos que definen el lado recto hacemos $y = -3$. Entonces $x^2 = 36$, o $x = \pm 6$. *Véase* la figura 8.

FIGURA 8
$x^2 = -12y$



Ahora resuelva el problema 27.

EJEMPLO 4 *Determinación de la ecuación de una parábola*

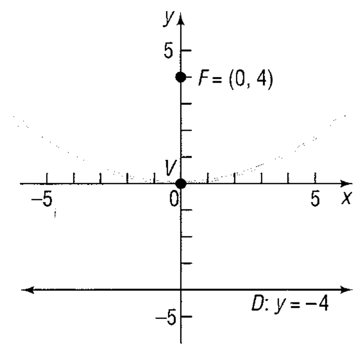
Encontrar la ecuación de la parábola con foco en (0, 4) y directriz $y = -4$. Trazar la gráfica de la ecuación.

Solución Una parábola con foco en (0, 4) y cuya directriz es la recta horizontal $y = -4$, tendrá su vértice en (0, 0). (¿Advierte por qué? Porque el vértice está a la mitad de la distancia entre el foco y la directriz.) Así, la ecuación de esta parábola es de la forma $x^2 = 4ay$, con $a = 4$; esto es,

$$x^2 = 16y$$

La figura 9 muestra la gráfica.

FIGURA 9
$x^2 = 16y$



EJEMPLO 6 *Determinación de la ecuación de una parábola*

Encontrar la ecuación de una parábola con vértice en (0, 0) si su eje de simetría es el eje x y su gráfica contiene al punto $(-\frac{1}{2}, 2)$. Encontrar su foco y directriz, y trazar la gráfica de la ecuación.

Solución Ya que el vértice está en el origen y el eje de simetría es el eje x, vemos de la tabla 1 que la forma de la ecuación es

$$y^2 = kx$$

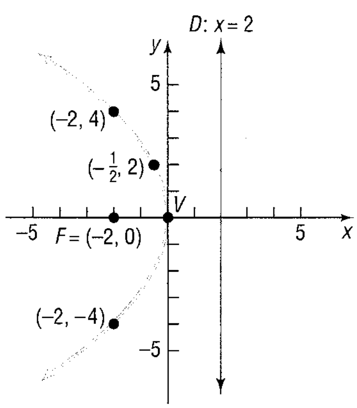
Como el punto $(-\frac{1}{2}, 2)$ está en la parábola, las coordenadas $x = -\frac{1}{2}$, $y = 2$, deben satisfacer la ecuación. Poniendo $x = -\frac{1}{2}$ y $y = 2$ en la ecuación, encontramos

$$4 = k(-\tfrac{1}{2})$$
$$k = -8$$

Así, la ecuación de la parábola es

$$y^2 = -8x$$

FIGURA 10
$y^2 = -8x$



Al comparar esta ecuación con $y^2 = -4ax$, encontramos que $a = 2$. Por lo tanto, el foco está en $(-2, 0)$, y la directriz es la recta $x = 2$. Haciendo $x = -2$, encontramos $y^2 = 16$ o $y = \pm 4$. Los puntos $(-2, 4)$ y $(-2, -4)$ definen el lado recto. *Véase* la figura 10.

Ahora resuelva el problema 19.

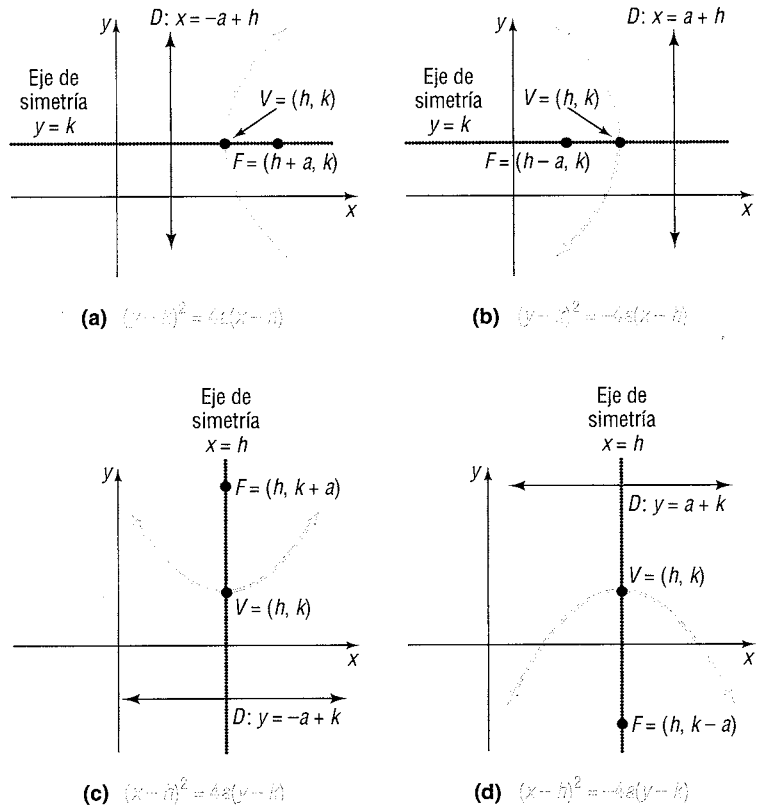
Vértice en (h, k)

Si una parábola con vértice en el origen y eje de simetría a lo largo de uno de los ejes de coordenadas es recorrida h unidades horizontalmente y luego k unidades verticalmente, el resultado será una parábola con vértice en (h, k) y eje de simetría paralelo a un eje de coordenadas. Las ecuaciones de tales parábolas tienen la misma forma que las de la tabla 1, pero con x reemplazada por $x - h$ y y reemplazada por $y - k$. La tabla 2 nos da las formas de las ecuaciones de tales parábolas. La figura 11 ilustra las gráficas para $h > 0$, $k > 0$.

TABLA 2 PARÁBOLAS CON VÉRTICE EN (h, k), EJE DE SIMETRÍA PARALELO A UNO DE LOS EJES DE COORDENADAS, $a > 0$

VÉRTICE	FOCO	DIRECTRIZ	ECUACIÓN	DESCRIPCIÓN
(h, k)	$(h + a, k)$	$x = -a + h$	$(y-k)^2 = 4a(x - h)$	Parábola, eje de simetría paralelo al eje x, abre hacia la derecha
(h, k)	$(h - a, k)$	$x = a + h$	$(y - k)^2 = -4a(x - h)$	Parábola, eje de simetría paralelo al eje x, abre hacia la izquierda
(h, k)	$(h, k + a)$	$y = -a + k$	$(x - h)^2 = 4a(y - k)$	Parábola, eje de simetría paralelo al eje y, abre hacia arriba
(h, k)	$(h, k - a)$	$y = a + k$	$(x - h)^2 = -4a(y - k)$	Parábola, eje de simetría paralelo al eje y, abre hacia abajo

FIGURA 11



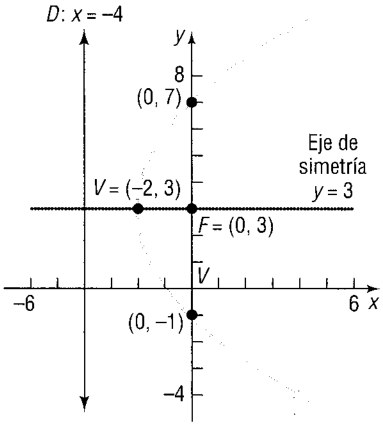
EJEMPLO 6 *Determinación de la ecuación de una parábola con vértice fuera del origen*

Encontrar una ecuación de la parábola con vértice en $(-2, 3)$ y foco en $(0, 3)$. Trazar la gráfica de la ecuación.

Solución El vértice $(-2, 3)$ y el foco $(0, 3)$ están en la recta horizontal $y = 3$ (el eje de simetría). La distancia a desde $(-2, 3)$ hasta $(0, 3)$ x es $a = 2$. También, ya que el foco está a la derecha del vértice, sabemos que la parábola abre hacia la derecha. En consecuencia, la forma de la ecuación es

$$(y - k)^2 = 4a(x - h)$$

FIGURA 12
$(y-3)^2 = 8(x+2)$



donde $(h, k) = (-2, 3)$ y $a = 2$. Por lo tanto, la ecuación es

$$(y-3)^2 = 4 \cdot 2[x-(-2)]$$
$$(y-3)^2 = 8(x+2)$$

Si $x = 0$, entonces $(y-3)^2 = 16$. Así, $y - 3 = \pm 4$ y $y = -1$, $y = 7$. Los puntos $(0, -1)$ y $(0, 7)$ definen el lado recto; la recta $x = -4$ es la directriz. *Véase* la figura 12.

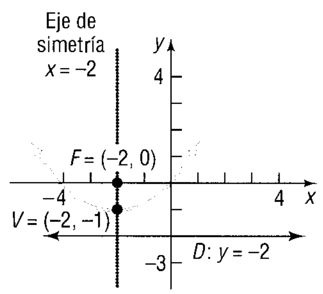
Ahora resuelva el problema 17.

Una ecuación polinomial define una parábola si tiene dos variables, es cuadrática en una de las variables y lineal en la otra. Para analizar este tipo de ecuación, primero completamos el cuadrado de la variable al cuadrado.

EJEMPLO 7 Análisis de la ecuación de una parábola

Analizar la ecuación: $x^2 + 4x - 4y = 0$

FIGURA 13
$x^2 + 4x - 4y = 0$



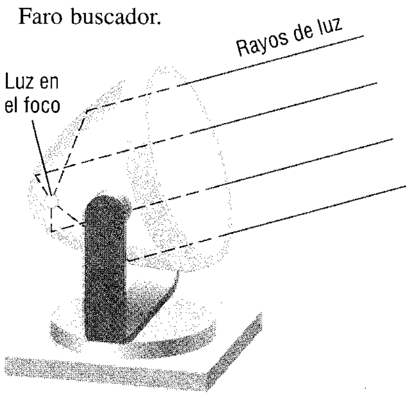
Solución Para analizar la ecuación $x^2 + 4x - 4y = 0$, completamos el cuadrado que involucra la variable x. Así,

$$x^2 + 4x - 4y = 0$$
$$x^2 + 4x = 4y \quad \text{Aísle en el lado izquierdo los términos que tienen } x$$
$$x^2 + 4x + 4 = 4y + 4 \quad \text{Complete el cuadrado del lado izquierdo.}$$
$$(x+2)^2 = 4(y+1)$$

Esta ecuación es de la forma $(x-h)^2 = 4a(y-k)$, con $h = -2$, $k = -1$, y $a = 1$. La gráfica es una parábola con vértice en $(h, k) = (-2, -1)$ que abre hacia arriba. El foco está en $(-2, 0)$, y la directriz es la recta $y = -2$. *Véase* la figura 13.

Las parábolas, por su forma, se encuentran en muchas aplicaciones. Por ejemplo, como estudiamos en la sección 5.1, los cables que sostienen los puentes colgantes adquieren la forma de una parábola. Otra cualidad importante de las parábolas, usada en las aplicaciones, es su propiedad de reflexión.

FIGURA 14
Faro buscador.

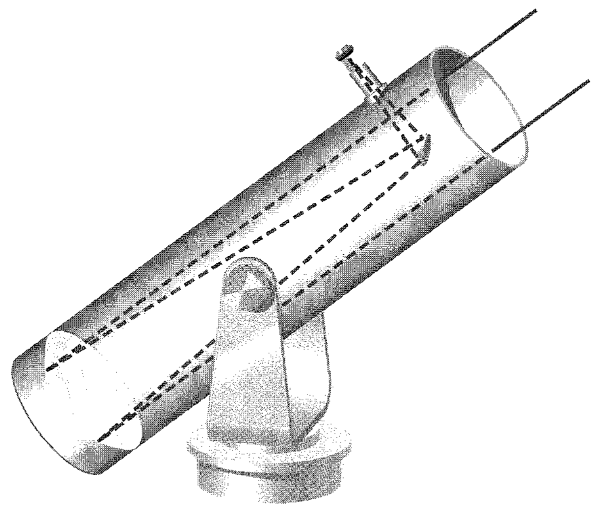


Propiedad de reflexión

Suponga que tenemos un espejo con forma de **paraboloide de revolución,** una superficie formada al girar una parábola alrededor de su eje de simetría. Si una fuente de luz (o cualquier otra fuente emisora) es colocada en el foco de la parábola, todos los rayos que emanen de ahí se reflejarán en el espejo en líneas paralelas al eje de simetría. Este principio es usado en el diseño de faros buscadores, lámparas de flash para fotografía, ciertos faros de automóviles y otros dispositivos parecidos. *Véase* la figura 14.

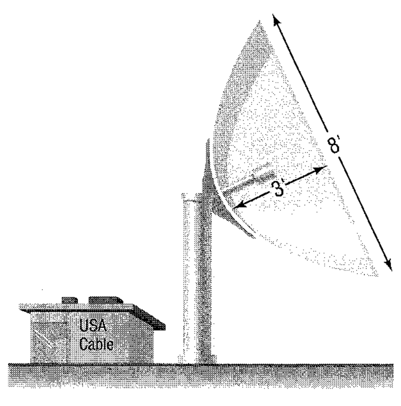
De manera recíproca, suponga que rayos de luz (u otras señales) emanan desde una fuente distante de modo que en esencia son paralelos. Cuando los rayos llegan a la superficie de un espejo parabólico cuyo eje de simetría es paralelo a ellos, son reflejados hacia un solo punto en el foco de dicho espejo. Este principio es usado en el diseño de algunos dispositivos de energía solar, antenas parabólicas y los espejos usados en algunos tipos de telescopios. *Véase* la figura 15.

FIGURA 15

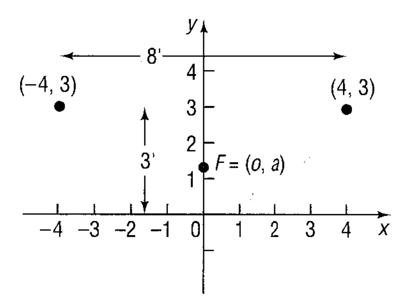


Una antena parabólica tiene forma de paraboloide de revolución. Las señales que emanan desde un satélite llegan a la superficie de la antena y son reflejadas a un solo punto, donde está colocado el receptor. Si el disco de la antena mide 8 pies de diámetro en su abertura y 3 pies de profundidad en su centro, ¿en qué posición debe estar colocado el receptor?

FIGURA 16



(a)



(b)

La figura 16(a) muestra el disco de la antena parabólica. En un sistema rectangular dibujamos la parábola usada para construir el disco, de modo que el vértice de la parábola esté en el origen y su foco en el eje positivo del eje y. *Véase* la figura 16(b). La forma de la ecuación de la parábola es

$$x^2 = 4ay$$

y su foco está en $(0, a)$. Como $(4, 3)$ es un punto en la gráfica, tenemos

$$4^2 = 4a(3)$$

$$a = \frac{4}{3}$$

El receptor debe colocarse a $1\frac{1}{3}$ pies desde la base del disco, a lo largo de su eje de simetría.

Ejercicio 9.2

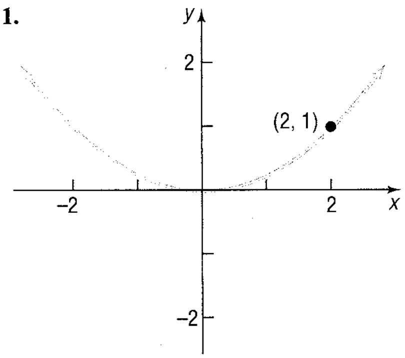
En los problemas del 1 al 8 se da la gráfica de una parábola. Haga corresponder cada gráfica con su ecuación.

A. $y^2 = 4x$ *B.* $x^2 = 4y$ *C.* $y^2 = -4x$

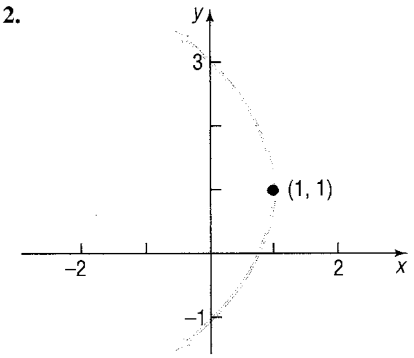
D. $x^2 = -4y$ *E.* $(y - 1)^2 = 4(x - 1)$ *F.* $(x + 1)^2 = 4(y + 1)$

G. $(y - 1)^2 = -4(x - 1)$ *H.* $(x + 1)^2 = -4(y + 1)$

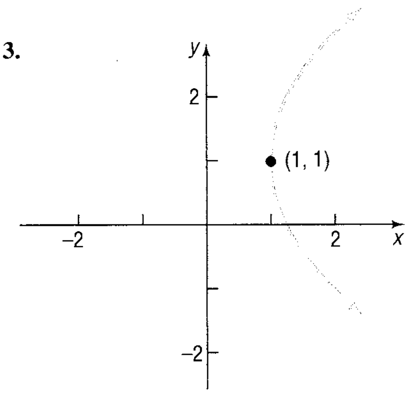
1.



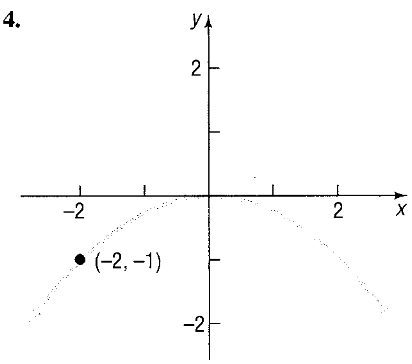
2.



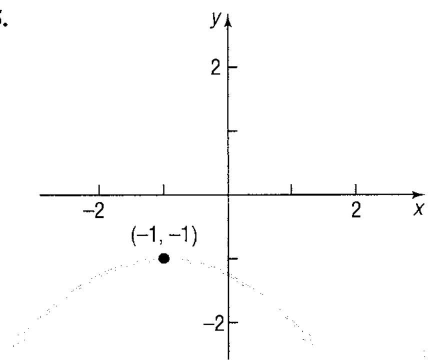
3.



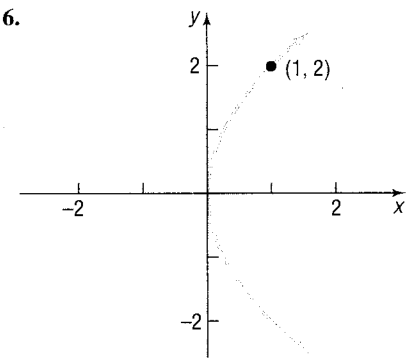
4.



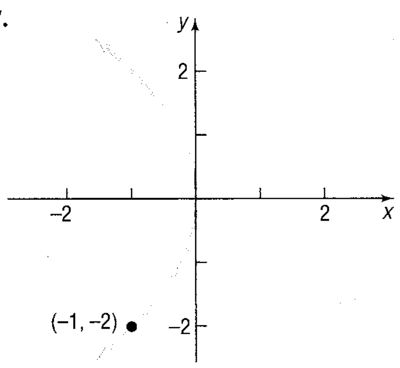
5.



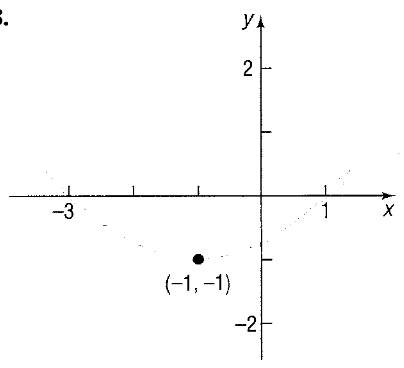
6.



7.



8.



En los problemas del 9 al 24 encuentre la ecuación de la parábola descrita. Encuentre los dos puntos que definen el lado recto y trace la gráfica de la ecuación.

9. Foco en (4, 0); vértice en (0, 0)

10. Foco en (0, 2); vértice en (0, 0)

11. Foco en (0, −3); vértice en (0, 0)

12. Foco en (−4, 0); vértice en (0, 0)

13. Foco en (−2, 0); directriz la recta $x = 2$

14. Foco en (0, −1); directriz la recta $y = 1$

15. Directriz la recta $y = -\frac{1}{2}$; vértice en (0, 0)

16. Directriz la recta $x = -\frac{1}{2}$; vértice en (0, 0)

17. Vértice en (2, −3); foco en (2, −5)

18. Vértice en (4, −2); foco en (6, −2)

19. Vértice en (0, 0); eje de simetría el eje y pasa por el punto (2, 3)

20. Vértice en (0, 0); eje de simetría el eje x-pasa por el punto (2, 3)

21. Foco en (−3, 4); directriz la recta $y = 2$

22. Foco en (2, 4); directriz la recta $x = -4$

23. Foco en (−3, −2); directriz la recta $x = 1$

24. Foco en (−4, 4); directriz la recta $y = -2$

En los problemas del 25 al 42 encuentre el vértice, el foco y la directriz de cada parábola. Trace la gráfica de la ecuación.

25. $x^2 = 4y$

26. $y^2 = 8x$

27. $y^2 = -16x$

28. $x^2 = -4y$

29. $(y - 2)^2 = 8(x + 1)$

30. $(x + 4)^2 = 16(y + 2)$

31. $(x - 3)^2 = -(y + 1)$

32. $(y + 1)^2 = -4(x - 2)$

33. $(y + 3)^2 = 8(x - 2)$

34. $(x - 2)^2 = 4(y - 3)$

35. $y^2 - 4y + 4x + 4 = 0$

36. $x^2 + 6x - 4y + 1 = 0$

37. $x^2 + 8x = 4y - 8$

38. $y^2 - 2y = 8x - 1$

39. $y^2 + 2y - x = 0$

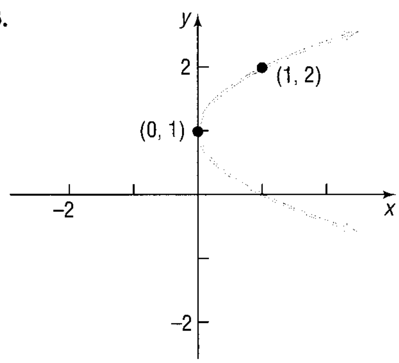
40. $x^2 - 4x = 2y$

41. $x^2 - 4x = y + 4$

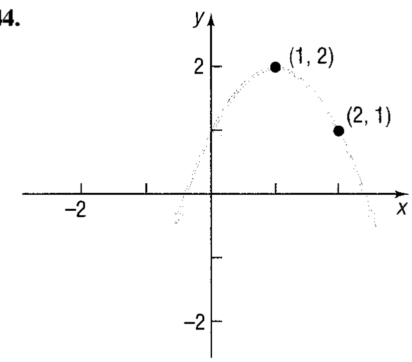
42. $y^2 + 12y = -x + 1$

En los problemas del 43 al 50 escriba una ecuación para cada parábola.

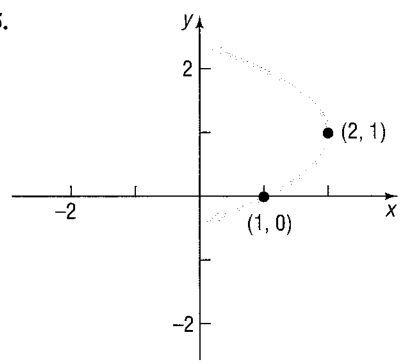
43.



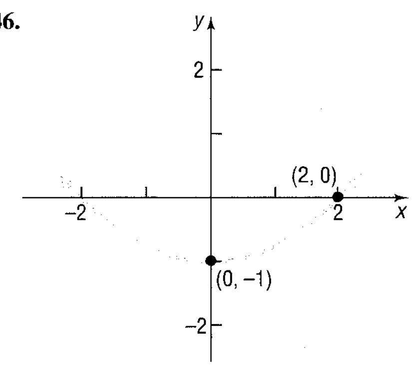
44.



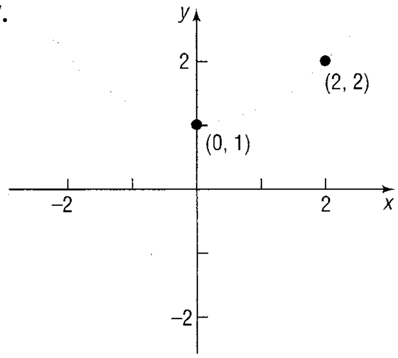
45.



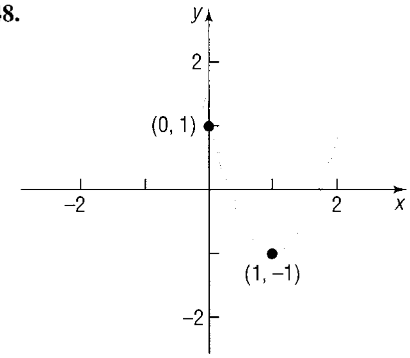
46.



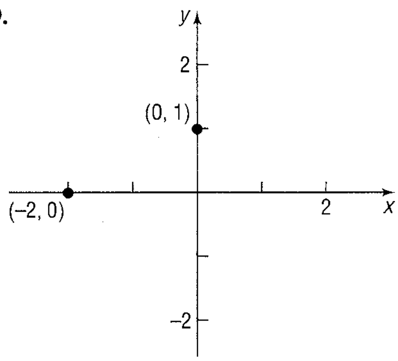
47.



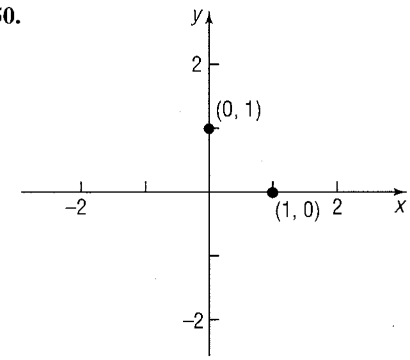
48.



49.



50.



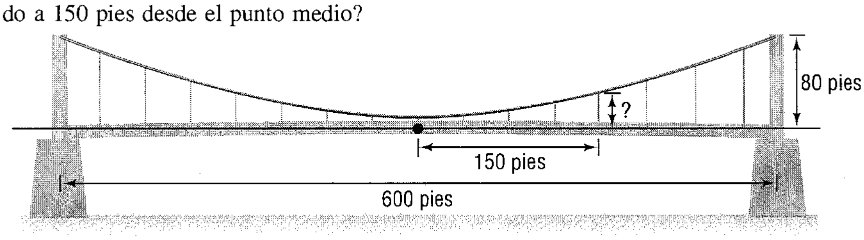
51. Una antena parabólica tiene forma de paraboloide de revolución. Las señales que emanan de un satélite llegan a la superficie de la antena y son reflejadas a un solo punto, donde está colocado el receptor. Si el disco de la antena tiene 10 pies de diámetro en su abertura y 4 pies de profundidad en su centro, ¿en qué posición debe ser colocado el receptor?

52. Una antena de televisión tiene forma de paraboloide de revolución. Encuentre la ubicación del receptor, que está colocado en el foco, si la antena mide 6 pies de diámetro en su abertura y 2 pies de profundidad.

53. El reflector de un flash tiene la forma de un paraboloide de revolución. Su diámetro es de 4 pulgadas y su profundidad de 1 pulgada. ¿A qué distancia del vértice debe colocarse la bombilla de modo que los rayos se reflejen de manera paralela al eje?

54. Un faro para automóvil tiene forma de paraboloide de revolución. El bulbo, que está colocado en el foco, está a una pulgada del vértice. Si la profundidad es de 2 pulgadas, ¿cuál es el diámetro del faro en su abertura?

55. Los cables que sostienen un puente colgante adquieren forma parabólica, como se muestra en la figura. Las torres que sostienen los cables están separadas 600 pies y son de 80 pies de altura. Si los cables tocan la superficie de la carretera a la mitad de la distancia entre las torres, ¿cuál es la altura del cable en un punto situado a 150 pies desde el punto medio?

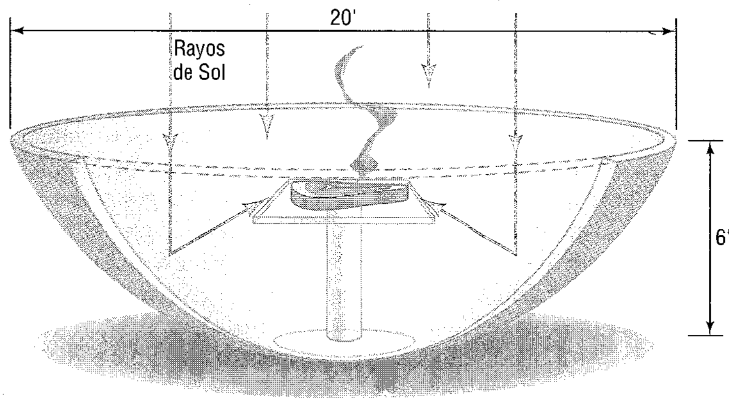


56. Los cables que sostienen un puente colgante adquieren forma parabólica. Las torres que los sostienen están separadas 400 pies y son de 100 pies de altura. Si los cables están a una altura de 10 pies a la mitad de la distancia entre las torres, ¿cuál es su altura en un punto situado a 50 pies desde la torre?

57. Un faro buscador tiene la forma de un paraboloide de revolución. Si la fuente de luz está colocada a 2 pies de la base en el eje de simetría y la abertura es de 5 pies de diámetro, ¿qué profundidad tiene el faro buscador?

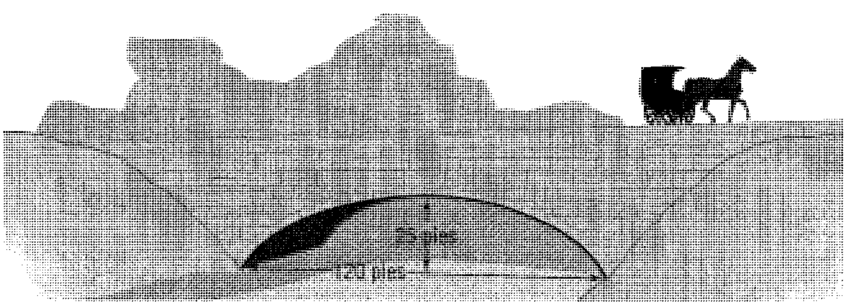
58. *Faros buscadores.* Un faro buscador tiene la forma de un paraboloide de revolución. Si la fuente luminosa está colocada a 2 pies de la base sobre el eje de simetría y la profundidad del faro es de 4 pies, ¿cuál debe ser el diámetro de la abertura?

59. *Calentador solar.* Un espejo en forma de paraboloide de revolución será usado para concentrar los rayos del Sol en su foco, creando una fuente calorífica. Si el espejo es de 20 pies de diámetro en su abertura y de 6 pies de profundidad, ¿dónde se concentrará la fuente de calor?



60. *Telescopios de reflexión.* Un telescopio de reflexión tiene un espejo en forma de paraboloide de revolución. Si el espejo es de 4 pulgadas de diámetro en su abertura y de 3 pies de profundidad, ¿dónde se concentra la luz recibida?

61. *Arco parabólico de un puente.* Un puente está construido en forma de arco parabólico. El puente tiene una extensión de 120 pies y una altura máxima de 25 pies. *Véase* la ilustración. Seleccione un sistema de coordenadas rectangulares adecuado y encuentre la altura del arco a las distancias de 10, 30 y 50 pies desde el centro.



62. *Arco parabólico de un puente.* Un puente es construido en forma de arco parabólico y tiene una extensión de 100 pies. La altura del arco a una distancia de 40 pies desde el centro mide 10 pies. Encuentre la altura del arco en su centro.

63. Demuestre que una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Ey = 0 \qquad A \neq 0, E \neq 0$$

es la ecuación de una parábola con vértice en (0, 0) y eje de simetría en el eje y. Encuentre su foco y su directriz.

64. Demuestre que una ecuación de la forma

$$Cy^2 + Dx = 0 \qquad C \neq 0, D \neq 0$$

es la ecuación de una parábola con vértice en (0, 0) y eje de simetría en el eje x. Encuentre su foco y su directriz.

65. Demuestre que la gráfica de una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad A \neq 0$$

(a) Es una parábola si $E \neq 0$.
(b) Es una recta vertical si $E = 0$ y $D^2 - 4AF = 0$.
(c) Son dos rectas verticales si $E = 0$ y $D^2 - 4AF > 0$.
(d) No tiene puntos si $E = 0$ y $D^2 - 4AF < 0$.

66. Demuestre que la gráfica de una ecuación de la forma

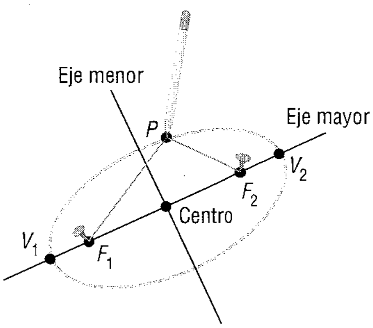
$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad C \neq 0$$

(a) Es una parábola si $D \neq 0$.
(b) Es una recta vertical si $D = 0$ y $E^2 - 4CF = 0$.
(c) Son dos rectas verticales si $D = 0$ y $E^2 - 4CF > 0$.
(d) No tiene puntos si $D = 0$ y $E^2 - 4CF < 0$.

La elipse

Elipse Una **elipse** es el conjunto de todos los puntos en el plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados **focos**, es una constante.

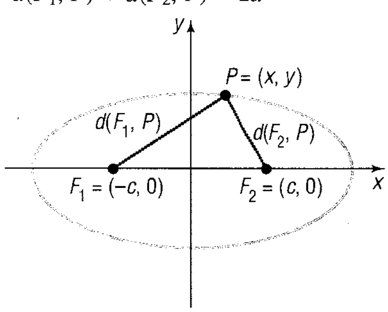
FIGURA 17



A partir de la definición anterior, podemos valernos de un medio físico para dibujar una elipse. Tome de un pedazo de cuerda (la longitud de ésta es la constante a la que hace referencia la definición). Luego tome dos clavos (los focos) y clávelos en un cartón de modo que la distancia entre ellos sea menor que la longitud de la cuerda. A continuación ate los extremos de la cuerda a los clavos y, usando la punta de un lápiz, jale manteniendo tensa la cuerda, gire el lápiz alrededor de los dos clavos. El lápiz traza una elipse, como se muestra en la figura 17.

En la figura 17, los focos están marcados con F_1 y F_2. La recta que contiene a los focos es llamada **eje mayor.** El punto medio del segmento de recta que une a los focos es llamado **centro** de la elipse. La línea que pasa por el centro y es perpendicular al eje mayor es el **eje menor.**

FIGURA 18
$d(F_1, P) + d(F_2, P) = 2a$



Los dos puntos de intersección de la elipse con el eje mayor son los **vértices,** V_1 y V_2, de la elipse. La distancia desde un vértice al otro es la **longitud del eje mayor.** La elipse es simétrica respecto a sus ejes mayor y menor.

Con estas ideas en mente, estamos preparados para encontrar la ecuación de una elipse en un sistema rectangular de coordenadas. Primero, colocamos el centro de la elipse en el origen. Segundo, colocamos la elipse de modo que su eje mayor coincida con un eje de coordenadas. Suponga que el eje mayor coincide con el eje x, como se muestra en la figura 18. Si c es la distancia desde el centro al foco, entonces un foco estará en $F_1 = (-c, 0)$ y el otro en $F_2 = (-c, 0)$. Como veremos, es conveniente denotar con $2a$ la distancia constante a la que hace referencia la definición. Por lo tanto, si $P = (x, y)$ es cualquier punto sobre la elipse, tenemos

$$
\begin{aligned}
d(F_1, P) + d(F_2, P) &= 2a && \text{La suma de las distancias desde } P \text{ a los focos es una constante.}\\
\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a && \text{Usar la fórmula de distancia.}\\
\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} && \text{Aislar un radical.}\\
(x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} && \text{Elevar al cuadrado ambos lados.}\\
&\quad + (x-c)^2 + y^2 &&\\
x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} && \text{Simplificar}\\
&\quad + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 &&\\
4cx - 4a^2 &= -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} && \text{Aislar el radical.}\\
cx - a^2 &= -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} && \text{Dividir cada lado entre 4.}\\
c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 &= a^2[(x-c)^2 + y^2] && \text{Elevar al cuadrado ambos lados otra vez.}\\
c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 &= a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) &&\\
(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2c^2 - a^4 &&\\
(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) && \text{Multiplicar cada lado por } -1\text{; factorizar } a^2 \text{ en el lado derecho.} \quad (1)
\end{aligned}
$$

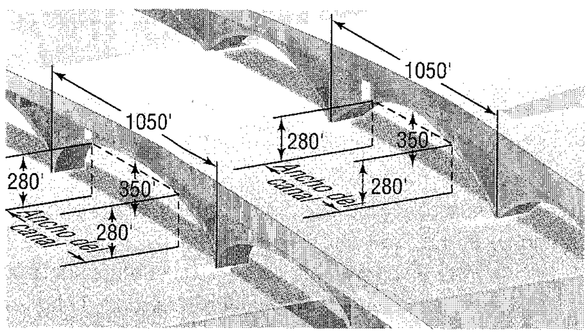
MISIÓN POSIBLE

Capítulo 9

CONSTRUCCIÓN DE UN PUENTE SOBRE EL RÍO ORIENTE

Su equipo está trabajando para las autoridades del transporte de la ciudad de Nueva York. Usted tiene que analizar dos proyectos de construcción para un nuevo puente sobre el Río Oriente en dicha ciudad. El espacio entre los soportes del puente necesita ser de 1050 pies y la altura en el centro del arco de 350 pies. Una compañía ha sugerido que la estructura tenga la forma de una parábola; otra compañía sugiere una semielipse. El equipo de ingeniería determinará las resistencias relativas de los dos proyectos; el trabajo de usted es encontrar si existe alguna diferencia en los anchos del canal.

Un buque petrolero vacío necesita un espacio libre de 280 pies para pasar por debajo del puente. Usted debe encontrar la anchura del canal en cada una de las dos propuestas.



1. Para determinar la ecuación de una parábola con estas características, primero coloque la parábola sobre ejes coordenados en una posición conveniente y dibújela.
2. ¿Cuál es la ecuación de la parábola? (Si usa punto decimal en la ecuación aproxime hasta seis decimales. Si usa fracciones su respuesta será más exacta.)
3. Si la forma de los soportes es parabólica, ¿qué tan ancho será el canal por el que pasará el buque petrolero?
4. Para determinar la ecuación de una semielipse con estas características, coloque la semielipse sobre ejes coordenados en una posición conveniente y dibújela.
5. ¿Cuál es la ecuación de la elipse? ¿Qué tan ancho deberá ser el canal por el que pasará el buque petrolero?
6. Ahora que sabe cuál de las dos alternativas proporciona el canal más ancho, considere otros factores. Su departamento también está encargado de verificar la profundidad del canal, la cantidad de tráfico en el río, y otros detalles. Por ejemplo, si hubiera una inundación en el río y el nivel del agua se elevara 10 pies, ¿cómo se afectaría el espacio libre? Tome una decisión acerca de cuál proyecto piensa que sería mejor por lo que a su departamento concierne y explique su decisión.

Para obtener puntos sobre la elipse que no estén en el eje x, es necesario que $a > c$. Para ver por qué, observe otra vez la figura 18:

$$d(F_1, P) + d(F_2, P) > d(F_1, F_2)$$ La suma de las longitudes de dos lados de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado.

$$2a > 2c$$ $d(F_1, P) + d(F_2, P) = 2a$; $d(F_1, F_2) = 2c$

$$a > c$$

Como $a > c$, también tenemos $a^2 > c^2$, de modo que $a^2 - c^2 > 0$. Sea $b^2 = a^2 - c^2$, $b > 0$. Entonces $a > b$ y la ecuación (1) puede ser escrita como

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ Dividir cada lado entre a^2b^2.

Teorema Una ecuación de la elipse con centro en (0, 0) y focos en $(-c, 0)$ y $(c, 0)$ es

Ecuación de una elipse; centro en (0, 0); focos en $(\pm c, 0)$; eje mayor a lo largo del eje x

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{donde } a > b > 0 \text{ y } b^2 = a^2 - c^2 \qquad (2)}$$

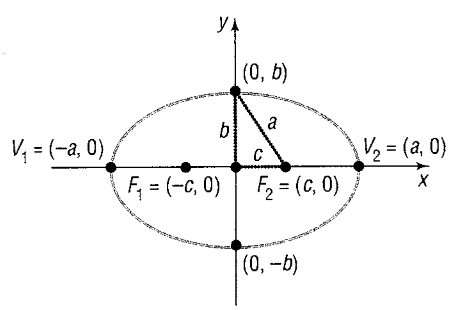
El eje mayor es el eje x.

Como puede verificarlo, la elipse definida por la ecuación (2) es simétrica respecto al eje x, al eje y y al origen.

Para encontrar los vértices de la elipse definida por la ecuación (2), haga $y = 0$. Los vértices satisfacen la ecuación $x^2/a^2 = 1$, las soluciones de esto son $x = \pm a$. En consecuencia, los vértices de la elipse dada por la ecuación (2) son $V_1 = (-a, 0)$ y $V_2 = (a, 0)$. Las intersecciones con el eje y de la elipse, se determinaron haciendo $x = 0$, tienen coordenadas $(0, -b)$ y $(0, b)$. Estas cuatro intersecciones, $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, y $(0, -b)$, son usadas para trazar la gráfica de la elipse. *Véase* la figura 19.

Obsérvese en la figura 19 el triángulo rectángulo formado con los puntos $(0, 0)$, $(c, 0)$, y $(0, b)$. Ya que $b^2 = a^2 - c^2$ (o $b^2 + c^2 = a^2$), la distancia desde el foco en $(c, 0)$ al punto $(0, b)$ es a.

FIGURA 19



EJEMPLO 1 *Determinación de la ecuación de una elipse*

Encontrar la ecuación de una elipse con centro en el origen, un foco en (3, 0) y un vértice en $(-4, 0)$. Trazar la gráfica de la ecuación.

Solución La elipse tiene su centro en el origen, y el eje mayor coincide con el eje x. Un foco está en $(c, 0) = (3, 0)$, así que $c = 3$. Un vértice está en $(-a, 0) = (-4, 0)$, así que $a = 4$. De la ecuación (2), se deduce que

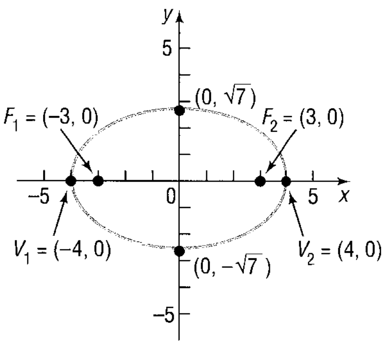
$$b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 9 = 7$$

de modo que una ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$

La figura 20 muestra la gráfica.

FIGURA 20
$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$



Una ecuación de la forma de la ecuación (2), con $a > b$, es la ecuación de una elipse con centro en el origen, focos sobre el eje x en $(-c, 0)$ y $(c, 0)$, donde $c^2 = a^2 - b^2$ y eje mayor a lo largo del eje x.

Para el resto de esta sección, la instrucción "Analizar la ecuación" significará encontrar el centro, el eje mayor, los focos y vértices de la elipse y trazar la gráfica de la ecuación.

EJEMPLO 2 *Análisis de la ecuación de una elipse*

Analizar la ecuación:

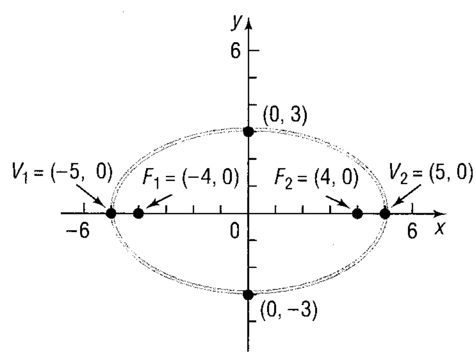
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Solución La ecuación dada tiene la forma de la ecuación (2), con $a^2 = 25$ y $b^2 = 9$. Corresponde a una elipse con centro en $(0, 0)$ y eje mayor a lo largo del eje x. Los vértices están en $(\pm\, a, 0) = (\pm\, 5, 0)$. Como $b^2 = a^2 - c^2$, encontramos

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$$

Los focos están en $(\pm\, c, 0) = (\pm\, 4, 0)$. La figura 21 muestra la gráfica.

FIGURA 21
$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$



Comentario: Para trazar la gráfica de la elipse $(x^2/25) + (y^2/9) = 1$ analizada en el ejemplo 2, necesitamos trazar la gráfica de las dos funciones $y = 3\sqrt{1 - (x^2/25)}$ y $y = -3\sqrt{1 - (x^2/25)}$. Hágalo y compare el resultado con la figura 21. Asegúrese de establecer el modo necesario para trabajar en una pantalla cuadrada.

Ahora resuelva los problemas 5 y 15.

Observe en las figuras 20 y 21 cómo usamos las intersecciones de la ecuación para trazar la gráfica de cada elipse. Siguiendo esta práctica le facilitaremos la obtención de una gráfica precisa para una elipse.

Si el eje mayor de una elipse con centro en (0, 0) coincide con el eje y, entonces los focos están en $(0, -c)$ y $(0, c)$. Usando los pasos anteriores, la definición de una elipse conduce al resultado siguiente:

Teorema

Una ecuación de la elipse con centro en (0, 0) y focos en $(0, -c)$ y $(0, c)$ es

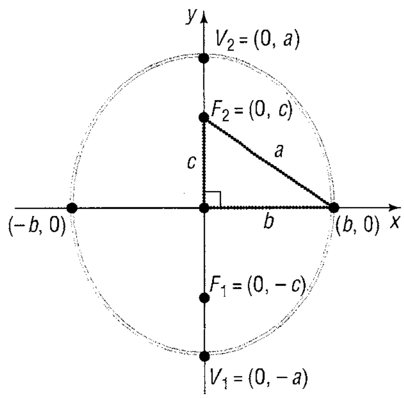
Ecuación de una elipse; centro en (0, 0); focos en (0, ± c); eje mayor a lo largo del eje y

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad \text{donde } a > b > 0 \text{ y } b^2 = a^2 - c^2 \tag{3}$$

El eje mayor es el eje y; los vértices están en $(0, -a)$ y $(0, a)$.

La figura 22 ilustra la gráfica de tal elipse. Otra vez, nótese el triángulo rectángulo con los puntos en (0, 0), $(b, 0)$, y $(0, c)$.

FIGURA 22



Vea cuidadosamente las ecuaciones (2) y (3). Aunque pueden parecer similares, ¡hay una diferencia! En la ecuación (2), el número mayor, a^2, está en el denominador del término de x^2, así que el eje mayor de la elipse está a lo largo del eje x. En la ecuación (3), el número mayor, a^2, está en el denominador del término de y^2, de modo que el eje mayor está a lo largo del eje y.

EJEMPLO 3 *Análisis de la ecuación de una elipse*

Analizar la ecuación:

$$9x^2 + y^2 = 9$$

Solución Para poner la ecuación en forma apropiada dividimos cada lado entre 9:

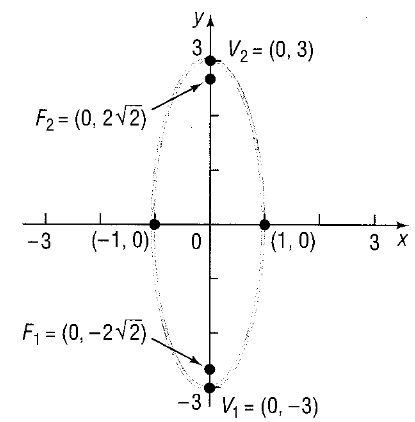
$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$$

El número mayor, 9, está en el denominador del término y^2, con base en la ecuación (3), esta es la ecuación de una elipse con centro en el origen y eje mayor a lo largo del eje y. Además, concluimos que $a^2 = 9$, $b^2 = 1$, y $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 1 = 8$. Los vértices están en $(0, \pm a) = (0, \pm 3)$, y los focos en $(0, \pm c) = (0, \pm 2\sqrt{2})$. La gráfica aparece en la figura 23.

EJEMPLO 4 *Determinación de la ecuación de una elipse*

Encontrar una ecuación de la elipse que tiene un foco en (0, 2) y vértices en (0, −3) y (0, 3). Trazar la gráfica de la ecuación.

FIGURA 23
$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$



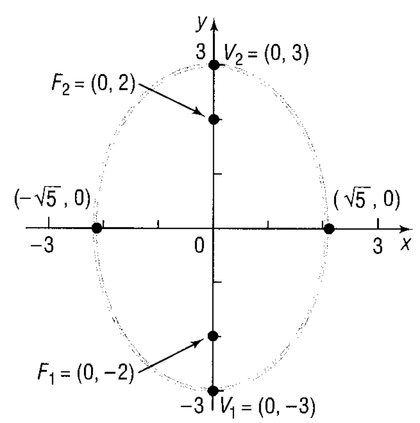
Solución Ya que los vértices están en $(0, -3)$ y $(0, 3)$, el centro de esta elipse está en el origen. Además, su eje mayor coincide con el eje y. La información dada también revela que $c = 2$ y $a = 3$, así que $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$. La forma de la ecuación de esta elipse está dada por la ecuación (3):

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

La figura 24 muestra la gráfica.

FIGURA 24
$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$



Ahora resuelva los problemas 9 y 17.

El círculo puede ser considerado como una clase especial de elipse. Para ver por qué, haga $a = b$ en la ecuación (2) o en la (3). Entonces

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Esta es la ecuación de un círculo con centro en el origen y radio a. El valor de c es

$$c^2 = a^2 - b^2 = 0$$

Concluimos que entre más cercanos estén los focos de una elipse, ésta se parecerá más a un círculo.

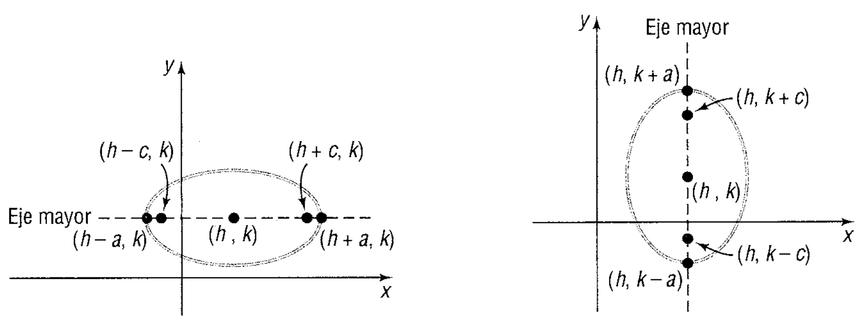
Centro en (h, k)

Si una elipse con centro en el origen y cuyo eje mayor coincide con un eje de coordenadas es trasladada horizontalmente h unidades y verticalmente k unidades, el resultado será una elipse con centro en (h, k) y eje mayor paralelo a un eje de coordenadas. La tabla 3 da las formas de las ecuaciones de tales elipses, y la figura 25 muestra sus gráficas.

TABLA 3 ELIPSES CON CENTRO EN (h, k) Y EJE MAYOR PARALELO A UNO DE LOS EJES DE COORDENADAS

CENTRO	EJE MAYOR	FOCOS	VÉRTICES	ECUACIÓN
(h, k)	Paralelo al eje x	$(h \pm c, k)$	$(h \pm a, k)$	$\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1,$ $a > b$ y $b^2 = a^2 - c^2$
(h, k)	Paralelo al eje y	$(h, k \pm c)$	$(h, k \pm a)$	$\dfrac{(x-h)^2}{b^2} + \dfrac{(y-k)^2}{a^2} = 1,$ $a > b$ y $b^2 = a^2 - c^2$

FIGURA 25



(a) $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ (b) $\dfrac{(x-h)^2}{b^2} + \dfrac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

EJEMPLO 5 *Determinación de una ecuación de una elipse con centro fuera del origen*

Encontrar una ecuación para la elipse con centro en $(2, -3)$, un foco en $(3, -3)$, y un vértice en $(5, -3)$. Trazar la gráfica de la ecuación

Solución El centro está en $(h, k) = (2, -3)$, así que $h = 2$ y $k = -3$. El eje mayor es paralelo al eje x. La distancia desde el centro $(2, -3)$ al foco $(3, -3)$ es $c = 1$; la distancia desde el centro $(2, -3)$ al vértice $(5, -3)$ es $a = 3$. Así, $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 1 = 8$. La forma de la ecuación es

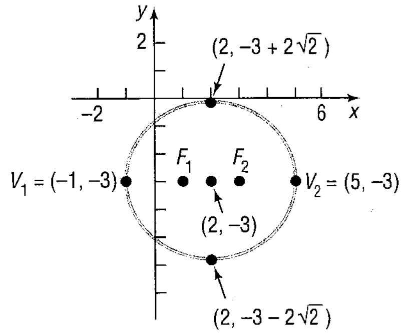
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{donde } h = 2, k = -3, a = 3, b = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{8} = 1$$

La figura 26 muestra la gráfica.

Ahora resuelva el problema 41.

FIGURA 26
$\dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{(y+3)^2}{8} = 1$



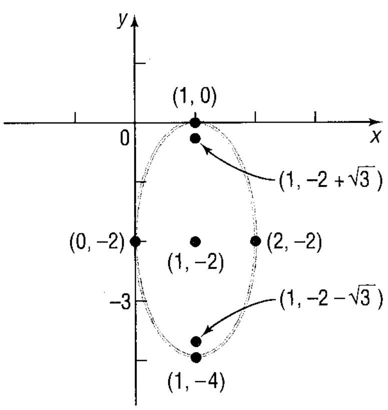
EJEMPLO 6 *Análisis de la ecuación de una elipse*

Analizar la ecuación: $4x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$

Solución Procedemos a completar el cuadrado en x y en y:

$$4x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$$
$$4x^2 - 8x + y^2 + 4y = -4$$
$$4(x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) = -4$$
$$4(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = -4 + 4 + 4 \quad \text{Completar cada cuadrado.}$$
$$4(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$$
$$(x-1)^2 + \frac{(y+2)^2}{4} = 1 \quad \text{Dividir cada lado entre 4.}$$

FIGURA 27
$(x-1)^2 + \dfrac{(y+2)^2}{4} = 1$

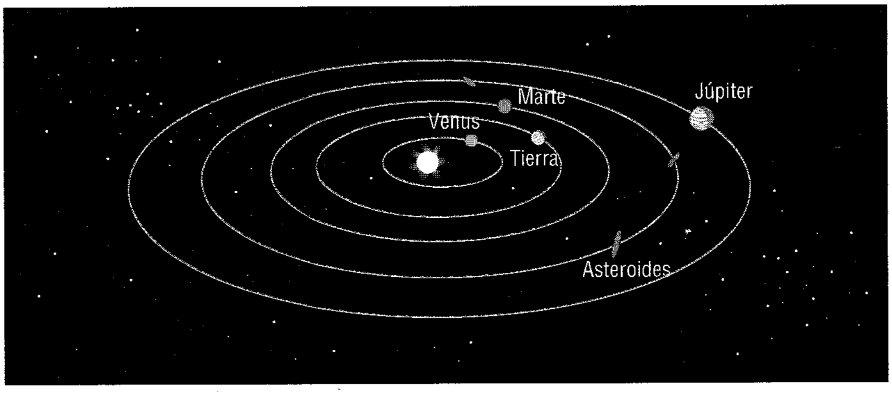


Esta es la ecuación de una elipse con centro en $(1, -2)$ y eje mayor paralelo al eje y. Como $a^2 = 4$ y $b^2 = 1$, tenemos $c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 1 = 3$. Los vértices están en $(h, k \pm a) = (1, -2 \pm 2)$ o $(1, 0)$ y $(1, -4)$. Los focos están en $(h, k \pm c) = (1, -2 \pm \sqrt{3})$ o $(1, -2 - \sqrt{3})$ y $(1, -2 + \sqrt{3})$. La figura 27 muestra la gráfica.

Aplicaciones

Las elipses se encuentran en muchas aplicaciones de ciencia e ingeniería. Por ejemplo, las órbitas de los planetas alrededor del Sol son elípticas, con el Sol en uno de los focos. *Véase* la figura 28.

FIGURA 28



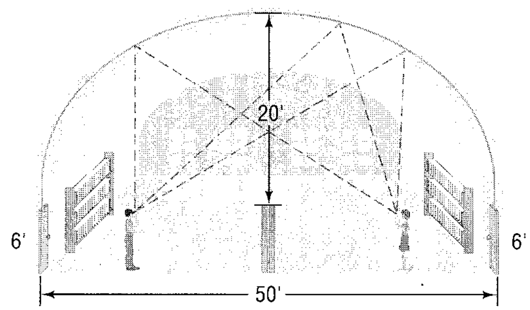
Muchos puentes de piedra o concreto tienen forma de arcos semielípticos. Cuando en mecánica se necesita una velocidad variable de movimiento se utilizan dispositivos elípticos.

Las elipses también tiene una propiedad interesante de reflexión. Si una fuente de luz (o sonido) es colocada en un foco, las ondas transmitidas por la fuente se reflejarán en la elipse y se concentrarán en el otro foco. Este concepto es la base principal de "las galerías de murmullos", las cuales son habitaciones diseñadas con techos elípticos. Una persona parada en un foco de la elipse puede murmurar y ser escuchada en el otro foco, ya que todas las ondas de sonido que llegan al techo son reflejadas hacia ese lugar.

EJEMPLO 7 *Galerías de murmullos*

La figura 29 muestra las especificaciones de un techo elíptico en un salón diseñado como galería de murmullos. En una galería de murmullos, una persona parada en un foco de la elipse puede murmurar y ser escuchada por otra persona parada en el otro foco, ya que todas las ondas de sonido que llegan al techo desde uno de los focos son reflejadas al otro foco. ¿Dónde están ubicados los focos en este salón?

FIGURA 29



Solución Establecemos un sistema de coordenadas rectangulares de modo que el centro de la elipse esté en el origen y el eje mayor quede a lo largo del eje x. *Véase* la figura 30. La ecuación de la elipse es

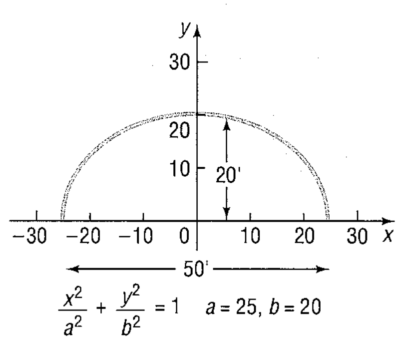
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $a = 25$ y $b = 20$. Como

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25^2 - 20^2 = 625 - 400 = 225$$

tenemos $c = 15$. Así, los focos está ubicados a 15 pies desde el centro de la elipse a lo largo del eje mayor.

FIGURA 30

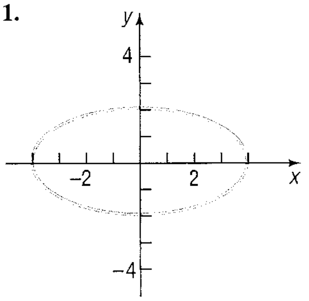


Ejercicio 9.3

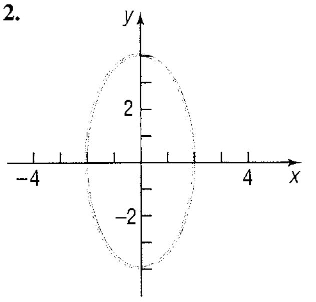
En los problemas del 1 al 4 se da la gráfica de una elipse. Haga corresponder cada gráfica con su ecuación.

A. $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ *B.* $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ *C.* $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ *D.* $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

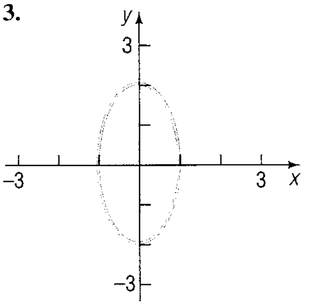
1.



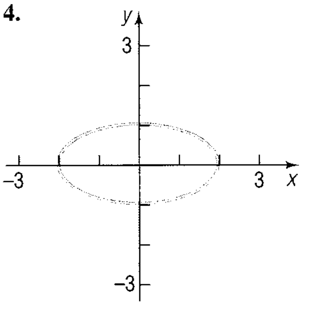
2.



3.



4.



En los problemas del 5 al 14 encuentre los vértices y focos de cada elipse. Trace la gráfica de cada ecuación.

5. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$

6. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

7. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

8. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

9. $4x^2 + y^2 = 16$

10. $x^2 + 9y^2 = 18$

11. $4y^2 + x^2 = 8$

12. $4y^2 + 9x^2 = 36$

13. $x^2 + y^2 = 16$

14. $x^2 + y^2 = 4$

En los problemas del 15 al 24 encuentre una ecuación para cada elipse. Trace la gráfica de cada ecuación.

15. Centro en $(0, 0)$; foco en $(3, 0)$; vértice en $(5, 0)$

16. Centro en $(0, 0)$; foco en $(-1, 0)$; vértice en $(3, 0)$

17. Centro en $(0, 0)$; foco en $(0, -4)$; vértice en $(0, 5)$

18. Centro en $(0, 0)$; foco en $(0, 1)$; vértice en $(0, -2)$

19. Focos en $(\pm 2, 0)$; la longitud del eje mayor es 6

20. Focos en $(0, -4)$; vértices en $(0, \pm 8)$

21. Focos en $(0, \pm 3)$; las intersecciones con el eje x son ± 2

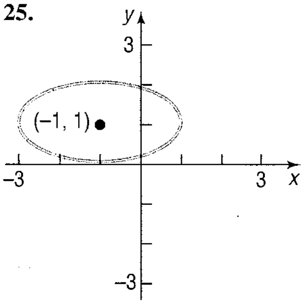
22. Focos en $(0, \pm 2)$; la longitud del eje mayor es 8

23. Centro en $(0, 0)$; vértice en $(0, 4)$; $b = 1$

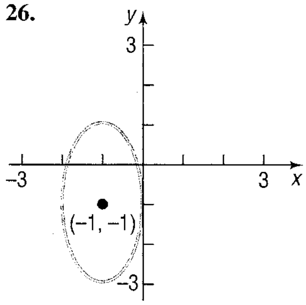
24. Vértices en $(\pm 5, 0)$; $c = 2$

En los problemas del 25 al 28 escriba una ecuación para cada elipse.

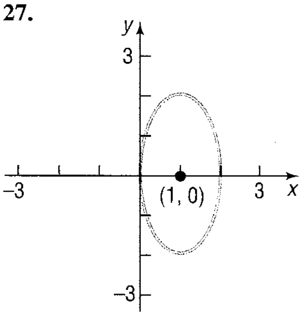
25.



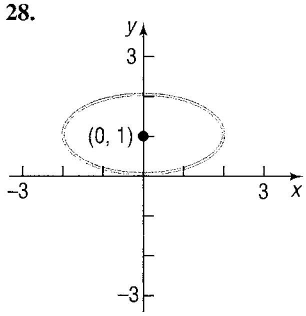
26.



27.



28.



En los problemas del 29 al 40 encuentre el centro, los focos y los vértices de cada elipse. Trace la gráfica de cada ecuación.

29. $\dfrac{(x-3)^2}{4} + \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$

30. $\dfrac{(x+4)^2}{9} + \dfrac{(y+2)^2}{4} = 1$

31. $(x+5)^2 + 4(y-4)^2 = 16$

32. $9(x-3)^2 + (y+2)^2 = 18$

33. $x^2 + 4x + 4y^2 - 8y + 4 = 0$

34. $x^2 + 3y^2 - 12y + 9 = 0$

35. $2x^2 + 3y^2 - 8x + 6y + 5 = 0$

36. $4x^2 + 3y^2 + 8x - 6y = 5$

37. $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$

38. $x^2 + 9y^2 + 6x - 18y + 9 = 0$

39. $4x^2 + y^2 + 4y = 0$

40. $9x^2 + y^2 - 18x = 0$

En los problemas del 41 al 50 encuentre una ecuación para cada elipse. Trace la gráfica de cada ecuación.

41. Centro en $(2, -2)$; vértice en $(7, -2)$; focos en $(4, -2)$

42. Centro en $(-3, 1)$; vértice en $(-3, 3)$; focos en $(-3, 0)$

43. Vértices en $(4, 3)$ y $(4, 9)$; focos en $(4, 8)$

44. Focos en $(1, 2)$ y $(-3, 2)$; vértice en $(-4, 2)$

45. Focos en $(5, 1)$ y $(-1, 1)$; la longitud del eje mayor es 8

46. Vértices en $(2, 5)$ y $(2, -1)$; $c = 2$

47. Centro en $(1, 2)$; focos en $(4, 2)$; pasa por el punto $(1, 3)$

48. Centro en $(1, 2)$; focos en $(1, 4)$; pasa por el punto $(2, 2)$

49. Centro en $(1, 2)$; vértice en $(4, 2)$; pasa por el punto $(1, 3)$

50. Centro en $(1, 2)$; vértice en $(1, 4)$; pasa por el punto $(2, 2)$

En los problemas del 51 al 54 trace la gráfica de cada función. [Sugerencia: Observe que cada función es la mitad de una elipse.]

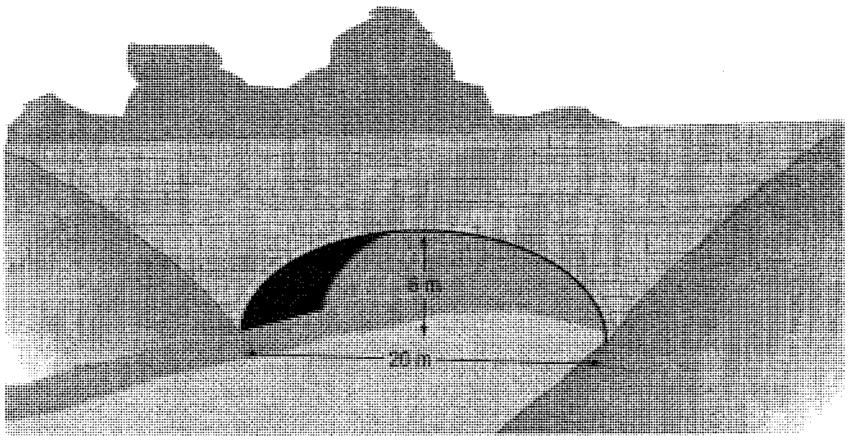
51. $f(x) = \sqrt{16 - 4x^2}$

52. $f(x) = \sqrt{9 - 9x^2}$

53. $f(x) = -\sqrt{64 - 16x^2}$

54. $f(x) = -\sqrt{4 - 4x^2}$

55. *Arco semielíptico de un puente.* Un arco tiene forma de la mitad superior de una elipse y es usado para sostener un puente que debe atravesar un río de 20 metros de ancho. En el centro el arco mide 6 metros desde el centro del río (*véase* la figura). Escriba una ecuación para la elipse en la que el eje x coincida con el nivel del agua y el eje y pase por el centro del arco.



56. *Arco semielíptico de un puente.* El arco de un puente es una semielipse con un eje mayor horizontal. La extensión es de 30 pies, y la parte superior del arco está 10 pies por encima del eje mayor. El camino sobre el puente es horizontal y queda a 2 pies por arriba de la parte superior del arco. Encuentre la altura vertical desde el camino hasta el arco a intervalos de 5 pies a lo largo del camino.

57. *Galerías de murmullos.* Un salón de 100 pies de longitud está diseñado como galería de murmullos. Si los focos están ubicados a 25 pies del centro, ¿cuál es la altura del techo en el centro?

58. *Galerías de murmullos.* Una persona, parada en un foco de una galería de murmullos, está a 6 pies de la pared más cercana. Su amiga está parada en el otro foco, a una distancia de 100 pies. ¿Cuál es la longitud de esta galería de murmullos? En el centro, ¿cuál es la altura del techo elíptico?

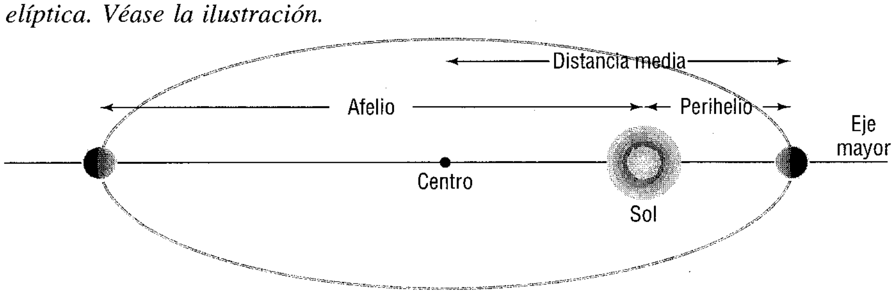
59. *Arco semielíptico de un puente.* Un puente está construido en forma de arco semielíptico. Tiene extensión de 120 pies y una altura máxima de 25 pies. Seleccione un sistema de coordenadas rectangulares adecuado y encuentre la altura del arco a distancias de 10, 20, 30 y 50 pies desde el centro.

60. *Arco semielíptico de un puente.* Un puente está construido en forma de arco semielíptico y tiene una extensión de 100 pies. La altura del arco a una distancia de 40 pies desde el centro es de 10 pies. Encuentre la altura del arco en su centro.

61. *Arco semielíptico.* Un arco en forma de la mitad de una elipse mide 40 pies de ancho y 15 pies de alto en el centro. Encuentre la altura del arco a intervalos de 10 pies a lo largo de su ancho.

62. *Arco semielíptico de un puente.* El arco para un puente sobre una autopista tiene forma de media elipse. La parte superior del arco está a 20 pies desde el nivel del suelo (el eje mayor). La autopista tiene cuatro carriles, cada uno de 12 pies de ancho, una parte central de seguridad de 8 pies de ancho y dos acotamientos laterales, cada uno de 4 pies de ancho. ¿Cuál debe ser la extensión del puente (la longitud de su eje mayor) si tiene una altura de 13 pies a una distancia de 28 pies del centro?

*En los problemas del 63 al 66 utilice el hecho de que las órbitas de un planeta forman una elipse alrededor del Sol, con el Sol en uno de los focos. El **afelio** de un planeta es su distancia mayor al Sol y el **perihelio** su distancia menor. La **distancia media** de un planeta al Sol es la longitud del semieje mayor de la órbita elíptica. Véase la ilustración.*



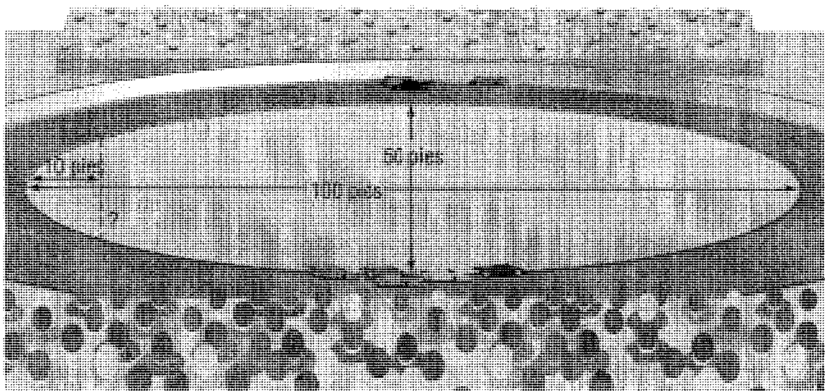
63. *La Tierra.* La distancia media de la Tierra al Sol es de 93 millones de millas. Si el afelio de la Tierra es de 94.5 millones de millas, ¿cuál es su perihelio? Escriba una ecuación para la órbita de la Tierra alrededor del Sol.

64. *Marte.* La distancia media de Marte al Sol es de 142 millones de millas. Si el perihelio de Marte es de 128.5 millones de millas, ¿cuál es su afelio? Escriba una ecuación para la órbita de Marte alrededor del Sol.

65. *Júpiter.* El afelio de Júpiter es de 507 millones de millas. Si la distancia del Sol al centro de la órbita elíptica jupiteriana es de 23.2 millones de millas, ¿cuál es el perihelio? ¿Cuál es la distancia media? Escriba una ecuación para la órbita de Júpiter alrededor del Sol.

66. *Plutón.* El perihelio de Plutón mide 4551 millones de millas y la distancia del Sol al centro de su órbita elíptica es de 897.5 millones de millas. Encuentre el afelio. ¿Cuál es la distancia media de Plutón al Sol? Escriba una ecuación para la órbita de Plutón alrededor del Sol.

67. Consulte la figura siguiente. Una pista de carreras tiene la forma de una elipse, 100 pies de largo y 50 de ancho. ¿Cuál es su anchura a 10 pies desde un extremo?



68. Una pista de carreras tiene la forma de una elipse de 80 pies de largo y 40 de ancho. ¿Cuál es su anchura a 10 pies desde un extremo?

69. Demuestre que una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0 \qquad A \neq 0,\ C \neq 0,\ F \neq 0$$

donde A y C son del mismo signo y F es de signo opuesto:

(a) Es la ecuación de una elipse con centro en (0, 0) si $A \neq C$.
(b) Es la ecuación de un círculo con centro en (0, 0) si $A = C$.

70. Demuestre que la gráfica de una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad A \neq 0,\ C \neq 0$$

donde A y C son del mismo signo:

(a) Es una elipse si $(D^2/4A) + (E^2/4C) - F$ tiene el mismo signo que A.
(b) Es un punto si $(D^2/4A) + (E^2/4C) - F = 0$.
(c) No tiene puntos si $(D^2/4A) + (E^2/4C) - F$ tiene el signo contrario que A.

71. La **excentricidad** e de una elipse se define como el número c/a, donde a y c son los números dados en la ecuación (2). Como $a > c$, se deduce que $e < 1$. Escriba un párrafo breve acerca de la forma general de cada una de las siguientes elipses. Asegúrese de justificar sus conclusiones.

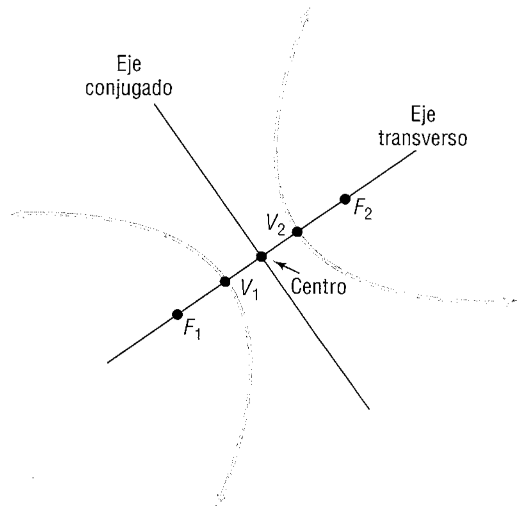
(a) Excentricidad cercana a 0 (b) Excentricidad = 0.5 (c) Excentricidad cercana a 1

La hipérbola

Hipérbola Una **hipérbola** es el conjunto de todos los puntos en el plano tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, llamados **focos,** es una constante.

La figura 31 ilustra una hipérbola con focos F_1 y F_2. La recta que contiene a los focos es llamada **eje transverso.** El punto medio del segmento de recta que une los focos es el **centro** de la hipérbola. La recta que pasa por el centro y es perpendicular al eje transverso se llama **eje conjugado.** La hipérbola consiste en dos curvas separadas, llamadas **ramas,** que son simétricas respecto al eje transverso, al eje conjugado y al centro. Los dos puntos de intersección de la hipérbola y el eje transverso son los **vértices,** V_1 y V_2, de la hipérbola.

FIGURA 31



Con estas ideas en mente, estamos preparados para encontrar la ecuación de una hipérbola en un sistema de coordenadas rectangulares. Primero, colocamos el centro en el origen. Después, situamos la hipérbola de modo que su eje transverso coincida con un eje coordenado. Suponga que el eje transverso coincide con el eje x, como se muestra en la figura 32. Si c es la distancia desde el centro hasta el foco, entonces un foco estará en $F_1 = (-c, 0)$ y el otro en $F_2 = (c, 0)$. Ahora, con $\pm 2a$ denotamos la diferencia constante de las distancias desde cualquier punto $P = (x, y)$ sobre la hipérbola hasta los focos F_1 y F_2. (Si P está en la rama derecha se usa el signo $+$; si está en la rama izquierda se usa el signo –.) Las coordenadas de P deben satisfacer la ecuación

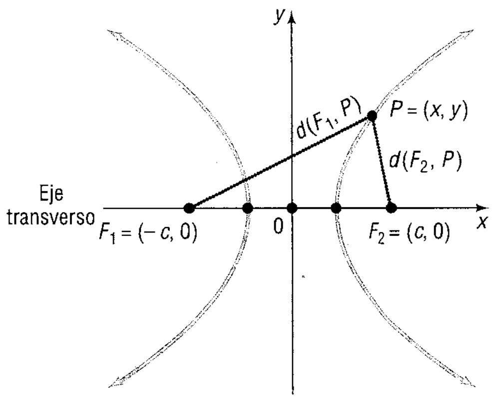
$$d(F_1, P) - d(F_2, P) = \pm 2a$$

La diferencia de las distancias desde P hasta los focos es igual a $\pm 2a$.

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

Usar la fórmula de distancia.

FIGURA 32
$d(F_1, P) - d(F_2, P) = \pm 2a$



$$\begin{aligned}
\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2} && \text{Aislar un radical.}\\
(x+c)^2+y^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} && \text{Elevar al cuadrado ambos lados.}\\
&\quad + (x-c)^2 + y^2
\end{aligned}$$

Ahora, eliminamos los paréntesis:

$$\begin{aligned}
x^2+2cx+c^2+y^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2\\
4cx - 4a^2 &= \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} && \text{Aislar un radical.}\\
cx - a^2 &= \pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2} && \text{Dividir cada lado entre 4.}\\
(cx-a^2)^2 &= a^2[(x-c)^2+y^2] && \text{Elevar al cuadrado ambos lados.}\\
c^2x^2 - 2ca^2x + a^4 &= a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)\\
c^2x^2 + a^4 &= a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2\\
(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2c^2 - a^4\\
(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2(c^2-a^2) && (1)
\end{aligned}$$

Para obtener puntos de la hipérbola que no estén sobre el eje x se debe tener $a < c$. Para ver por qué, observe otra vez la figura 32.

$$\begin{aligned}
d(F_1, P) &< d(F_2, P) + d(F_1, F_2) && \text{Usar el triángulo } F_1PF_2.\\
d(F_1, P) - d(F_2, P) &< d(F_1, F_2) && P \text{ está en la rama derecha,}\\
& && \text{así que } d(F_1, P) - d(F_2, P) = 2a.\\
2a &< 2c\\
a &< c
\end{aligned}$$

Como $a < c$, también tenemos $a^2 < c^2$, de modo que $c^2 - a^2 > 0$. Sea $b^2 = c^2 - a^2$, $b > 0$. Entonces la ecuación (1) puede ser escrita como

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Para encontrar los vértices de la hipérbola definida por esta ecuación, hagamos $y = 0$. Los vértices satisfacen la ecuación $x^2/a^2 = 1$, las soluciones son $x = \pm a$. En consecuencia, los vértices de la hipérbola son $V_1 = (-a, 0)$ y $V_2 = (a, 0)$.

Teorema Una ecuación de la hipérbola con centro en (0, 0), focos en $(-c, 0)$ y $(c, 0)$, y vértices en $(-a, 0)$ y $(a, 0)$ es

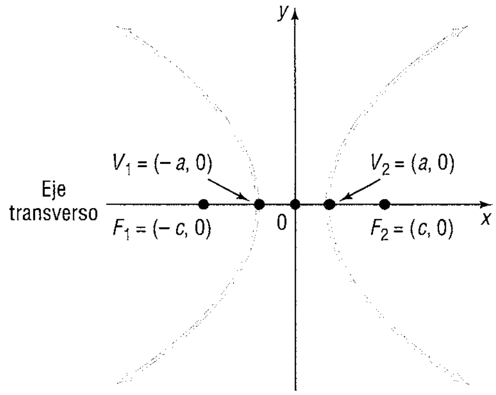
Ecuación de una hipérbola; centro en (0, 0); focos en $(\pm c, 0)$; vértices en $(\pm a, 0)$; eje transverso a lo largo del eje x

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{donde } b^2 = c^2 - a^2 \tag{2}$$

El eje transverso es el eje x.

Como puede usted verificar, la hipérbola definida por la ecuación (2) es simétrica respecto al eje x, al eje y y al origen. Para encontrar las intersecciones con el eje y, si las hay, haga $x = 0$ en la ecuación (2). Esto tiene como resultado la ecuación $y^2/b^2 = -1$, que no tiene solución. Concluimos que la hipérbola definida por la ecuación (2) no tiene intersecciones con el eje y. En realidad, como $x^2/a^2 - 1 = y^2/b^2 \geq 0$, se deduce que $x^2/a^2 \geq 1$. Así, no hay puntos de la gráfica para $-a < x < a$. *Véase* la figura 33.

FIGURA 33
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1,$
$b^2 = c^2 - a^2$



EJEMPLO 1 *Determinación de una ecuación de una hipérbola*

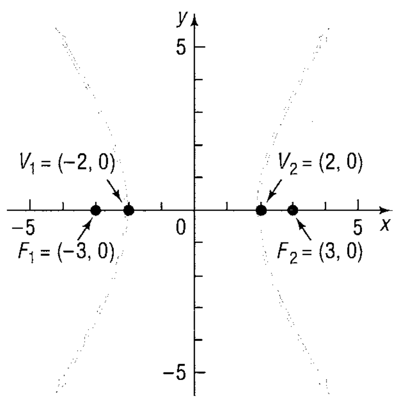
Encontrar una ecuación de la hipérbola con centro en el origen, un foco en (3, 0) y un vértice en $(-2, 0)$. Trazar la gráfica de la ecuación.

Solución La hipérbola tiene su centro en el origen, y el eje transverso coincide con el eje x. Un foco está en $(c, 0) = (3, 0)$, así que $c = 3$. Un vértice está en $(-a, 0) = (-2, 0)$, así que $a = 2$. De la ecuación (2), se deduce que $b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$, de modo que una ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

Véase la figura 34.

FIGURA 34
$\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$



Comentario: Para trazar la gráfica de la hipérbola $(x^2/4) - (y^2/5) = 1$ analizada en el ejemplo 1, necesitamos trazar la gráfica de las dos funciones $y = \sqrt{5}\sqrt{(x^2/4) - 1}$ y $y = -\sqrt{5}\sqrt{(x^2/4) - 1}$. Hágalo y compare su resultado con lo que se ve en la figura 34.

Ahora resuelva el problema 5.

Una ecuación de la forma de la ecuación (2) pertenece a una hipérbola con centro en el origen, focos en el eje x en $(-c, 0)$ y $(c, 0)$, donde $c^2 = a^2 + b^2$, y eje transverso a lo largo del eje x.

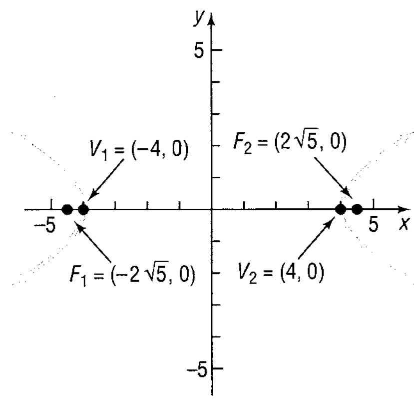
Para el resto de esta sección, la instrucción "Analizar la ecuación" significará encontrar el centro, el eje transverso, los vértices y focos de la hipérbola y trazar la gráfica de la ecuación.

EJEMPLO 2 *Análisis de la ecuación de una hipérbola*

Analizar la ecuación: $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

Solución La ecuación dada es de la forma de la ecuación (2), con $a^2 = 16$ y $b^2 = 4$. Así, su gráfica es una hipérbola con centro en (0, 0) y eje transverso a lo largo del eje x. Además, sabemos que $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 4 = 20$. Los vértices están en $(\pm a, 0) = (\pm 4, 0)$, y los focos en $(\pm c, 0) = (\pm 2\sqrt{5}, 0)$. La figura 35 muestra la gráfica.

FIGURA 35
$\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$



El enunciado siguiente nos da la forma de la ecuación de una hipérbola con centro en el origen y eje transverso a lo largo del eje y.

Teorema Una ecuación de la hipérbola con centro en (0, 0), focos en $(0, -c)$ y $(0, c)$, y vértices en $(0, -a)$ y $(0, a)$ es

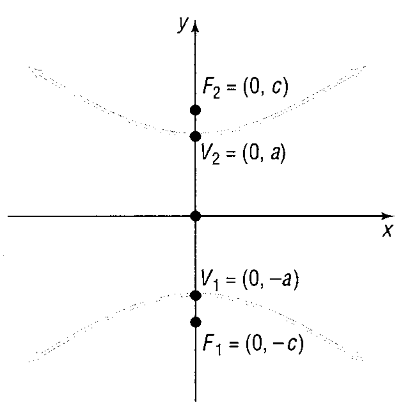
Ecuación de una hipérbola; centro en (0, 0); focos en $(0, \pm c)$; vértices en $(0, \pm a)$; eje transverso a lo largo del eje y

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \qquad \text{donde } b^2 = c^2 - a^2 \tag{3}$$

El eje transverso es el eje y.

La figura 36 muestra la gráfica de una hipérbola típica definida por la ecuación (3).

FIGURA 36
$\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1,$
$b^2 = c^2 - a^2$



Note la diferencia en la forma de las ecuaciones (2) y (3). Cuando el término con y^2 se resta del término con x^2, el eje transverso es el eje x. Cuando el término con x^2 se resta del término con y^2, el eje transverso es el eje y.

EJEMPLO 3 *Análisis de la ecuación de una hipérbola*

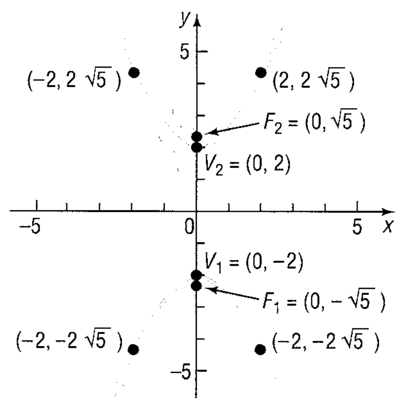
Analizar la ecuación: $y^2 - 4x^2 = 4$

Solución Para escribir la ecuación en la forma apropiada dividimos cada lado entre 4:

$$\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$$

Ya que el término con x^2 se resta del término con y^2, la ecuación pertenece a una hipérbola con centro en el origen y eje transverso a lo largo del eje y. Además, comparando la ecuación anterior con la ecuación (3), encontramos $a^2 = 4$, $b^2 = 1$, y $c^2 = a^2 + b^2 = 5$. Los vértices están en $(0, \pm a) = (0, \pm 2)$, y los focos en $(0, \pm c) = (0, \pm \sqrt{5})$. La gráfica está dada en la figura 37.

FIGURA 37
$\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$



EJEMPLO 4 *Determinación de la ecuación de una hipérbola*

Encontrar una ecuación de la hipérbola que tiene un vértice en (0, 2) y focos en (0, −3) y (0, 3). Trazar la gráfica de la ecuación.

Solución Ya que los focos están en (0, −3) y (0, 3), el centro de la hipérbola está en el origen. Además, el eje transverso se sitúa a lo largo del eje y. La información dada también revela que $c = 3$, $a = 2$, y $b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$. La forma de la ecuación de la hipérbola está dada por la ecuación (3):

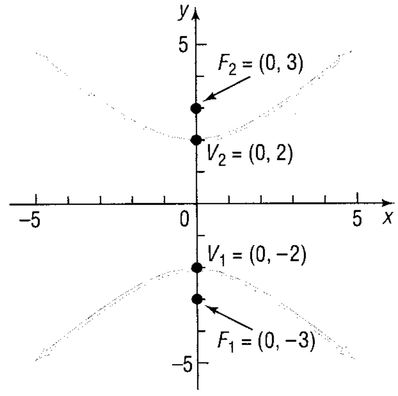
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$$

Véase la figura 38.

Ahora resuelva el problema 7.

FIGURA 38
$\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{5} = 1$



Observe las ecuaciones de las hipérbolas en los ejemplos 3 y 4. Para la hipérbola del ejemplo 3, $a^2 = 4$ y $b^2 = 1$, así que $a > b$; para la hipérbola del ejemplo 4, $a^2 = 4$ y $b^2 = 5$, así que $a < b$. Concluimos que, para hipérbolas, no hay requerimientos relativos al tamaño de a y b. Esta situación contrasta con el caso de una elipse, en el que los tamaños relativos de a y b determinan cuál eje es el eje mayor. Otra característica que las distingue de las elipses y las parábolas, es que las hipérbolas tienen asíntotas.

Asíntotas

Recuerde de la sección 5.3 que una asíntota horizontal, o una oblicua, de una gráfica es una recta con la propiedad de que la distancia desde la recta a los puntos en la gráfica se aproxima a cero cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to \infty$.

Teorema La hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ tiene las dos asíntotas oblicuas

Asíntotas de una hipérbola

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

Demostración Empezamos por resolver para y en la ecuación de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1$$

$$y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)$$

Si $x \neq 0$, podemos reacomodar el lado derecho en la forma

$$y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)$$

$$y = \pm\frac{bx}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

Ahora, cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to \infty$, el término a^2/x^2 se aproxima a cero, de modo que la expresión dentro del radical se aproxima a 1. Así, cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to \infty$, el valor de y se aproxima a $\pm bx/a$; esto es, la gráfica de la hipérbola se acerca a las rectas

$$y = -\frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = \frac{b}{a}x$$

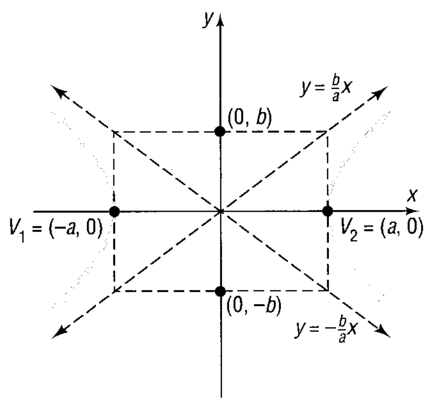
Así, estas rectas son asíntotas oblicuas de la hipérbola.

Las asíntotas de una hipérbola no son parte de ella, pero sirven como una guía para trazar su gráfica. Por ejemplo, suponga que queremos trazar la gráfica de la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Empezamos por los vértices $(-a, 0)$ y $(a, 0)$. Luego trazamos los puntos $(0, -b)$ y $(0, b)$ y usamos estos cuatro puntos para construir un rectángulo, como se muestra en la figura 39. Las diagonales de este rectángulo tienen pendientes b/a y $-b/a$, y sus prolongaciones son las asíntotas $y = (b/a)x$ y $y = -(b/a)x$ de la hipérbola.

FIGURA 39
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



La hipérbola $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ tiene las dos asíntotas oblicuas

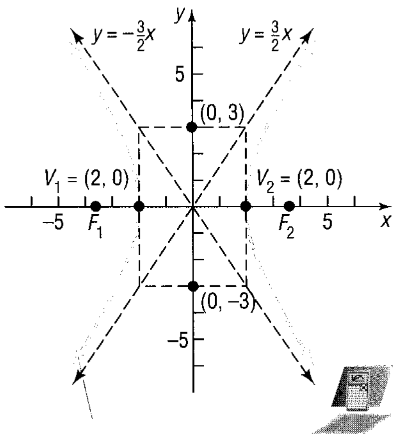
Asíntotas de una hipérbola

$$y = \frac{a}{b}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{a}{b}x$$

En el problema 60 se le pedirá que demuestre este enunciado.

Analizar la ecuación: $9x^2 - 4y^2 = 36$

FIGURA 40
$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$



Solución Primero, dividimos cada lado entre 36 para disponer la ecuación en la forma apropiada:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Esta es la ecuación de una hipérbola con centro en el origen y eje transverso a lo largo del eje x. Usando $a^2 = 4$ y $b^2 = 9$, encontramos $c^2 = a^2 + b^2 = 13$. Los vértices están en $(\pm a, 0) = (\pm 2, 0)$, los focos están en $(\pm c, 0) = (\pm\sqrt{13}, 0)$ y las asíntotas tienen las ecuaciones

$$y = \frac{3}{2}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{3}{2}x$$

Ahora construimos el rectángulo que contiene los puntos $(\pm a, 0)$ y $(0, \pm b)$, esto es, $(-2, 0)$ $(2, 0)$, $(0, -3)$, y $(0, 3)$. Las prolongaciones de las diagonales de este rectángulo son las asíntotas. *Véase* la figura 40 para apreciar la gráfica.

Exploración: Trace la parte superior de la hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$ analizada en el ejemplo 5 y sus asíntotas $y = \frac{3}{2}x$ y $y = -\frac{3}{2}x$. Ahora utilice ZOOM y TRACE para ver qué sucede cuando x aumenta sin límite en la dirección positiva. ¿Qué pasa cuando x decrece sin límite en la dirección negativa?

Ahora resuelva el problema 17.

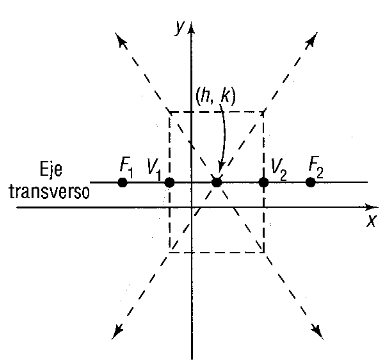
Centro en (h, k)

Si una hipérbola con centro en el origen cuyo eje transverso coincide con un eje de coordenadas es trasladada h unidades horizontalmente y luego k unidades verticalmente, el resultado será una hipérbola con centro en (h, k) y eje transverso paralelo a uno de los ejes coordenados. La tabla 4 nos da las formas de las ecuaciones de tales hipérbolas. *Véase* la figura 41 para apreciar las gráficas.

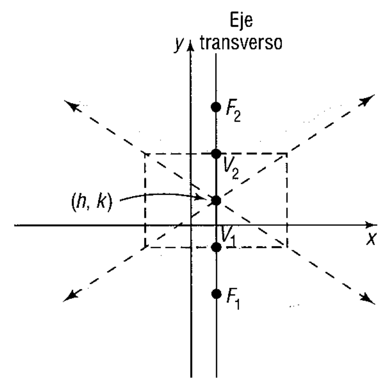
TABLA 4 HIPÉRBOLAS CON CENTRO EN (h, k) Y EJE TRANSVERSO PARALELO A UNO DE LOS EJES DE COORDENADAS

CENTRO	EJE TRANSVERSO	FOCOS	VÉRTICES	ECUACIÓN	ASÍNTOTAS
(h, k)	Paralelo al eje x	$(h \pm c, k)$	$(h \pm a, k)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, $b^2 = c^2 - a^2$	$y - k = \pm\frac{b}{a}(x - h)$
(h, k)	Paralelo al eje y	$(h, k \pm c)$	$(h, k \pm a)$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$, $b^2 = c^2 - a^2$	$y - k = \pm\frac{a}{b}(x - h)$

FIGURA 41



(a)



(b)

Determinación de una ecuación de una hipérbola con centro fuera del origen

Encontrar una ecuación para la hipérbola con centro en $(1, -2)$, un foco en $(4, -2)$, y un vértice en $(3, -2)$. Trazar la gráfica de la ecuación.

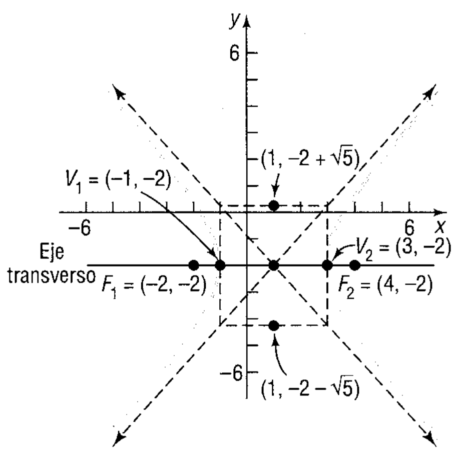
El centro está en $(h, k) = (1, -2)$, así que $h = 1$ y $k = -2$. El eje transverso es paralelo al eje x. La distancia desde el centro $(1, -2)$ al foco $(4, -2)$ es $c = 3$; la distancia desde el centro $(1, -2)$ al vértice $(3, -2)$ es $a = 2$. Así, $b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$. La ecuación es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{5} = 1$$

Véase la figura 42.

FIGURA 42 $\dfrac{(x-1)^2}{4} - \dfrac{(y+2)^2}{5} = 1$



Ahora resuelva el problema 27.

Analizar la ecuación: $-x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 11 = 0$

Completamos los cuadrados en x y en y:

$$\begin{aligned}
-x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 11 &= 0 \\
-(x^2 + 2x) + 4(y^2 - 4y) &= -11 \\
-(x^2 + 2x + 1) + 4(y^2 - 4y + 4) &= -1 + 16 - 11 \\
-(x+1)^2 + 4(y-2)^2 &= 4 \\
(y-2)^2 - \frac{(x+1)^2}{4} &= 1
\end{aligned}$$

Esta es la ecuación de una hipérbola con centro en $(-1, 2)$ y eje transverso paralelo al eje y. Además, $a^2 = 1$ y $b^2 = 4$, así que $c^2 = a^2 + b^2 = 5$. Los vértices están en $(h, k \pm a) = (-1, 2 \pm 1)$, o $(-1, 1)$ y $(-1, 3)$. Los focos están en $(h, k \pm c) = (-1, 2 \pm \sqrt{5})$. Las asíntotas son $y - 2 = \frac{1}{2}(x + 1)$ y $y - 2 = -\frac{1}{2}(x + 1)$. La figura 43 muestra la gráfica.

FIGURA 43

$$(y-2)^2 - \frac{(x+1)^2}{4} = 1$$

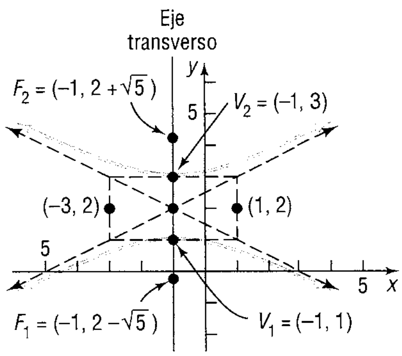
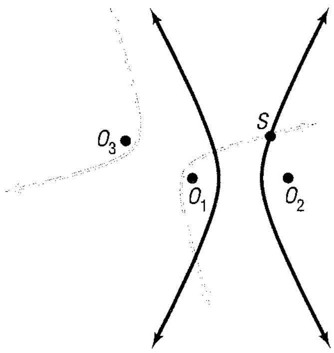


FIGURA 44



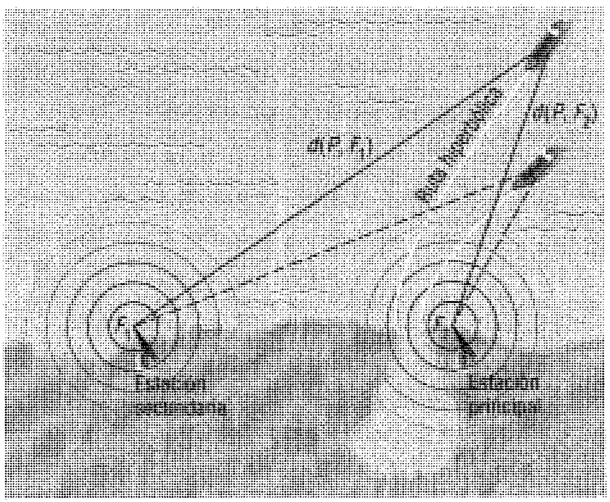
Aplicaciones

Suponga que un arma es disparada desde un origen desconocido S. Un observador en O_1 escucha la detonación (sonido del disparo) un segundo después que otro observador en O_2. Puesto que el sonido viaja a cerca de 1110 pies por segundo, se concluye que el punto S debe estar 1100 pies más cerca de O_2 que de O_1. Así, S está en una rama de una hipérbola con focos en O_1 y O_2. (¿Advierte por qué? Por que la diferencia de las distancias de S a O_1 y de S a O_2 es la constante 1100.) Si un tercer observador en O_3 escucha la misma detonación 2 segundos después que O_1, entonces S estará en una rama de una segunda hipérbola con focos en O_1 y O_3. La intersección de las dos hipérbolas señalará con precisión la ubicación de S. Para una ilustración *véase* la figura 44.

LORAN

En el Sistema de Navegación de Largo Alcance (LORAN, por sus siglas en inglés), una estación principal de radio y una estación secundaria emiten señales que pueden ser recibidas por un barco en el mar. (*Véase* la figura 45.) Aunque un barco recibe siempre las dos señales, por lo regular se halla más cerca de una de las dos estaciones y, por lo tanto, hay cierta diferencia en las distancias que recorren las dos señales, lo cual se traduce en una pequeña diferencia de tiempo entre las señales

FIGURA 45



$d(P, F_1) - d(P, F_2) =$ constante

registradas. Mientras la diferencia de tiempo permanezca constante, la diferencia de las dos distancias también será constante. Si el barco sigue una ruta que mantenga fija la diferencia de tiempo, seguirá la trayectoria de una hipérbola cuyos focos están localizados en las posiciones de las dos estaciones de radio. Así que para cada diferencia de tiempo se tiene como resultado una trayectoria hiperbólica diferente, cada una llevando al barco a una posición distinta en la costa. Las cartas de navegación muestran las diferentes rutas hiperbólicas correspondientes a diferencias de tiempo distintas.

EJEMPLO 3 *LORAN*

Dos estaciones LORAN están separadas 250 millas a lo largo de una costa recta.

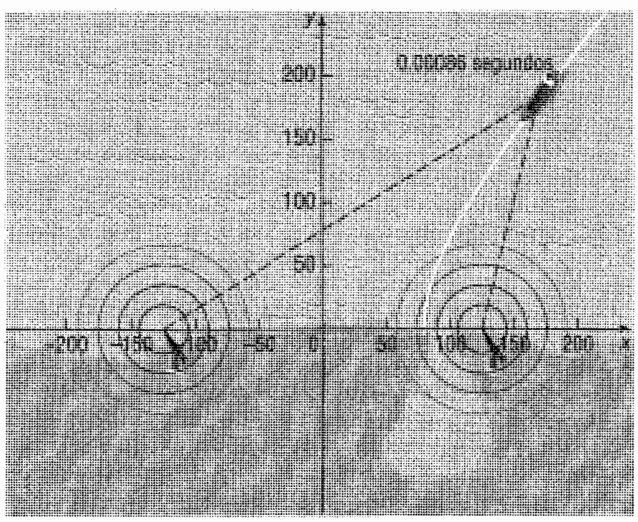
(a) Un barco registra una diferencia de tiempo de 0.00086 segundos entre las señales LORAN. Establecer un sistema de coordenadas rectangulares apropiado para determinar dónde el barco alcanzará la costa si continúa sobre la trayectoria de la hipérbola correspondiente a esta diferencia de tiempo.

(b) Si el barco debe entrar a un puerto localizado entre las dos estaciones a 25 millas desde la estación principal, ¿qué diferencia de tiempo debe observar?

(c) Si el barco está a 80 millas de la costa cuando se obtiene la diferencia de tiempo deseada, ¿cuál es su ubicación exacta? *[Nota:* La velocidad de cada señal de radio es de 186,000 millas por segundo.]

Solución (a) Establecemos un sistema de coordenadas rectangulares de modo que las dos estaciones estén en el eje x y el origen a la mitad del camino entre ellas. *Véase* la figura 46.

FIGURA 46



El barco está en una hipérbola cuyos focos son las dos estaciones de radio. La razón para esto es que la diferencia de tiempo constante de las señales desde cada estación tiene como resultado una diferencia constante en la distancia del barco a cada una de las estaciones. Como la diferencia de tiempo son 0.00086 segundos y la velocidad de la señal es de 186,000 millas por segundo, la diferencia en las distancias del barco a cada estación (focos) es

$$\text{Distancia} = \text{Velocidad} \times \text{Tiempo} = 186{,}000 \times 0.00086 = 160 \text{ millas}$$

La diferencia entre las distancias desde el barco a cada estación, 160, es igual a $2a$, así que $a = 80$ y el vértice de la hipérbola correspondiente está en $(80, 0)$.

Como el foco está en (125, 0), al seguir sobre esta hipérbola el barco alcanzará la costa a 45 millas de la estación principal.

(b) Para alcanzar la costa a 25 millas de la estación principal, el barco debe seguir una hipérbola con vértice en (100, 0). Para esta hipérbola $a = 100$, de modo que la diferencia constante entre las distancias del barco a cada estación es de 200 millas. La diferencia de tiempo que el barco debe observar es

$$\text{Tiempo} = \frac{\text{Distancia}}{\text{Velocidad}} = \frac{200}{186{,}000} = 0.001075 \text{ segundos}$$

(c) Para encontrar la ubicación exacta del barco, necesitamos determinar la ecuación de la hipérbola con vértice en (100, 0) y foco en (125, 0). La forma de la ecuación de esta hipérbola es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $a = 100$. Como $c = 125$, tenemos

$$b^2 = c^2 - a^2 = 125^2 - 100^2 = 5625$$

La ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{100^2} - \frac{y^2}{5625} = 1$$

Ya que el barco está a 80 millas de la costa, usamos $y = 80$ en la ecuación y resolvemos para x.

$$\frac{x^2}{100^2} - \frac{80^2}{5625} = 1$$

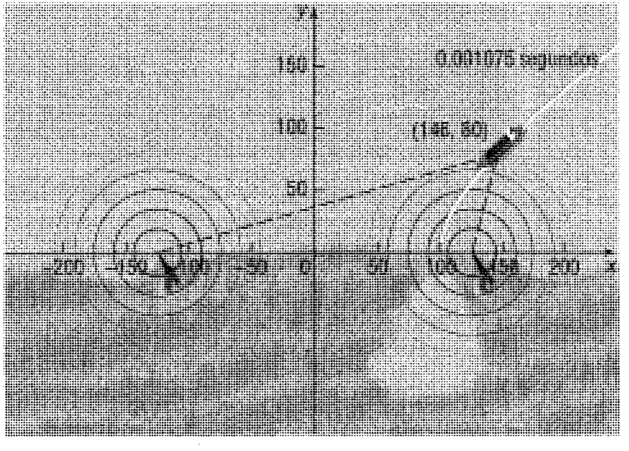
$$\frac{x^2}{100^2} = 1 + \frac{80^2}{5625} = 2.14$$

$$x^2 = 100^2(2.14)$$

$$x = 146$$

El barco está en la posición (146, 80). *Véase* la figura 47.

FIGURA 47

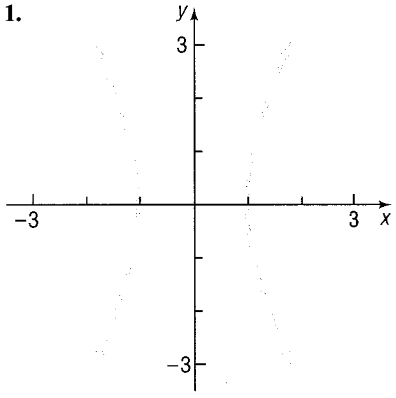


Ejercicio 9.4

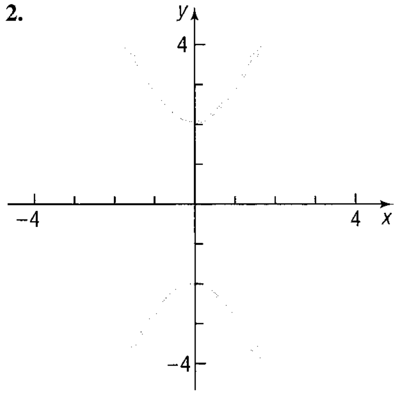
En los problemas del 1 al 4 se da la gráfica de una hipérbola. Haga corresponder cada gráfica con su ecuación.

A. $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$ *B.* $x^2 - \dfrac{y^2}{4} = 1$ *C.* $\dfrac{y^2}{4} - x^2 = 1$ *D.* $y^2 - \dfrac{x^2}{4} = 1$

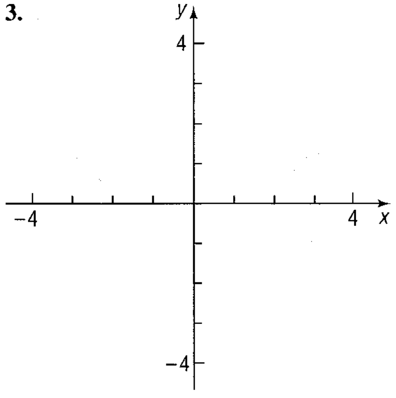
1.



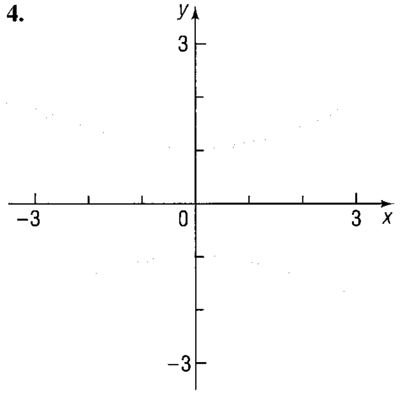
2.



3.



4.



En los problemas del 5 al 14 encuentre una ecuación para la hipérbola descrita. Trace la gráfica de la ecuación.

5. Centro en (0, 0); foco en (3, 0); vértice en (1, 0)

6. Centro en (0, 0); foco en (0, 5); vértice en (0, 3)

7. Centro en (0, 0); foco en (0, −6); vértice en (0, 4)

8. Centro en (0, 0); foco en (−3, 0); vértice en (2, 0)

9. Foco en (−5, 0) y (5, 0); vértice en (3, 0)

10. Foco en (0, 6); vértices en (0, −2) y (0, 2)

11. Vértices en (0, −6) y (0, 6); asíntota la recta $y = 2x$

12. Vértices en (−4, 0) y (4, 0); asíntota la recta $y = 2x$

13. Foco en (−4, 0) y (4, 0); asíntota la recta $y = -x$

14. Foco en (0, −2) y (0, 2); asíntota la recta $y = -x$

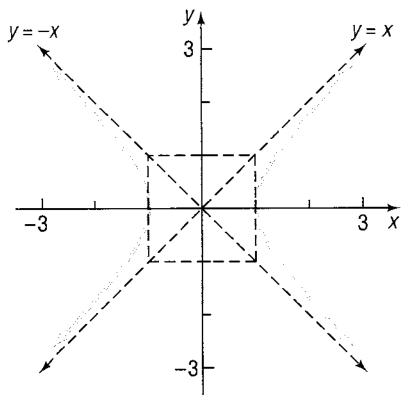
En los problemas del 15 al 22 determine el centro, el eje transverso, los vértices, focos y las asíntotas. Trace la gráfica de cada ecuación.

15. $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ **16.** $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{4} = 1$ **17.** $4x^2 - y^2 = 16$ **18.** $y^2 - 4x^2 = 16$

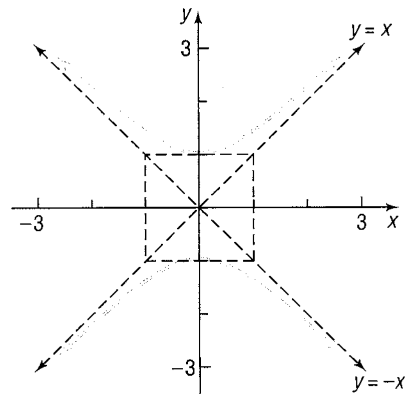
19. $y^2 - 9x^2 = 9$ **20.** $x^2 - y^2 = 4$ **21.** $y^2 - x^2 = 25$ **22.** $2x^2 - y^2 = 4$

En los problemas del 23 al 26 escriba una ecuación para cada hipérbola.

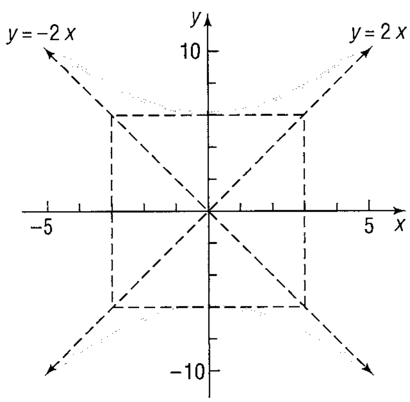
23.



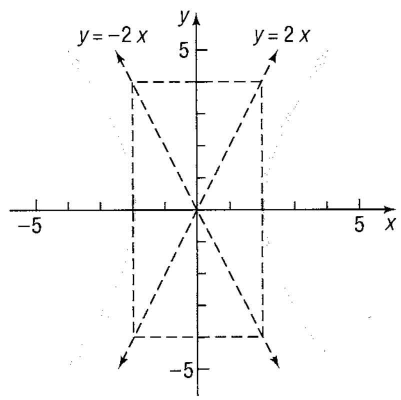
24.



25.



26.



En los problemas del 27 al 34 encuentre una ecuación para la hipérbola descrita. Trace la gráfica de la ecuación.

27. Centro en $(4, -1)$; foco en $(7, -1)$; vértice en $(6, -1)$

28. Centro en $(-3, 1)$; foco en $(-3, 6)$; vértice en $(-3, 4)$

29. Centro en $(-3, -4)$; foco en $(-3, -8)$; vértice en $(-3, -2)$

30. Centro en $(1, 4)$; foco en $(-2, 4)$; vértice en $(0, 4)$

31. Focos en $(3, 7)$ y $(7, 7)$; vértice en $(6, 7)$

32. Foco en $(-4, 0)$; vértices en $(-4, 4)$ y $(-4, 2)$

33. Vértices en $(-1, -1)$ y $(3, -1)$; asíntota de la recta $(x - 1)/2 = (y + 1)/3$

34. Vértices en $(1, -3)$ y $(1, 1)$; asíntota de la recta $(x - 1)/2 = (y + 1)/3$

En los problemas del 35 al 48 encuentre el centro, el eje transverso, los vértices, focos y las asíntotas. Trace la gráfica de cada ecuación.

35. $\dfrac{(x-2)^2}{4} - \dfrac{(y+3)^2}{9} = 1$ **36.** $\dfrac{(y+3)^2}{4} - \dfrac{(x-2)^2}{9} = 1$

37. $(y-2)^2 - 4(x+2)^2 = 4$
38. $(x+4)^2 - 9(y-3)^2 = 9$
39. $(x+1)^2 - (y+2)^2 = 4$
40. $(y-3)^2 - (x+2)^2 = 4$
41. $x^2 - y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$
42. $y^2 - x^2 - 4y + 4x - 1 = 0$
43. $y^2 - 4x^2 - 4y - 8x - 4 = 0$
44. $2x^2 - y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$
45. $4x^2 - y^2 - 24x - 4y + 16 = 0$
46. $2y^2 - x^2 + 2x + 8y + 3 = 0$
47. $y^2 - 4x^2 - 16x - 2y - 19 = 0$
48. $x^2 - 3y^2 + 8x - 6y + 4 = 0$

En los problemas del 49 al 52 trace la gráfica de cada función. [Sugerencia: Observe que cada función es la mitad de una hipérbola.]

49. $f(x) = \sqrt{16 + 4x^2}$
50. $f(x) = -\sqrt{9 + 9x^2}$
51. $f(x) = -\sqrt{-25 + x^2}$
52. $f(x) = \sqrt{-1 + x^2}$

53. *LORAN.* Dos estaciones LORAN están separadas 200 millas a lo largo de una costa recta.
   (a) Un barco registra una diferencia de tiempo de 0.00038 segundos entre las señales LORAN. Establezca un sistema de coordenadas rectangulares para determinar dónde alcanzará el barco la costa si sigue la trayectoria de la hipérbola correspondiente a esta diferencia de tiempo.
   (b) Si el barco quiere entrar al puerto localizado entre las dos estaciones a 20 millas de la estación central, ¿qué diferencia de tiempo está buscando?
   (c) Si el barco se encuentra a 50 millas mar adentro al obtener la diferencia de tiempo deseada, ¿cuál es la ubicación exacta del barco? [*Nota:* La velocidad de cada señal de radio es de 186 000 millas por segundo.]

54. *LORAN.* Dos estaciones LORAN están separadas 100 millas a lo largo de una costa recta.
   (a) Un barco registra una diferencia de tiempo de 0.00032 segundos entre las dos señales LORAN. Establezca un sistema de coordenadas rectangulares apropiado para determinar en dónde alcanzará el barco la costa si continúa sobre la hipérbola correspondiente a esta diferencia de tiempo.
   (b) Si el barco quiere entrar al puerto localizado entre las dos estaciones a 10 millas de la estación central ¿qué diferencia de tiempo está buscando?
   (c) Si el barco se encuentra a 20 millas mar adentro al obtener la diferencia de tiempo deseada, ¿cuál es la ubicación exacta del barco? [*Nota:* La velocidad de cada señal de radio es de 186 000 millas por segundo.]

55. *Calibración de instrumentos.* En una prueba aplicada a sus instrumentos de registro, un equipo de sismólogos colocaron dos de los dispositivos separados una distancia de 2000 pies, con el dispositivo A al oeste del dispositivo en el punto B. En un punto entre los dos instrumentos y a 200 pies del punto B, se detonó una pequeña cantidad de explosivos y se tomó nota del tiempo en que el sonido llegó a cada dispositivo. Se realizó una segunda explosión en un punto directamente al norte del punto B.
   (a) ¿A qué distancia al norte debe estar el sitio de la segunda explosión de modo que la diferencia del tiempo registrado por los dispositivos para la segunda detonación sea la misma que la registrada para la primera detonación?
   (b) Explique por qué este experimento puede ser utilizado para calibrar los instrumentos.

56. Explique con sus palabras el sistema LORAN de navegación.

57. La **excentricidad** e de una hipérbola se define como el número c/a, donde a y c son los números dados en la ecuación (2). Como $c > a$, se deduce que $e > 1$. Describa la forma general de una hipérbola cuya excentricidad es cercana a 1. ¿Cuál será la forma si e es muy grande?

58. Una hipérbola para la cual $a = b$ es llamada **hipérbola equilátera**. Encuentre la excentricidad e de una hipérbola equilátera. [*Nota:* La excentricidad de una hipérbola se definió en el problema 57.]

59. Dos hipérbolas que tienen el mismo conjunto de asíntotas son llamadas **conjugadas**. Demuestre que las hipérbolas

$$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1 \quad \text{y} \quad y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$$

son conjugadas. Trace la gráfica de cada hipérbola en el mismo conjunto de ejes coordenados.

60. Demuestre que la hipérbola

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

tiene las dos asíntotas oblicuas

$$y = \frac{a}{b}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{a}{b}x$$

61. Demuestre que la gráfica de una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0 \qquad A \neq 0,\ C \neq 0,\ F \neq 0$$

donde A y C son de signos opuestos, es una hipérbola con centro en $(0, 0)$.

62. Demuestre que la gráfica de una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad A \neq 0,\ C \neq 0$$

donde A y C son de signos opuestos:
(a) Es una hipérbola si $(D^2/4A) + (E^2/4C) - F \neq 0$.
(b) Son dos rectas que se cortan si $(D^2/4A) + (E^2/4C) - F = 0$.

Rotación de ejes; forma general de una cónica

En esta sección demostraremos que la gráfica de un ecuación polinomial general de segundo grado con dos variables x y y, esto es, una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (1)$$

donde A, B y C no son simultáneamente cero, es una cónica. No nos interesaremos en los casos degenerados de la ecuación (1), tales como $x^2 + y^2 = 0$, cuya gráfica es un solo punto $(0, 0)$; o $x^2 + 3y^2 + 3 = 0$, cuya gráfica no contiene puntos; o $x^2 - 4y^2 = 0$, cuya gráfica son dos rectas, $x - 2y = 0$ y $x + 2y = 0$.

Empecemos con el caso donde $B = 0$. En esta situación el término que contiene a xy no está presente, de modo que la ecuación (1) tiene la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde $A \neq 0$ o $C \neq 0$.

Ya hemos analizado el procedimiento para identificar la gráfica de esta clase de ecuación; completamos los cuadrados de las expresiones cuadráticas en x, en y, o en ambas. Una vez hecho esto, la cónica puede ser identificada comparándola con una de las formas estudiadas en las secciones 9.2, 9.3 y 9.4.

Sin embargo, podemos identificar la cónica de manera directa desde la ecuación, sin tener que completar los cuadrados.

Teorema
Identificación de las cónicas sin completar los cuadrados

Con excepción de los casos degenerados, la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (2)$$

donde $A \neq 0$ o $C \neq 0$:

(a) Define una parábola si $AC = 0$.
(b) Define una elipse (o un círculo) si $AC > 0$.
(c) Define una hipérbola si $AC < 0$.

Demostración

(a) Si $AC = 0$, entonces $A = 0$ o $C = 0$, pero no ambos, de modo que la forma de la ecuación (2) es

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad A \neq 0$$

o

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad C \neq 0$$

Al utilizar los resultados de los problemas 65 y 66 del ejercicio 9.2, se deduce que, excepto para los casos degenerados, la ecuación es una parábola.

(b) Si $AC > 0$, entonces A y C son del mismo signo. Usando los resultados de los problemas 69 y 70 del ejercicio 9.3, excepto para los casos degenerados, la ecuación es una elipse si $A \neq C$ o un círculo si $A = C$.

(c) Si $AC < 0$, entonces A y C son de signos opuestos. Usando los resultados de los problemas 61 y 62 del ejercicio 9.4, excepto para los casos degenerados, la ecuación es una hipérbola.

No es de nuestro interés analizar aquí los casos degenerados de la ecuación (2). Sin embargo, en la práctica, debe tener cuidado acerca de la posibilidad de que aparezcan.

EJEMPLO 1 *Identificación de una cónica sin completar los cuadrados*

Identificar cada ecuación sin completar los cuadrados.

(a) $3x^2 + 6y^2 + 6x - 12y = 0$ (b) $2x^2 - 3y^2 + 6y + 4 = 0$

(c) $y^2 - 2x + 4 = 0$

Solución (a) Comparamos la ecuación dada con la ecuación (2) y concluimos que $A = 3$ y $C = 6$. Como $AC = 18 > 0$, la ecuación es una elipse.

(b) Aquí, $A = 2$ y $C = -3$, de modo que $AC = -6 < 0$. La ecuación es una hipérbola.

(c) Aquí, $A = 0$ y $C = 1$, de modo que $AC = 0$. La ecuación es una parábola.

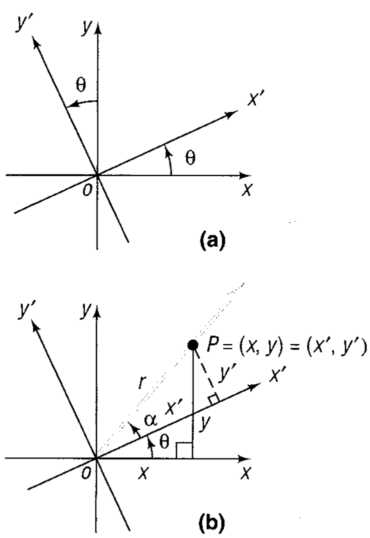
Ahora resuelva el problema 1.

Aunque ahora podemos identificar el tipo de cónica representada por cualquier ecuación de la forma de la ecuación (2) sin tener que completar los cuadrados, aún deberemos completarlos cuando queramos obtener información adicional acerca de la cónica.

Ahora pongamos nuestra atención en las ecuaciones de la forma (1), donde $B \neq 0$. Para analizar este caso, primero necesitamos investigar un procedimiento nuevo: la *rotación de ejes*.

Rotación de ejes

FIGURA 48



En una **rotación de ejes,** el origen permanece fijo mientras los ejes x y y son girados un ángulo θ hacia una posición nueva; las nuevas posiciones de los ejes x y y se denotan con x' y y', respectivamente, como se muestra en la figura 48(a).

Ahora observe la figura 48(b). Ahí el punto P tiene las coordenadas (x, y) relativas al plano xy, mientras que el mismo punto P tiene las coordenadas (x', y') relativas al plano $x'y'$. Aquí buscamos relaciones que nos permitan expresar a x y a y en términos de x', y', y θ.

Como vemos en la figura 48(b), r denota la distancia del origen O al punto P, y α denota al ángulo entre el eje positivo x' y el rayo desde O que pasa por P. Entonces, usando las definiciones de seno y coseno, tenemos

$$x' = r\cos\alpha \qquad y' = r \operatorname{sen}\alpha \tag{3}$$

$$x = r\cos(\theta + \alpha) \qquad y = r\operatorname{sen}(\theta + \alpha) \tag{4}$$

Ahora

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta + \alpha) \\ &= r\,(\cos\theta\cos\alpha - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha) && \text{Fórmula de la suma} \\ &= (r\cos\alpha)(\cos\theta) - (r\operatorname{sen}\alpha)(\operatorname{sen}\theta) \\ &= x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta && \text{Por la ecuación (3)} \end{aligned}$$

De manera análoga

$$\begin{aligned} y &= r \operatorname{sen}(\theta + \alpha) \\ &= r\,(\operatorname{sen}\theta\cos\alpha + \cos\theta\operatorname{sen}\alpha) \\ &= x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta \end{aligned}$$

Teorema
Fórmulas de rotación

Si los ejes x y y son girados un ángulo θ, las coordenadas (x, y) de un punto P relativo al plano xy y las coordenadas (x', y') del mismo punto relativas a los nuevos ejes x'- y y' estarán relacionadas por las fórmulas

$$\boxed{x = x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta \qquad y = x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta \qquad (5)}$$

EJEMPLO 2

Rotación de ejes

Expresar la ecuación $xy = 1$ en términos de las nuevas coordenadas $x'y'$ al girar los ejes un ángulo de 45°. Analizar la nueva ecuación.

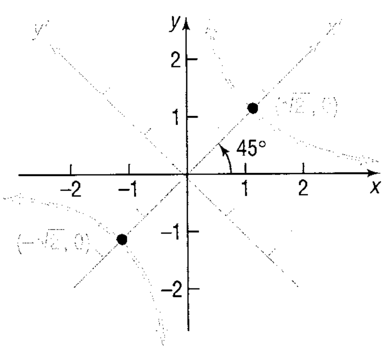
Solución Sea $\theta = 45°$ en la ecuación (5). Entonces

$$x = x' \cos 45° - y' \operatorname{sen} 45° = x'\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$$

$$y = x' \operatorname{sen} 45° + y' \cos 45° = x'\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$$

FIGURA 49

$xy = 1$ o $\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1$



Al sustituir estas expresiones para x y y en $xy = 1$ se obtiene

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')\right]\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')\right] = 1$$

$$\frac{1}{2}(x'^2 - y'^2) = 1$$

$$\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1$$

Esta es la ecuación de una hipérbola con centro en (0, 0) y eje transverso a lo largo del eje x'. Los vértices están en $(\pm\sqrt{2}, 0)$ sobre el eje x'; las asíntotas son $y' = x'$ y $y' = -x'$ (las cuales corresponden a los ejes x y y originales). *Véase* la figura 49 para apreciar la gráfica.

Como ilustra el ejemplo 2, la rotación de ejes en un ángulo apropiado puede transformar una ecuación de segundo grado en x y y que contenga el término con xy, en una ecuación en x' y y' donde no aparezca el término con $x'y'$. De hecho, demostraremos que la rotación de ejes en un ángulo apropiado podrá transformar cualquier ecuación de la forma de la ecuación (1) en una ecuación en x' y y' sin el término con $x'y'$.

Para encontrar la fórmula de seleccionar un ángulo θ apropiado para girar los ejes, empezamos con la ecuación (1),

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad B \neq 0$$

Ahora giramos en un ángulo θ usando las fórmulas de rotación (5):

$$\begin{aligned}A(x' \cos \theta - y' \operatorname{sen} \theta)^2 &+ B(x' \cos \theta - y' \operatorname{sen} \theta)(x' \operatorname{sen} \theta + y' \cos \theta)\\ &+ C(x' \operatorname{sen} \theta + y' \cos \theta)^2 + D(x' \cos \theta - y' \operatorname{sen} \theta)\\ &+ E(x' \operatorname{sen} \theta + y' \cos \theta) + F = 0\end{aligned}$$

Mediante expansión y agrupación de términos semejantes, obtenemos

$$\begin{aligned}(A \cos^2 \theta + B \operatorname{sen} \theta \cos \theta + C \operatorname{sen}^2 \theta)x'^2 &+ [B(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) + 2(C - A)(\operatorname{sen} \theta \cos \theta)]x'y'\\ &+ (A \operatorname{sen}^2 \theta - B \operatorname{sen} \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta)y'^2 \qquad (6)\\ &+ (D \cos \theta + E \operatorname{sen} \theta)x'\\ &+ (-D \operatorname{sen} \theta + E \cos \theta)y' + F = 0\end{aligned}$$

En la ecuación (6), el coeficiente de $x'y'$ es

$$B' = 2(C - A)(\operatorname{sen} \theta \cos \theta) + B(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta)$$

Ya que deseamos eliminar el término con $x'y'$, seleccionamos un ángulo θ de modo que $B' = 0$.
Así

$$\begin{aligned}2(C - A)(\operatorname{sen} \theta \cos \theta) + B(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) &= 0\\ (C - A)(\operatorname{sen} 2\theta) + B \cos 2\theta &= 0 \quad \text{Fórmulas para el ángulo doble}\\ B \cos 2\theta &= (A - C)(\operatorname{sen} 2\theta)\\ \cot 2\theta &= \frac{A - C}{B}, \qquad B \neq 0\end{aligned}$$

Teorema

Para transformar la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad B \neq 0$$

en una ecuación en x' y y' sin el término $x'y'$, se debe girar los ejes en un ángulo θ que satisfaga la ecuación

$$\boxed{\cot 2\theta = \frac{A - C}{B} \qquad (7)}$$

La ecuación (7) tiene un número infinito de soluciones para θ. Adoptaremos la convención de seleccionar el ángulo agudo θ que satisface (7). Entonces tenemos las dos posibilidades siguientes:

Si $\cot 2\theta > 0$, entonces $0 < 2\theta \leq \pi/2$ de modo que $0 < \theta \leq \pi/4$.

Si $\cot 2\theta < 0$, entonces $\pi/2 < 2\theta < \pi$ de modo que $\pi/4 < \theta < \pi/2$.

Cada uno de estos enunciados tiene como resultado una rotación de los ejes en sentido contrario al de las manecillas del reloj, en un ángulo agudo θ.*

* Cualquier rotación (en el sentido de las manecillas del reloj, o al contrario) un ángulo θ que satisface $\cot 2\theta = (A - C)/B$ eliminará el término $x'y'$. Sin embargo, las formas finales de la ecuación transformada pueden ser diferentes (pero equivalentes), dependiendo del ángulo elegido.

Advertencia: Tenga cuidado si usa una calculadora para resolver la ecuación (7).

1. Si $\cot 2\theta = 0$, entonces $2\theta = \pi/2$ y $\theta = \pi/4$.
2. Si $\cot 2\theta \neq 0$, encuentre primero $\cos 2\theta$. Luego use la(s) tecla(s) de la función inversa del coseno para obtener 2θ, $0 < 2\theta < \pi$. Finalmente, divida entre 2 para obtener el ángulo agudo θ correcto.

EJEMPLO 3 *Análisis de una ecuación usando una rotación de ejes*

Analizar la ecuación: $x^2 + \sqrt{3}xy + 2y^2 - 10 = 0$

Solución Ya que aparece un término con xy, debemos girar los ejes. Usando $A = 1$, $B = \sqrt{3}$, y $C = 2$, en la ecuación (7), el ángulo agudo θ apropiado por el cual girar los ejes resolverá la ecuación es

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}, \qquad 0° < 2\theta < 180°$$

Ya que $\cot 2\theta = -\sqrt{3}/3$, encontramos que $2\theta = 120°$, de modo que $\theta = 60°$. Usando $\theta = 60°$ en las fórmulas de rotación (5), encontramos

$$x = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' = \frac{1}{2}(x' - \sqrt{3}y')$$
$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x' + y')$$

Al sustituir estos valores en la ecuación original y simplificando, tenemos

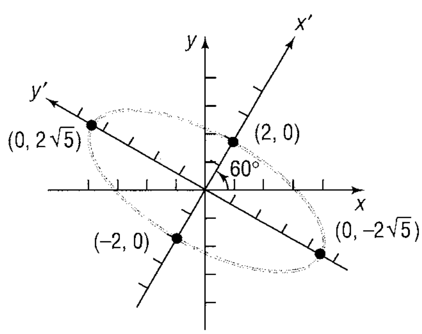
$$x^2 + \sqrt{3}xy + 2y^2 - 10 = 0$$
$$\frac{1}{4}(x' - \sqrt{3}y')^2 + \sqrt{3}\left[\frac{1}{2}(x' - \sqrt{3}y')\right]\left[\frac{1}{2}(\sqrt{3}x' + y')\right] + 2\left[\frac{1}{4}(\sqrt{3}x' + y')^2\right] = 10$$

Multiplicamos ambos lados por 4 y desarrollamos para obtener

$$x'^2 - 2\sqrt{3}x'y' + 3y'^2 + \sqrt{3}(\sqrt{3}x'^2 - 2x'y' - \sqrt{3}y'^2) + 2(3x'^2 + 2\sqrt{3}x'y' + y'^2) = 40$$
$$10x'^2 + 2y'^2 = 40$$
$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{20} = 1$$

Esta es la ecuación de una elipse con centro en (0, 0) y eje mayor a lo largo del eje y'. Los vértices están en $(0, \pm 2\sqrt{5})$ sobre el eje y'. *Véase* la gráfica en la figura 50.

FIGURA 50



Ahora resuelva el problema 21.

En el ejemplo 3, el ángulo agudo θ por el cual se giraron los ejes fue fácil de encontrar a causa de los números usados en la ecuación dada. En general, la ecuación $\cot 2\theta = (A - C)/B$ no tiene una solución sencilla. Como lo muestra el ejemplo siguiente, podemos encontrar las fórmulas de rotación apropiadas aún sin usar una aproximación de calculadora, sino aplicando las fórmulas de medio ángulo.

EJEMPLO 4

Análisis de una ecuación usando rotación de ejes

Analizar la ecuación: $4x^2 - 4xy + y^2 + 5\sqrt{5}x + 5 = 0$

Solución

Haciendo $A = 4$, $B = -4$, y $C = 1$ en la ecuación (7), el ángulo θ apropiado para girar los ejes satisface la ecuación

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B} = \frac{3}{-4}$$

A fin de usar las fórmulas de rotación (5), necesitamos conocer los valores de sen θ y cos θ. Ya que buscamos un ángulo agudo θ, sabemos que sen $\theta > 0$ y cos $\theta > 0$. Así, usamos las fórmulas para el medio ángulo en la forma siguiente

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} \qquad \cos\theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}}$$

Ahora necesitamos encontrar el valor de $\cos 2\theta$. Como $\cot 2\theta = -\frac{3}{4}$ y $\pi/2 < 2\theta < \pi$, se deduce que $\cos 2\theta = -\frac{3}{5}$. Así,

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 - (-\frac{3}{5})}{2}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 + (-\frac{3}{5})}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Con estos valores, las fórmulas de rotación (5) nos dan

$$x = \frac{\sqrt{5}}{5}x' - \frac{2\sqrt{5}}{5}y' = \frac{\sqrt{5}}{5}(x' - 2y')$$

$$y = \frac{2\sqrt{5}}{5}x' + \frac{\sqrt{5}}{5}y' = \frac{\sqrt{5}}{5}(2x' + y')$$

Al sustituir estos valores en la ecuación original y simplificando, obtenemos

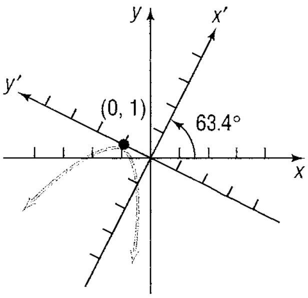
$$\begin{gathered}4x^2 - 4xy + y^2 + 5\sqrt{5}x + 5 = 0 \\ 4\left[\frac{\sqrt{5}}{5}(x' - 2y')\right]^2 - 4\left[\frac{\sqrt{5}}{5}(x' - 2y')\right]\left[\frac{\sqrt{5}}{5}(2x' + y')\right] \\ + \left[\frac{\sqrt{5}}{5}(2x' + y')\right]^2 + 5\sqrt{5}\left[\frac{\sqrt{5}}{5}(x' - 2y')\right] = -5\end{gathered}$$

Multiplicamos ambos lados por 5 y desarrollamos para obtener

$$\begin{aligned}4(x'^2 - 4x'y' + 4y'^2) - 4(2x'^2 - 3x'y' - 2y'^2)& \\ + 4x'^2 + 4x'y' + y'^2 + 25(x' - 2y') &= -25 \\ 25y'^2 - 50y' + 25x' &= -25 \\ y'^2 - 2y' + x' &= -1 \\ y'^2 - 2y' + 1 &= -x' \\ (y' - 1)^2 &= -x'\end{aligned}$$

Completar el cuadrado en y'.

FIGURA 51



Esta es la ecuación de una parábola con vértice en (0, 1) en el plano $x'y'$. El eje de simetría es paralelo al eje x'. Usando una calculadora para resolver sen $\theta = 2\sqrt{5}/5$, encontramos que $\theta \approx 63.4°$. *Véase* la gráfica en la figura 51.

Ahora resuelva el problema 27.

Identificación de las cónicas sin girar los ejes

Suponga que sólo necesitamos identificar (en lugar de analizar) una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad B \neq 0 \tag{8}$$

Si aplicamos las fórmulas de rotación (5) obtendremos una ecuación de la forma

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \tag{9}$$

donde A', B', C', D', E', y F' pueden ser expresados en términos de A, B, C, D, E, F, y el ángulo de rotación θ (*véase* el problema 43 al final de esta sección). Puede demostrarse que el valor de $B^2 - 4AC$ en la ecuación (8), y el valor de $B'^2 - 4A'C'$ en la ecuación (9) son iguales sin importar el ángulo de rotación θ que se elija (*véase* el problema 45). En particular, si el ángulo θ de rotación satisface la ecuación (7), entonces $B' = 0$ en la ecuación (9), y $B^2 - 4AC = -4A'C'$. Como la ecuación (9) tiene la forma de la ecuación (2),

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

podemos identificarla sin completar los cuadrados, como se dijo al inicio de esta sección. En realidad, podemos identificar la cónica descrita por cualquier ecuación de la forma de la ecuación (8), sin tener que girar los ejes.

Teorema identificación de cónicas sin girar los ejes

Excepto para casos degenerados, la ecuación

$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

(a) Define una parábola si $B^2 - 4AC = 0$.

(b) Define una elipse (o un círculo) si $B^2 - 4AC < 0$.

(c) Define una hipérbola si $B^2 - 4AC > 0$.

Se le pedirá que demuestre este teorema en el problema 46.

EJEMPLO 5 *Identificación de una cónica sin girar los ejes*

Identificar la ecuación: $8x^2 - 12xy + 17y^2 - 4\sqrt{5}x - 2\sqrt{5}y - 15 = 0$

Solución Aquí, $A = 8$, $B = -12$, y $C = 17$, de modo que $B^2 - 4AC = -400$. Como $B^2 - 4AC < 0$, la ecuación define una elipse.

Ahora resuelva el problema 33.

9.5

Ejercicio 9.5

En los problemas del 1 al 10 identifique cada ecuación sin completar los cuadrados.

1. $x^2 + 4x + y + 3 = 0$
2. $2y^2 - 3y + 3x = 0$
3. $6x^2 + 3y^2 - 12x + 6y = 0$
4. $2x^2 + y^2 - 8x + 4y + 2 = 0$
5. $3x^2 - 2y^2 + 6x + 4 = 0$
6. $4x^2 - 3y^2 - 8x + 6y + 1 = 0$
7. $2y^2 - x^2 - y + x = 0$
8. $y^2 - 8x^2 - 2x - y = 0$
9. $x^2 + y^2 - 8x + 4y = 0$
10. $2x^2 + 2y^2 - 8x + 8y = 0$

En los problemas del 11 al 20, determine las fórmulas de rotación apropiadas de modo que la nueva ecuación no contenga el término xy.

11. $x^2 + 4xy + y^2 - 3 = 0$
12. $x^2 - 4xy + y^2 - 3 = 0$
13. $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$
14. $3x^2 - 10xy + 3y^2 - 32 = 0$
15. $13x^2 - 6\sqrt{3}xy + 7y^2 - 16 = 0$
16. $11x^2 + 10\sqrt{3}xy + y^2 - 4 = 0$
17. $4x^2 - 4xy + y^2 - 8\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y = 0$
18. $x^2 + 4xy + 4y^2 + 5\sqrt{5}y + 5 = 0$
19. $25x^2 - 36xy + 40y^2 - 12\sqrt{13}x - 8\sqrt{13}y = 0$
20. $34x^2 - 24xy + 41y^2 - 25 = 0$

En los problemas del 21 al 32 gire los ejes de modo que la nueva ecuación no contenga el término xy. Analice y trace la gráfica de la nueva ecuación. (Consulte los problemas del 11 al 20 para resolver los del 21 al 30.)

21. $x^2 + 4xy + y^2 - 3 = 0$
22. $x^2 - 4xy + y^2 - 3 = 0$
23. $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$
24. $3x^2 - 10xy + 3y^2 - 32 = 0$
25. $13x^2 - 6\sqrt{3}xy + 7y^2 - 16 = 0$
26. $11x^2 + 10\sqrt{3}xy + y^2 - 4 = 0$
27. $4x^2 - 4xy + y^2 - 8\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y = 0$
28. $x^2 + 4xy + 4y^2 + 5\sqrt{5}y + 5 = 0$
29. $25x^2 - 36xy + 40y^2 - 12\sqrt{13}x - 8\sqrt{13}y = 0$
30. $34x^2 - 24xy + 41y^2 - 25 = 0$
31. $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 130x + 90y = 0$
32. $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 60x + 80y = 0$

En los problemas del 33 al 42 identifique cada ecuación sin girar los ejes.

33. $x^2 + 3xy - 2y^2 + 3x + 2y + 5 = 0$
34. $2x^2 - 3xy + 4y^2 + 2x + 3y - 5 = 0$
35. $x^2 - 7xy + 3y^2 - y - 10 = 0$
36. $2x^2 - 3xy + 2y^2 - 4x - 2 = 0$
37. $9x^2 + 12xy + 4y^2 - x - y = 0$
38. $10x^2 + 12xy + 4y^2 - x - y + 10 = 0$
39. $10x^2 - 12xy + 4y^2 - x - y - 10 = 0$
40. $4x^2 + 12xy + 9y^2 - x - y = 0$
41. $3x^2 - 2xy + y^2 + 4x + 2y - 1 = 0$
42. $3x^2 + 2xy + y^2 + 4x - 2y + 10 = 0$

En los problemas del 43 al 46 aplique las fórmulas de rotación (5) a

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

para obtener la ecuación

$$A'x'^2 + B'x'y + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

43. Exprese A', B', C', D', E', y F' en términos de A, B, C, D, E, F, y del ángulo de rotación θ.

44. Demuestre que $A + C = A' + C'$ para probar que $A + C$ es invariante; esto es, que su valor no cambia bajo una rotación de ejes.

45. Consulte el problema 44. Demuestre que $B^2 - 4AC$ es invariante.

46. Demuestre que, excepto para casos degenerados, la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

(a) Define una parábola si $B^2 - 4AC = 0$.
(b) Define una elipse (o un círculo) si $B^2 - 4AC < 0$.
(c) Define una hipérbola si $B^2 - 4AC > 0$.

47. Use las fórmulas de rotación (5) para demostrar que la distancia es invariante bajo una rotación de ejes. Esto es, demuestre que la distancia de $P_1 = (x_1, y_1)$ to $P_2 = (x_2, y_2)$ en el plano xy es igual a la distancia de $P_1 = (x_1', y_1')$ a $P_2 = (x_2', y_2')$ en el plano $x'y'$.

48. Demuestre que la gráfica de la ecuación $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$ es parte de la gráfica de una parábola.

49. Formule una estrategia para analizar y trazar la gráfica de una ecuación de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. ¿Cómo cambia su estrategia si la ecuación es de la forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$?

Ecuaciones polares de las cónicas

En las secciones 9.2, 9.3 y 9.4, dimos definiciones separadas para la parábola, la elipse y la hipérbola con base en propiedades geométricas y la fórmula de distancia. En esta sección presentamos una definición alternativa que define de manera simultánea a todas estas cónicas. Como veremos, este enfoque es muy adecuado para la representación en coordenadas polares. (Consúltese la sección 8.4.)

Cónica

Sean D una recta fija llamada **directriz,** F un punto fijo llamado **foco,** que no está en D, y e un número positivo fijo llamado **excentricidad.** Una **cónica** es el conjunto de todos los puntos P en el plano tales que la razón de la distancia desde F a P a la distancia de P a D es igual a e. Así, una cónica es la colección de puntos P para los cuales

$$\frac{d(F, P)}{d(P, D)} = e \qquad (1)$$

Si $e = 1$, la cónica es una **parábola.**

Si $e < 1$, la cónica es una **elipse.**

Si $e > 1$, la cónica es una **hipérbola.**

Observe que si $e = 1$, la definición de una parábola en la ecuación (1) es exactamente la misma que la usada en la sección 9.2.

En el caso de una elipse, el **eje mayor** es una recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz. En el caso de una hipérbola, el eje transverso es una recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz. Para una elipse y una hipérbola, la excentricidad e satisface

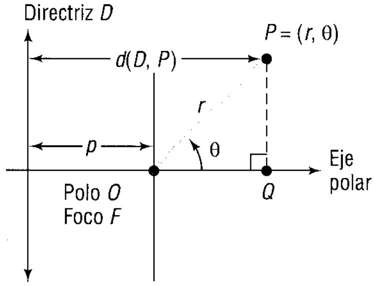
$$e = \frac{c}{a} \qquad (2)$$

donde c es la distancia desde el centro al foco y a la distancia desde el centro a un vértice.

Igual que como lo hicimos antes usando coordenadas rectangulares, deducimos las ecuaciones para las cónicas en coordenadas polares seleccionando una posición conveniente para el foco F y la directriz D. El foco F se coloca en el polo, y la directriz D es paralela o perpendicular al eje polar.

Suponga que empezamos con la directriz D perpendicular al eje polar a una distancia de p unidades a la izquierda del polo (el foco F). *Véase* la figura 52.

FIGURA 52



Si $P = (r, \theta)$ es cualquier punto en la cónica, entonces, por la ecuación (1),

$$\frac{d(F, P)}{d(D, P)} = e \quad \text{o} \quad d(F, P) = e \cdot d(D, P) \tag{3}$$

Ahora usamos el punto Q obtenido al bajar la perpendicular desde P hasta el eje polar para calcular $d(D, P)$:

$$d(D, P) = p + d(O, Q) = p + r\cos\theta$$

Al usar esta expresión y el hecho de que $d(F, P) = d(O, P) = r$ en la ecuación (3), obtenemos

$$\begin{aligned} d(F, P) &= e \cdot d(D, P) \\ r &= e(p + r\cos\theta) \\ r &= ep + er\cos\theta \\ r - er\cos\theta &= ep \\ r(1 - e\cos\theta) &= ep \\ r &= \frac{ep}{1 - e\cos\theta} \end{aligned}$$

La ecuación polar de una cónica con foco en el polo y directriz perpendicular al eje polar a una distancia p a la izquierda del polo es

$$r = \frac{ep}{1 - e\cos\theta} \tag{4}$$

donde e es la excentricidad de la cónica.

Identificar y trazar la gráfica de la ecuación: $r = \dfrac{4}{2 - \cos\theta}$

La ecuación dada no está completamente en la forma de la ecuación (4), ya que el primer término en el denominador es 2 en lugar de 1. Así, dividimos el numerador y el denominador entre 2 para obtener

$$r = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}\cos\theta}$$

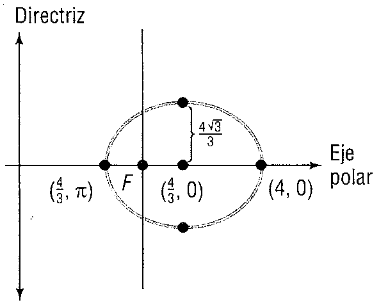
Esta ecuación está en la forma de la ecuación (4), con

$$e = \tfrac{1}{2} \quad \text{y} \quad ep = \tfrac{1}{2}p = 2$$

Así, $e = \frac{1}{2}$ y $p = 4$. Concluimos que la cónica es una elipse, ya que $e = \frac{1}{2} < 1$. Un foco está en el polo, y la directriz es perpendicular al eje polar, a una distancia de

4 unidades a la izquierda del polo. Se deduce que el eje mayor está a lo largo del eje polar. Para encontrar los vértices, hacemos $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. Así, los vértices de la elipse son $(4, 0)$ y $(\frac{4}{3}, \pi)$. En el punto medio de los vértices, localizamos el centro de la elipse en $(\frac{4}{3}, 0)$. [¿Advierte por qué? Por que los vértices $(4, 0)$ y $(\frac{4}{3}, \pi)$ en coordenadas polares son $(4, 0)$ y $(-\frac{4}{3}, 0)$ en coordenadas rectangulares. El punto medio en coordenadas rectangulares es $(\frac{4}{3}, 0)$, que también es $(\frac{4}{3}, 0)$ en coordenadas polares.] Así, a es igual a la distancia desde el centro hasta un vértice $= \frac{8}{3}$. Usando $a = \frac{8}{3}$ y $e = \frac{1}{2}$ en la ecuación (2), $e = c/a$, encontramos $c = \frac{4}{3}$. Por último usando $a = \frac{8}{3}$ y $c = \frac{4}{3}$ en $b^2 = a^2 - c^2$, tenemos

FIGURA 53



$$b^2 = a^2 - c^2 = \frac{64}{9} - \frac{16}{9} = \frac{48}{9}$$

$$b = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

La figura 53 muestra la gráfica.

Verificación: Trazar la gráfica de $r = 4/(2 - \cos\theta)$ y comparar el resultado con la figura 53.

Exploración: Trace la gráfica de $r = 4/(2 + \cos\theta)$ y compare el resultado con la figura 53. ¿Qué puede concluir? Borre la pantalla y trace la gráfica de $r = 4/(2 - \operatorname{sen}\theta)$ y luego la de $r = 4/(2 + \operatorname{sen}\theta)$. Compare cada una de estas gráficas con la figura 53. ¿Qué puede concluir?

Ahora resuelva el problema 5.

La ecuación (4) fue obtenida bajo la hipótesis de que la directriz era perpendicular al eje polar a una distancia de p unidades a la izquierda del polo. Una deducción semejante (*véase* el problema 37), en la cual la directriz es perpendicular al eje polar a una distancia de p unidades a la derecha del polo, tiene como resultado la ecuación

$$\boxed{r = \frac{ep}{1 + e\cos\theta}}$$

En los problemas 38 y 39 se le pide que deduzca las ecuaciones polares de cónicas con foco en el polo y directriz paralela al eje polar. La tabla 5 resume las ecuaciones polares de las cónicas.

TABLA 5 **ECUACIONES POLARES DE LAS CÓNICAS (FOCO EN EL POLO, EXCENTRICIDAD e)**

ECUACIÓN	DESCRIPCIÓN
(a) $r = \dfrac{ep}{1 - e\cos\theta}$	La directriz es perpendicular al eje polar a una distancia de p unidades a la izquierda del polo.
(b) $r = \dfrac{ep}{1 + e\cos\theta}$	La directriz es perpendicular al eje polar a una distancia de p unidades a la derecha del polo.
(c) $r = \dfrac{ep}{1 + e\operatorname{sen}\theta}$	La directriz es paralela al eje polar a una distancia de p unidades por arriba del polo.
(d) $r = \dfrac{ep}{1 - e\operatorname{sen}\theta}$	La directriz es paralela al eje polar a una distancia de p unidades por abajo del polo.

EXCENTRICIDAD

Si $e = 1$, la cónica es una parábola; el eje de simetría es perpendicular a la directriz.
Si $e < 1$, la cónica es una elipse; el eje mayor es perpendicular a la directriz.
Si $e > 1$, la cónica es una hipérbola; el eje transverso es perpendicular a la directriz.

EJEMPLO 2 *Identificación y graficación de la ecuación polar de una cónica*

Identificar y trazar la gráfica de la ecuación: $r = \dfrac{6}{3 + 3 \operatorname{sen} \theta}$

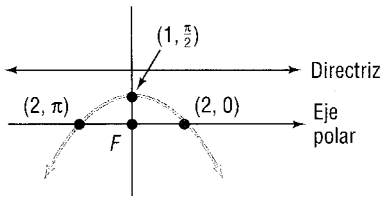
Solución Colocamos la ecuación en forma apropiada, y dividimos el numerador y el denominador entre 3 para obtener

$$r = \frac{2}{1 + \operatorname{sen} \theta}$$

Con referencia a la tabla 5, concluimos que esta ecuación está en la forma de la ecuación (c) con

$$e = 1 \quad \text{y} \quad ep = 2$$

FIGURA 54



Así, $e = 1$ y $p = 2$. La cónica es una parábola con foco en el polo. La directriz es paralela al eje polar a una distancia de 2 unidades arriba del polo; el eje de simetría es perpendicular al eje polar. El vértice de la parábola está en $(1, \pi/2)$. (¿Advierte por qué?) Para apreciar la gráfica *véase* la figura 54. Observe que trazamos dos puntos más, $(2, 0)$ y $(2, \pi)$, para ayudarnos en el proceso de graficación.

Verificación: Trazar la gráfica de $r = 6/(3 + 3 \operatorname{sen} \theta)$ y comparar el resultado con la figura 54.

Ahora resuelva el problema 7.

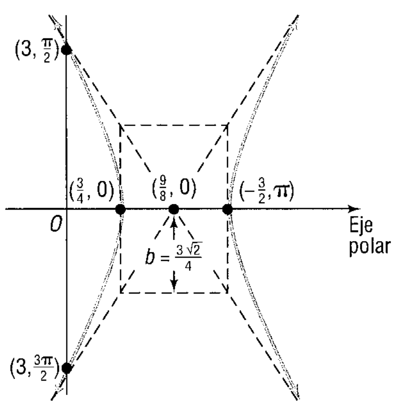
EJEMPLO 3 *Identificación y graficación de la ecuación polar de una cónica*

Identificar y trazar la gráfica de la ecuación: $r = \dfrac{3}{1 + 3 \cos \theta}$

Solución Esta ecuación está en la forma de la ecuación (b) de la tabla 5. Concluimos que

$$e = 3 \quad \text{y} \quad ep = 3p = 3$$

FIGURA 55



Así, $e = 3$ y $p = 1$. Esta es la ecuación de una hipérbola con un foco en el polo. La directriz es perpendicular al eje polar en una unidad a la derecha del polo. El eje transverso está a lo largo del eje polar. Para encontrar los vértices, hacemos $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. Así, los vértices son $(\frac{3}{4}, 0)$ y $(-\frac{3}{2}, \pi)$. El centro está en el punto medio de $(\frac{3}{4}, 0)$ y $(-\frac{3}{2}, \pi)$, que es $(\frac{9}{8}, 0)$. Por lo tanto, c = es igual a la distancia desde el centro hasta un foco $= \frac{9}{8}$. Ya que $e = 3$, se deduce de la ecuación (2), $e = c/a$, que $a = \frac{3}{8}$. Por último, utilizando $a = \frac{3}{8}$ y $c = \frac{9}{8}$ en $b^2 = c^2 - a^2$, encontramos

$$b^2 = c^2 - a^2 = \frac{81}{64} - \frac{9}{64} = \frac{72}{64} = \frac{9}{8}$$

$$b = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

La figura 55 muestra la gráfica. Obsérvese que trazamos dos puntos más, $(3, \pi/2)$ y $(3, 3\pi/2)$, en la rama izquierda y usamos simetría para obtener la rama derecha. Las asíntotas de esta hipérbola se encontraron de la manera usual construyendo el rectángulo que también se muestra.

Verificación: Trazar la gráfica de $r = 3/(1 + 3 \cos \theta)$ y comparar el resultado con la figura 55.

Ahora resuelva el problema 11.

EJEMPLO 4 *Conversión de una ecuación polar a una ecuación rectangular*

Convertir la ecuación polar

$$r = \frac{1}{3 - 3\cos\theta}$$

a una ecuación rectangular.

Solución Aquí la estrategia será reacomodar primero la ecuación y elevar al cuadrado cada lado, antes de usar las ecuaciones de transformación:

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{3 - 3\cos\theta} \\ 3r - 3r\cos\theta &= 1 \\ 3r &= 1 + 3r\cos\theta && \text{Reacomodar la ecuación.} \\ 9r^2 &= (1 + 3r\cos\theta)^2 && \text{Elevar al cuadrado cada lado.} \\ 9(x^2 + y^2) &= (1 + 3x)^2 && \text{Usar las ecuaciones de transformación.} \\ 9x^2 + 9y^2 &= 9x^2 + 6x + 1 \\ 9y^2 &= 6x + 1 \end{aligned}$$

Esta es la ecuación de una parábola en coordenadas rectangulares.

Ahora resuelva el problema 19.

Ejercicio 9.6

En los problemas del 1 al 6 identifique la cónica que representa cada ecuación polar. Además, dé la posición de la directriz.

1. $r = \dfrac{1}{1 + \cos\theta}$ **2.** $r = \dfrac{3}{1 - \operatorname{sen}\theta}$ **3.** $r = \dfrac{4}{2 - 3\operatorname{sen}\theta}$

4. $r = \dfrac{2}{1 + 2\cos\theta}$ **5.** $r = \dfrac{3}{4 - 2\cos\theta}$ **6.** $r = \dfrac{6}{8 + 2\operatorname{sen}\theta}$

En los problemas del 7 al 18, identifique y trace la gráfica de cada ecuación.

7. $r = \dfrac{1}{1 + \cos\theta}$ **8.** $r = \dfrac{3}{1 - \operatorname{sen}\theta}$ **9.** $r = \dfrac{8}{4 + 3\operatorname{sen}\theta}$

10. $r = \dfrac{10}{5 + 4\cos\theta}$ **11.** $r = \dfrac{9}{3 - 6\cos\theta}$ **12.** $r = \dfrac{12}{4 + 8\operatorname{sen}\theta}$

13. $r = \dfrac{8}{2 - \operatorname{sen}\theta}$ **14.** $r = \dfrac{8}{2 + 4\cos\theta}$ **15.** $r(3 - 2\operatorname{sen}\theta) = 6$

16. $r(2 - \cos\theta) = 2$ **17.** $r = \dfrac{6\sec\theta}{2\sec\theta - 1}$ **18.** $r = \dfrac{3\csc\theta}{\csc\theta - 1}$

En los problemas del 19 al 30 convierta cada ecuación polar en una ecuación rectangular.

19. $r = \dfrac{1}{1 + \cos\theta}$ **20.** $r = \dfrac{3}{1 - \operatorname{sen}\theta}$ **21.** $r = \dfrac{8}{4 + 3\operatorname{sen}\theta}$

22. $r = \dfrac{10}{5 + 4\cos\theta}$ **23.** $r = \dfrac{9}{3 - 6\cos\theta}$ **24.** $r = \dfrac{12}{4 + 8\operatorname{sen}\theta}$

25. $r = \dfrac{8}{2 - \operatorname{sen}\theta}$

26. $r = \dfrac{8}{2 + 4\cos\theta}$

27. $r(3 - 2\operatorname{sen}\theta) = 6$

28. $r(2 - \cos\theta) = 2$

29. $r = \dfrac{6\sec\theta}{2\sec\theta - 1}$

30. $r = \dfrac{3\csc\theta}{\csc\theta - 1}$

En los problemas del 31 al 36 encuentre una ecuación polar para cada cónica. En todas ellas, un foco está en el polo.

31. $e = 1$; la directriz es paralela al eje polar una unidad arriba del polo

32. $e = 1$; la directriz es paralela al eje polar 2 unidades abajo del polo

33. $e = \frac{4}{5}$; la directriz es perpendicular al eje polar 3 unidades a la izquierda del polo

34. $e = \frac{2}{3}$; la directriz es paralela al eje polar 3 unidades arriba del polo

35. $e = 6$; la directriz es paralela al eje polar 2 unidades abajo del polo

36. $e = 5$; la directriz es perpendicular al eje polar 5 unidades a la derecha del polo

37. Deduzca la ecuación (b) de la tabla 5: $r = \dfrac{ep}{1 + e\cos\theta}$

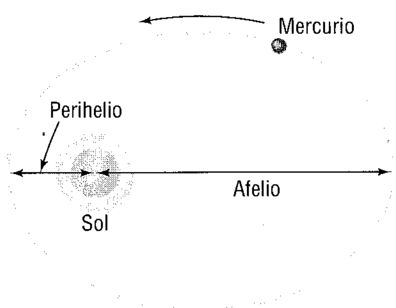
38. Deduzca la ecuación (c) de la tabla 5: $r = \dfrac{ep}{1 + e\operatorname{sen}\theta}$

39. Deduzca la ecuación (d) de la tabla 5: $r = \dfrac{ep}{1 - e\operatorname{sen}\theta}$

40. El planeta Mercurio viaja alrededor del Sol en una órbita elíptica dada de manera aproximada por

$$r = \frac{(3.442)10^7}{1 - 0.206\cos\theta}$$

donde r se mide en millas y el Sol está en el polo. Encuentre la distancia de Mercurio al Sol en el afelio (máxima distancia al Sol) y en el perihelio (mínima distancia al Sol). *Véase* la figura al margen.



Curvas planas y ecuaciones paramétricas

Las ecuaciones de la forma $y = f(x)$, donde f es una función, tienen gráficas que son cortadas a lo más una vez por cualquier línea vertical. Las gráficas de muchas de las cónicas y otras gráficas más complicadas no tienen esta característica. Aún así cada gráfica, al igual que la gráfica de una función, es una colección de puntos (x, y) en el plano xy; esto es, cada una es una curva plana. En esta sección analizaremos otra manera de representar tales gráficas.

Curvas planas

Sea $x = f(t)$ y $y = g(t)$, donde f y g son dos funciones cuyo dominio común es algún intervalo I. La colección de puntos definidos por

$$(x, y) = (f(t), g(t))$$

es llamado **curva plana**. Las ecuaciones

$$x = f(t) \qquad y = g(t)$$

donde t está en I, son llamadas **ecuaciones paramétricas** de la curva. La variable t es un **parámetro**.

Las ecuaciones paramétricas son útiles, particularmente al describir un movimiento a lo largo de una curva. Suponga que una curva está definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = f(t) \qquad y = g(t)$$

donde f y g están definidas, cada una, sobre algún intervalo I. Para un valor dado de t en I, podemos encontrar el valor de $x = f(t)$ y de $y = g(t)$, así se obtiene un punto (x, y) sobre la curva. En realidad, cuando t varía en el intervalo I en algún orden, digamos de izquierda a derecha, los valores sucesivos de t dan el sentido del movimiento en toda la extensión de la curva. Esto es, cuando t varía sobre I en algún orden, la curva es trazada en una cierta dirección por la correspondiente sucesión de puntos (x, y). *Veamos* un ejemplo.

EJEMPLO 1 *Análisis de una curva definida por ecuaciones paramétricas*

Analizar la curva definida por las ecuaciones paramétricas

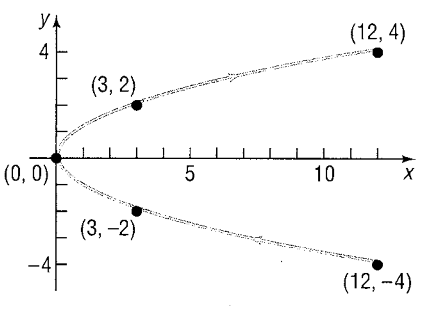
$$x = 3t^2 \qquad y = 2t, \qquad -2 \le t \le 2 \tag{1}$$

Solución A cada número t, $-2 \le t \le 2$, le corresponde un número x y un número y. Por ejemplo, cuando $t = -2$, entonces $x = 12$ y $y = -4$. Cuando $t = 0$, then $x = 0$ y $y = 0$ En realidad, podemos construir una tabla enlistando varios valores del parámetro t y los valores correspondientes para x y y, como se muestra en la tabla 6. Trazando estos puntos y conectándolos mediante una curva suave se obtiene la figura 56.

TABLA 6

t	x	y	(x, y)
−2	12	−4	(12, −4)
−1	3	−2	(3, −2)
0	0	0	(0, 0)
1	3	2	(3, 2)
2	12	4	(12, 4)

FIGURA 56



Observe las flechas en la curva de la figura 56. Ellas indican la dirección u **orientación** de la curva al aumentar los valores del parámetro t.

Ahora resuelva el problema 1.

Comentario: La mayor parte de los dispositivos de graficación tiene capacidad para trazar la gráfica de ecuaciones paramétricas. Verifique en cada manual cómo se hace esto.

Verificación: Trace la gráfica de $x = 3t^2$, $y = 2t$, $-2 \le t \le 2$, y compare el resultado con la figura 56.

Las ecuaciones paramétricas que definen a una curva no son únicas. Puede verificarse que la curva en la figura 56 también puede ser definida por cualquiera de las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$x = \frac{3t^2}{4} \qquad y = t, \qquad -4 \le t \le 4$$

o

$$x = 3t^2 + 12t + 12 \qquad y = 2t + 4, \qquad -4 \le t \le 0$$

o

$$x = 3t^{2/3} \qquad y = 2\sqrt[3]{t}, \qquad -8 \leq t \leq 8$$

La curva de la figura 56 debe serle conocida. Para identificarla de manera precisa, encontremos la ecuación rectangular correspondiente eliminando el parámetro t de las ecuaciones paramétricas (1) dadas en el ejemplo 1,

$$x = 3t^2 \qquad y = 2t, \qquad -2 \leq t \leq 2$$

Podemos despejar t en $y = 2t$, obteniendo $t = y/2$, sustituimos esta expresión en la otra ecuación:

$$x = 3t^2 \underset{t=\frac{y}{2}}{\overset{\uparrow}{=}} 3\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{3y^2}{4}$$

Esta ecuación, $x = 3y^2/4$, es la ecuación de una parábola con vértice en (0, 0) y eje a lo largo del eje x.

Note que la curva paramétrica definida por la ecuación (1) y mostrada en la figura 56, sólo es una parte de la parábola $x = 3y^2/4$. Así, la gráfica de la ecuación rectangular obtenida eliminando el parámetro, en general tendrá más puntos que la curva original definida de manera paramétrica. Por lo tanto, se debe tener cuidado cuando se trace una curva de este tipo después de eliminar el parámetro. Sin embargo, aplicar el proceso de eliminación del parámetro t en una curva definida de manera paramétrica para identificarla de manera precisa, algunas veces es un mejor enfoque que sólo trazar puntos; pero en ocasiones requiere de un poco de ingenio.

EJEMPLO 2 *Determinación de la ecuación rectangular de una curva definida de manera paramétrica*

Encontrar la ecuación rectangular de la curva cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = a \cos t \qquad y = a \operatorname{sen} t$$

donde $a > 0$ es una constante. Trazar la gráfica de esta curva, indicando su orientación.

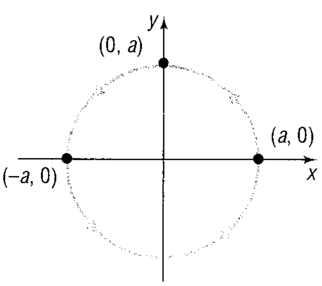
Solución La presencia de senos y cosenos en la ecuación paramétrica sugiere que usemos una identidad pitagórica. De hecho, como

$$\cos t = \frac{x}{a} \qquad \operatorname{sen} t = \frac{y}{a}$$

encontramos que

$$\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1$$
$$x^2 + y^2 = a^2$$

FIGURA 57



Así, la curva es un círculo con centro en (0, 0) y radio a. Cuando el parámetro t crece, digamos desde $t = 0$ [el punto $(a, 0)$] a $t = \pi/2$ [el punto (0, a)] a $t = \pi$ [el punto $(-a, 0)$], vemos que los puntos correspondientes son trazados alrededor del círculo en dirección contraria al sentido de las manecillas del reloj. De aquí que la orientación sea como se indica en la figura 57.

Ahora resuelva el problema 13.

Analicemos un poco más la curva del ejemplo 2. El dominio de cada ecuación paramétrica es $-\infty < t < \infty$. Así, la gráfica de la figura 57 en realidad se repite cada vez que t aumenta en 2π. Si queremos que la curva consista de exactamente una vuelta en dirección contraria al sentido de las manecillas del reloj, podríamos escribir

$$x = a\cos t \qquad y = a\cos t, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Esta curva empieza en $t = 0$ [el punto $(a, 0)$] y, avanzando alrededor del círculo en sentido contrario al de las manecillas del reloj, termina en $t = 2\pi$ [también el punto $(a, 0)$].

Si queremos que la curva consista de exactamente tres vueltas en la dirección contraria al sentido de las manecillas del reloj, podríamos escribir

$$x = a\cos t \qquad y = a\,\mathrm{sen}\,t, \qquad -2\pi \le t \le 4\pi$$

o

$$x = a\cos t \qquad y = a\,\mathrm{sen}\,t, \qquad 0 \le t \le 6\pi$$

o

$$x = a\cos t \qquad y = a\,\mathrm{sen}\,t, \qquad 2\pi \le t \le 8\pi$$

FIGURA 58

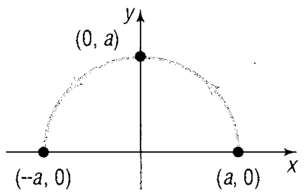
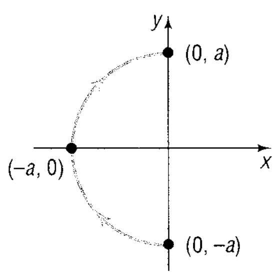


FIGURA 59



Si queremos que la curva consista del semicírculo superior de radio a con una orientación en sentido contrario al de las manecillas del reloj, podríamos escribir

$$x = a\cos t \qquad y = a\,\mathrm{sen}\,t, \qquad 0 \le t \le \pi$$

Véase la figura 58.

Si queremos que la curva consista del semicírculo izquierdo de radio a con una orientación en el sentido del giro de las manecillas del reloj, podríamos escribir

$$x = -a\,\mathrm{sen}\,t \qquad y = -a\cos t, \qquad 0 \le t \le \pi$$

Véase la figura 59.

El tiempo como un parámetro

Si pensamos en parámetro t como el tiempo, entonces las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$ de una curva C especifican cómo las coordenadas x y y de un punto en movimiento varían con el tiempo.

Por ejemplo, podemos usar las ecuaciones paramétricas para describir el movimiento de un objeto, llamado algunas veces **movimiento curvilíneo.** Usando ecuaciones paramétricas, podemos especificar no sólo en dónde se halla el objeto, su posición (x, y), sino también cuándo está allí, esto es, el tiempo.

EJEMPLO 3 *Descripción del movimiento de un objeto*

Describir el movimiento de un objeto que se mueve a lo largo de la curva

$$x = 4\,\mathrm{sen}\,t \qquad y = 3\cos t, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

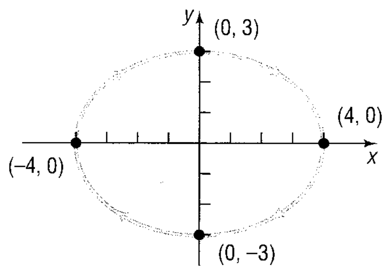
Solución Eliminamos el parámetro t usando la identidad pitagórica $\mathrm{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$, obteniendo

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

La curva es una elipse con centro en (0, 0), el eje mayor está a lo largo del eje x y los vértices están en $(\pm 4, 0)$. Cuando t varía desde $t = 0$ hasta $t = 2\pi$, el objeto se mueve alrededor de la elipse en dirección contraria al sentido de las manecillas del reloj iniciando en (0, 3), llegando a (4, 0) cuando $t = \pi/2$ y $(0, -3)$ cuando $t = \pi$, y finalizando en (0, 3) cuando $t = 2\pi$. *Véase* la figura 60.

FIGURA 60



Verificación: Trazar la gráfica de $x = 4$ sen t, $y = 3 \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, y comparar el resultado con la figura 60.

Determinación de ecuaciones paramétricas

Ahora estudiaremos cómo encontrar ecuaciones paramétricas de una curva dada.

Si la curva está definida por la ecuación $y = f(x)$, donde f es una función, una manera de encontrar sus ecuaciones paramétricas es haciendo simplemente $x = t$. Entonces $y = f(t)$. Así,

$$x = t \qquad y = f(t), \qquad t \text{ en en el dominio de } f$$

son las ecuaciones paramétricas de la curva.

EJEMPLO 4 *Determinación de ecuaciones paramétricas para una curva definida por una ecuación rectangular*

Encontrar ecuaciones paramétricas para la ecuación: $y = x^2 - 4$

Solución Sea $x = t$. Entonces las ecuaciones paramétricas son

$$x = t \qquad y = t^2 - 4, \qquad -\infty < t < \infty$$

Otro enfoque menos obvio para el problema 4 es hacer $x = t^3$. Entonces las ecuaciones paramétricas se convierten en

$$x = t^3 \qquad y = t^6 - 4, \qquad -\infty < t < \infty$$

Se debe tener cuidado cuando se utilice este enfoque, ya que la sustitución para x debe ser una función que permita a x tomar todos los valores estipulados por el dominio de f. Así, por ejemplo, el hacer $x = t^2$ de modo que $y = t^4 - 4$, no da como resultado ecuaciones paramétricas equivalentes para $y = x^2 - 4$, puesto que sólo se obtienen puntos para $x \geq 0$.

EJEMPLO 5 *Determinación de ecuaciones paramétricas para un objeto en movimiento*

Encontrar ecuaciones paramétricas de la elipse

$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$$

donde el parámetro t es el tiempo (en segundos) y

(a) El movimiento alrededor de la elipse es en el mismo sentido de las manecillas del reloj, empezando en el punto (0, 3), y se necesita un segundo para completar una vuelta.

(b) El movimiento alrededor de la elipse es en sentido contrario al de las manecillas del reloj, empezando en el punto (1, 0), y se necesita de 2 segundos para completar una vuelta.

Solución (a) Como el movimiento inicia en el punto (0, 3), queremos tener $x = 0$ y $y = 3$ cuando $t = 0$. Además, ya que la ecuación dada es una elipse, empezamos haciendo

$$x = \operatorname{sen} \omega t \qquad \frac{y}{3} = \cos \omega t$$

para alguna constante ω. Estas ecuaciones paramétricas satisfacen claramente la ecuación. Además, con esta elección, cuando $t = 0$, tenemos $x = 0$ y $y = 3$. Para que el movimiento sea en el mismo sentido de las manecillas del reloj, se tiene que empezar aumentando el valor de x y disminuyendo el de y conforme t crezca. Así, $\omega > 0$. Por último, ya que queremos dar una vuelta en un segundo, el periodo es $2\pi/\omega = 1$, de modo que $\omega = 2\pi$. Así, ecuaciones paramétricas que satisfacen las condiciones estipuladas son

$$x = \operatorname{sen} 2\pi t \qquad y = 3 \cos 2\pi t, \qquad 0 \leq t \leq 1 \tag{2}$$

(b) Como el movimiento inicia en el punto (1, 0), queremos tener $x = 1$ y $y = 0$ cuando $t = 0$. Además, ya que la ecuación dada es una elipse, empezamos haciendo

$$x = \cos \omega t \qquad \frac{y}{3} = \operatorname{sen} \omega t$$

para alguna constante ω. Estas ecuaciones paramétricas satisfacen claramente la ecuación. Además, con esta elección, cuando $t = 0$, tenemos $x = 1$ y $y = 0$. Para que el movimiento sea en sentido contrario al de las manecillas del reloj, se tendrá que empezar disminuyendo el valor de x y aumentando el de y conforme t crezca. Así, $\omega > 0$. Por último, como una vuelta requiere de 2 segundos, el periodo es $2\pi/\omega = 2$, de modo que $\omega = \pi$. Así, las ecuaciones paramétricas que satisfacen las condiciones estipuladas son

$$x = \cos \pi t \qquad y = 3 \operatorname{sen} \pi t, \qquad 0 \leq t \leq 2 \tag{3}$$

Cualquiera de las ecuaciones (2) o (3) puede servir como ecuación paramétrica para la elipse $x^2 + (y^2/9) = 1$ dada en el ejemplo 5. La dirección del movimiento, el punto inicial y el tiempo para una vuelta, sólo nos sirven como ayuda para llegar a una representación paramétrica particular.

Ahora resuelva el problema 25.

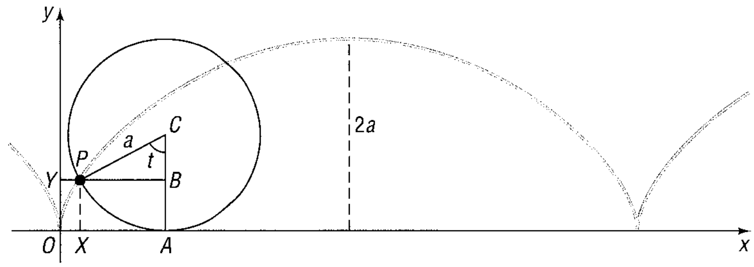
La cicloide

Suponga que un círculo de radio a rueda a lo largo del eje horizontal sin resbalarse. Como el círculo gira a lo largo de una recta, un punto P en el círculo trazará una curva llamada **cicloide** (*véase* la figura 61). Ahora verificaremos las ecuaciones paramétricas* para una cicloide.

Empezamos con un círculo de radio a y hacemos que la recta fija sobre la que el círculo rodará sea el eje x. Sea el origen uno de los puntos en los cuales el

* Cualquier intento por deducir la ecuación rectangular de una cicloide pronto mostraría qué tan complicada es la tarea.

FIGURA 61
Cicloide



punto P hace contacto con el eje x. La figura 61 ilustra la posición de este punto después de que el círculo ha rodado un poco. El ángulo t (en radianes) mide el ángulo que ha rodado el círculo.

Como se requiere que no haya deslizamiento, se deduce que

$$\text{Arco } AP = d(O, A)$$

Por lo tanto,

$$at = d(O, A)$$

La abscisa del punto P es

$$d(O, X) = d(O, A) - d(X, A) = at - a \operatorname{sen} t = a(t - \operatorname{sen} t)$$

La ordenada del punto P es igual a

$$d(O, Y) = d(A, C) - d(B, C) = a - a \cos t = a(1 - \cos t)$$

Así, las ecuaciones paramétricas de la cicloide son

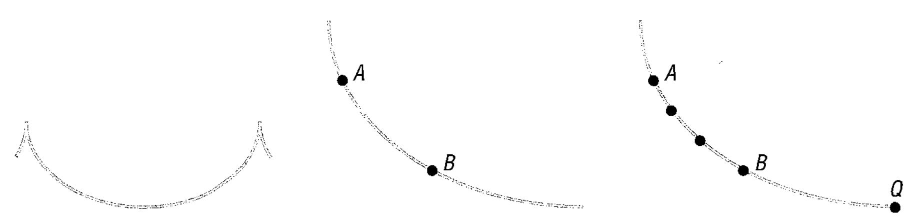
$$\boxed{x = a(t - \operatorname{sen} t) \qquad y = a(1 - \cos t) \qquad (4)}$$

Verificación: Trazar la gráfica de $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, y comparar el resultado con la figura 61.

Aplicaciones a la mecánica

Si a es negativo en las ecuaciones (4), obtenemos una cicloide invertida, como se muestra en la figura 62(a). La cicloide invertida ocurre como resultado de algunas aplicaciones notables en el campo de la mecánica. Mencionaremos dos de ellas: la *braquistocrona* y la *tautocrona*.*

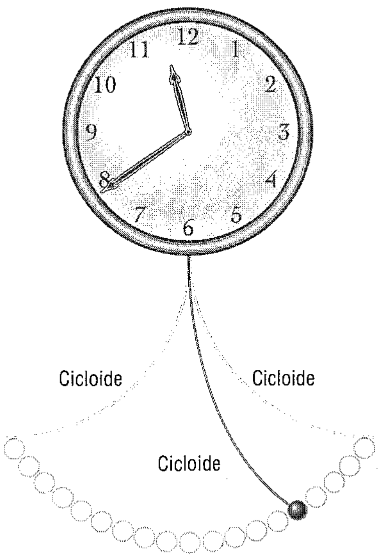
FIGURA 62



(a) Cicloide invertida **(b)** Curva de descenso más rápido **(c)** Todos llegan a Q al mismo tiempo

* En griego, *braquistocrona* significa "el tiempo más breve", y *tautocrona* significa "tiempo igual".

FIGURA 63
Un péndulo flexible restringido por oscilaciones cicloides en una cicloide.



La **braquistocrona** es la curva de descenso más rápido. Si una partícula está restringida a seguir alguna trayectoria desde un punto A hasta un punto B más abajo (no sobre la misma línea vertical) y sólo está actuando la gravedad, el tiempo necesario para el descenso será mínimo si la ruta es una cicloide invertida. *Véase* la figura 62(b). Este notable descubrimiento, atribuido a muchos matemáticos famosos (incluyendo a Johann Bernoulli y Blas Pascal), fue un paso significativo en la creación de la rama de las matemáticas conocida como cálculo de variaciones.

Para definir la **tautocrona,** sea Q el punto más bajo en una cicloide invertida. Si varias partículas colocadas en diferentes puntos sobre la cicloide invertida empiezan a deslizarse bajando por la cicloide de manera simultánea, alcanzarán el punto Q al mismo tiempo, como se indica en la figura 62(c). La propiedad tautocrona de la cicloide fue utilizada por Christian Huygens (1629-1695), matemático, físico y astrónomo holandés, para construir un reloj de péndulo con una pesa que oscilaba a lo largo de una cicloide (*véase* la figura 63). En el reloj de Huygens, se hacía oscilar la pesa a lo largo de una cicloide suspendiéndola de un delgado alambre restringido por dos placas en forma de cicloides. En un reloj con este diseño, el periodo del péndulo es independiente de su amplitud.

Ejercicio 9.7

En los problemas del 1 al 20 trace la gráfica de la curva cuyas ecuaciones paramétricas están dadas y muestre su orientación. Encuentre la ecuación rectangular de cada curva.

1. $x = 3t + 2,\quad y = t + 1;\quad 0 \le t \le 4$

2. $x = t - 3,\quad y = 2t + 4;\quad 0 \le t \le 2$

3. $x = t + 2,\quad y = \sqrt{t};\quad t \ge 0$

4. $x = \sqrt{2t},\quad y = 4t;\quad t \ge 0$

5. $x = t^2 + 4,\quad y = t^2 - 4;\quad -\infty < t < \infty$

6. $x = \sqrt{t} + 4,\quad y = \sqrt{t} - 4;\quad t \ge 0$

7. $x = 3t^2,\quad y = t + 1;\quad -\infty < t < \infty$

8. $x = 2t - 4,\quad y = 4t^2;\quad -\infty < t < \infty$

9. $x = 2e^t,\quad y = 1 + e^t;\quad t \ge 0$

10. $x = e^t,\quad y = e^{-t};\quad t \ge 0$

11. $x = \sqrt{t},\quad y = t^{3/2};\quad t \ge 0$

12. $x = t^{3/2} + 1,\quad y = \sqrt{t};\quad t \ge 0$

13. $x = 2 \cos t,\quad y = 3 \operatorname{sen} t;\quad 0 \le t \le 2\pi$

14. $x = 2 \cos t,\quad y = 3 \operatorname{sen} t;\quad 0 \le t \le \pi$

15. $x = 2 \cos t,\quad y = 3 \operatorname{sen} t;\quad -\pi \le t \le 0$

16. $x = 2 \cos t,\quad y = \operatorname{sen} t;\quad 0 \le t \le \pi/2$

17. $x = \sec t,\quad y = \tan t;\quad 0 \le t \le \pi/4$

18. $x = \csc t,\quad y = \cot t;\quad \pi/4 \le t \le \pi/2$

19. $x = \operatorname{sen}^3 t,\quad y = \cos^3 t;\quad 0 \le t \le 2\pi$

20. $x = t^2,\quad y = \ln t;\quad t > 0$

En los problemas del 21 al 24 encuentre dos ecuaciones paramétricas diferentes para cada ecuación rectangular

21. $y = x^3$ **22.** $y = x^4 + 1$ **23.** $x = y^{3/2}$ **24.** $x = \sqrt{y}$

En los problemas del 25 al 28 encuentre ecuaciones paramétricas para un objeto que se mueve a lo largo de la elipse $(x^2/4) + (y^2/9) = 1$ con el movimiento descrito.

25. El movimiento empieza en (2, 0), es en el sentido de las manecillas del reloj y requiere de 2 segundos para completar una vuelta.

26. El movimiento empieza en (0, 3), es en el sentido de las manecillas del reloj y requiere de 1 segundo para completar una vuelta.

27. El movimiento empieza en (0, 3), es en sentido contrario al de las manecillas del reloj y requiere de 1 segundo para completar una vuelta.

28. El movimiento empieza en (2, 0), es en sentido contrario al de las manecillas del reloj y requiere de 3 segundos para completar una vuelta.

En los problemas 29 y 30 se dan las ecuaciones paramétricas de cuatro curvas. Trace la gráfica de cada una de ellas, indicando la orientación.

29. C_1: $x = t$, $y = t^2$; $-4 \le t \le 4$
C_2: $x = \cos t$, $y = 1 - \operatorname{sen}^2 t$; $0 \le t \le \pi$
C_3: $x = e^t$, $y = e^{2t}$; $0 \le t \le \ln 4$
C_4: $x = \sqrt{t}$, $y = t$; $0 \le t \le 16$

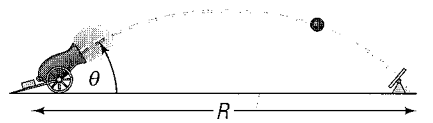
30. C_1: $x = t$, $y = \sqrt{1 - t^2}$; $-1 \le t \le 1$
C_2: $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$; $0 \le t \le 2\pi$
C_3: $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$; $0 \le t \le 2\pi$
C_4: $x = \sqrt{1 - t^2}$, $y = t$; $-1 \le t \le 1$

31. Demuestre que las ecuaciones paramétricas para una recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son

$$x = (x_2 - x_1)t + x_1 \qquad y = (y_2 - y_1)t + y_1, \qquad -\infty < t < \infty$$

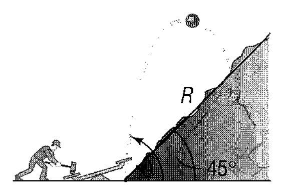
¿Cuál es la orientación de esta recta?

32. *Movimiento de un proyectil.* La posición de un proyectil disparado con una velocidad inicial de v_0 pies sobre segundo, a un ángulo de θ con respecto a la horizontal, después de t segundos, está dada por las ecuaciones paramétricas



$$x = (v_0 \cos\theta)t \qquad y = (v_0 \operatorname{sen}\theta)t - 16t^2$$

(a) Obtenga la ecuación rectangular de la trayectoria e identifique la curva.
(b) Demuestre que el proyectil pega contra el suelo ($y = 0$) cuando $t = \frac{1}{16}v_0 \operatorname{sen}\theta$.
(c) ¿Qué distancia (horizontalmente) ha recorrido el proyectil cuando golpea contra el suelo? En otras palabras, encuentre el **alcance R.**
(d) Encuentre el tiempo t cuando $x = y$. Luego encuentre la distancia horizontal x y la distancia vertical y recorrida por el proyectil en este tiempo. Después calcule $\sqrt{x^2 + y^2}$. Esta es la distancia R, el alcance, que el proyectil recorre hacia arriba de un plano inclinado en 45° con respecto a la horizontal ($x = y$). (También *véase* el problema 75 de los ejercicios 7.3.)



En los problemas del 33 al 36 trace la gráfica de la curva definida por las ecuaciones paramétricas dadas.

33. $x = \operatorname{sen}^3 t$, $y = \cos^3 t$

34. $x = \operatorname{sen} t + \cos t$, $y = \operatorname{sen} t - \cos t$

35. $x = 4 \operatorname{sen} t - 2 \operatorname{sen} 2t$,
$y = 4 \cos t - 2 \cos 2t$

36. $x = 4 \operatorname{sen} t + 2 \operatorname{sen} 2t$,
$y = 4 \cos t + 2 \cos 2t$

37. Investigue acerca de las curvas llamadas *hipocicloide* y *epicicloide*. Escriba un informe de lo que encuentre. Asegúrese de hacer comparaciones con la cicloide.

Repaso del capítulo

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Ecuaciones

Parábola	*Véanse* las tablas 1 y 2.	
Elipse	*Véase* la tabla 3.	
Hipérbola	*Véase* la tabla 4.	
Ecuación general de una cónica	$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$	Parábola si $B^2 - 4AC = 0$ Elipse (o círculo) si $B^2 - 4AC < 0$ Hipérbola si $B^2 - 4AC > 0$
Cónica en coordenadas polares	$\dfrac{d(F, P)}{d(P, D)} = e$	Parábola si $e = 1$ Elipse si $e < 1$ Hipérbola si $e > 1$
Curva plana	$(x, y) = (f(t), g(t))$, t es un parámetro	
Ecuaciones polares de una cónica	*Véase* la tabla 5.	

Definiciones

Parábola	Conjunto de los puntos P en el plano para los cuales $d(F, P) = d(P, D)$, donde F es el foco y D la directriz.
Elipse	Conjunto de puntos P en el plano, cuya suma de sus distancias a dos puntos fijos (los focos) es una constante.
Hipérbola	Conjunto de puntos P en el plano, cuya diferencia de sus distancias a dos puntos fijo (los focos) es una constante.

Fórmulas

Fórmulas de rotación	$x = x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta$ $y = x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta$
Ángulo θ de rotación que elimina el término $x'y'$	$\cot 2\theta = \dfrac{A - C}{B}$

CÓMO HACER PARA

Encontrar el vértice, el foco y la directriz de una parábola dada su ecuación

Trazar la gráfica de una parábola dada su ecuación

Encontrar una ecuación de una parábola dada cierta información acerca de la parábola

Encontrar el centro, los focos y el vértice de una elipse dada su ecuación

Trazar la gráfica de una elipse dada su ecuación

Encontrar una ecuación de una elipse dada cierta información acerca de la elipse

Encontrar el centro, los focos, vértices y las asíntotas de una hipérbola dada su ecuación

Trazar la gráfica de una hipérbola dada su ecuación

Encontrar una ecuación de una hipérbola dada cierta información acerca de la hipérbola

Identificar cónicas sin completar cuadrados

Identificar cónicas sin usar la rotación de ejes

Usar las fórmulas de rotación para transformar ecuaciones de segundo grado de modo que no aparezca el término con xy

Identificar y trazar la gráfica de cónicas dadas por una ecuación polar

Trazar la gráfica de ecuaciones paramétricas

Encontrar la ecuación rectangular dadas las ecuaciones paramétricas

CÓMO HACER PARA

1. Una __________ es la colección de todos los puntos en el plano tales que la distancia de cada punto a un punto fijo es igual a su distancia a una recta fija.
2. Una __________ es la colección de todos los puntos en el plano cuya suma de sus distancias a dos puntos fijos es una constante.
3. Una __________ es la colección de todos los puntos en el plano cuya diferencia de sus distancias a dos puntos fijos es una constante.
4. Para una elipse, los focos pertenecen al eje __________ para una hipérbola los focos pertenecen al eje __________ .
5. Para la elipse $(x^2/9) + (y^2/16) = 1$, el eje mayor está a lo largo de __________.
6. Las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola $(y^2/9) - (x^2/4) = 1$ son __________ y __________.
7. Para transformar la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad B \neq 0$$

en una en x' y y' sin el término $x'y'$, se debe girar los ejes un ángulo agudo θ que satisface la ecuación __________.

8. La ecuación polar

$$r = \frac{8}{4 - 2 \operatorname{sen} \theta}$$

es una cónica cuya excentricidad es __________. Es un(a) __________ cuya directriz es __________ al eje polar a una distancia de __________ unidades __________ del polo.

9. Las ecuaciones paramétricas $x = 2 \operatorname{sen} t$ y $y = 3 \cos t$ representan un(a) __________.

CIERTO O FALSO

C F 1. En una parábola, la distancia desde cualquier punto al foco es igual a la distancia desde ese punto a la directriz.
C F 2. Los focos de una elipse están sobre el eje menor.
C F 3. Los focos de una hipérbola están sobre su eje transverso.
C F 4. Las hipérbolas siempre tienen asíntotas; las elipses nunca tienen asíntotas.
C F 5. Una hipérbola nunca corta a su eje conjugado.
C F 6. Una hipérbola siempre corta a su eje transverso.
C F 7. La ecuación $ax^2 + 6y^2 - 12y = 0$ define una elipse si $a > 0$.
C F 8. La ecuación $3x^2 + bxy + 12y^2 = 10$ define una parábola si $b = -12$.
C F 9. Si (r, θ) son coordenadas polares, la ecuación $r = 2/(2 + 3 \operatorname{sen} \theta)$ define una hipérbola.
C F 10. Las ecuaciones paramétricas que definen una curva son únicas.

EJERCICIOS DE REPASO

En los problemas del 1 al 20 identifique cada ecuación. Si es una parábola, dé su vértice, foco y directriz; si es una elipse, dé su centro, sus vértices y focos; si es una hipérbola, dé su centro, sus vértices, focos y asíntotas.

1. $y^2 = -16x$
2. $16x^2 = y$
3. $\dfrac{x^2}{25} - y^2 = 1$
4. $\dfrac{y^2}{25} - x^2 = 1$
5. $\dfrac{y^2}{25} + \dfrac{x^2}{16} = 1$
6. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$
7. $x^2 + 4y = 4$
8. $3y^2 - x^2 = 9$
9. $4x^2 - y^2 = 8$
10. $9x^2 + 4y^2 = 36$
11. $x^2 - 4x = 2y$
12. $2y^2 - 4y = x - 2$
13. $y^2 - 4y - 4x^2 + 8x = 4$
14. $4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$
15. $4x^2 + 9y^2 - 16x - 18y = 11$
16. $4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y = 11$
17. $4x^2 - 16x + 16y + 32 = 0$
18. $4y^2 + 3x - 16y + 19 = 0$
19. $9x^2 + 4y^2 - 18x + 8y = 23$
20. $x^2 - y^2 - 2x - 2y = 1$

En los problemas del 21 al 36 obtenga una ecuación de la cónica descrita. Trace la gráfica de la ecuación.

21. Parábola; foco en $(-2, 0)$; directriz la recta $x = 2$
22. Elipse; centro en $(0, 0)$; foco en $(0, 3)$; vértice en $(0, 5)$
23. Hipérbola; centro en $(0, 0)$; foco en $(0, 4)$; vértice en $(0, -2)$
24. Parábola; vértice en $(0, 0)$; directriz la recta $y = -3$
25. Elipse; focos en $(-3, 0)$ y $(3, 0)$; vértice en $(4, 0)$
26. Hipérbola; vértice en $(-2, 0)$ y $(2, 0)$; foco en $(4, 0)$
27. Parábola; vértice en $(2, -3)$; foco en $(2, -4)$
28. Elipse; centro en $(-1, 2)$; foco en $(0, 2)$; vértice en $(2, 2)$

29. Hipérbola; centro en $(-2, -3)$; foco en $(-4, -3)$; vértice en $(-3, -3)$
30. Parábola; foco en $(3, 6)$; directriz la recta $y = 8$
31. Elipse; focos en $(-4, 2)$ y $(-4, 8)$; vértice en $(-4, 10)$
32. Hipérbola; vértices en $(-3, 3)$ y $(5, 3)$; foco en $(7, 3)$
33. Centro en $(-1, 2)$; $a = 3$; $c = 4$; eje transverso paralelo al eje x
34. Centro en $(4, -2)$; $a = 1$; $c = 4$; eje transverso paralelo al eje y
35. Vértices en $(0, 1)$ y $(6, 1)$; asíntota la recta $3y + 2x - 9 = 0$
36. Vértices en $(4, 0)$ y $(4, 4)$; asíntota la recta $y + 2x - 10 = 0$

En los problemas del 37 al 46, identifique cada cónica sin completar los cuadrados y sin aplicar rotación de ejes.

37. $y^2 + 4x + 3y - 8 = 0$
38. $2x^2 - y + 8x = 0$
39. $x^2 + 2y^2 + 4x - 8y + 2 = 0$
40. $x^2 - 8y^2 - x - 2y = 0$
41. $9x^2 - 12xy + 4y^2 + 8x + 12y = 0$
42. $4x^2 + 4xy + y^2 - 8\sqrt{5}x + 16\sqrt{5}y = 0$
43. $4x^2 + 10xy + 4y^2 - 9 = 0$
44. $4x^2 - 10xy + 4y^2 - 9 = 0$
45. $x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x + 4y - 1 = 0$
46. $4x^2 + 12xy - 10y^2 + x + y - 10 = 0$

En los problemas del 47 al 52, gire los ejes de modo que la ecuación nueva no tenga término en xy. Analice y trace la gráfica de la ecuación nueva.

47. $2x^2 + 5xy + 2y^2 - \frac{9}{2} = 0$
48. $2x^2 - 5xy + 2y^2 - \frac{9}{2} = 0$
49. $6x^2 + 4xy + 9y^2 - 20 = 0$
50. $x^2 + 4xy + 4y^2 + 16\sqrt{5}x - 8\sqrt{5}y = 0$
51. $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 12x + 8y = 0$
52. $9x^2 - 24xy + 16y^2 + 80x + 60y = 0$

En los problemas del 53 al 58, identifique la cónica que representa cada ecuación polar y trace su gráfica.

53. $r = \dfrac{4}{1 - \cos\theta}$
54. $r = \dfrac{6}{1 + \operatorname{sen}\theta}$
55. $r = \dfrac{6}{2 - \operatorname{sen}\theta}$
56. $r = \dfrac{2}{3 + 2\cos\theta}$
57. $r = \dfrac{8}{4 + 8\cos\theta}$
58. $r = \dfrac{10}{5 + 20\operatorname{sen}\theta}$

En los problemas del 59 al 62 convierta cada ecuación polar en una ecuación rectangular.

59. $r = \dfrac{4}{1 - \cos\theta}$
60. $r = \dfrac{6}{2 - \operatorname{sen}\theta}$
61. $r = \dfrac{8}{4 + 8\cos\theta}$
62. $r = \dfrac{2}{3 + 2\cos\theta}$

En los problemas del 63 al 68, trace la gráfica de la curva cuyas ecuaciones paramétricas son dadas y muestre su orientación. Encuentre la ecuación rectangular de cada curva.

63. $x = 4t - 2, \quad y = 1 - t; \quad -\infty < t < \infty$
64. $x = 2t^2 + 6, \quad y = 5 - t; \quad -\infty < t < \infty$
65. $x = 3\operatorname{sen} t, \quad y = 4\cos t + 2; \quad 0 \le t \le 2\pi$
66. $x = \ln t, \quad y = t^3; \quad t > 0$
67. $x = \sec^2 t, \quad y = \tan^2 t; \quad 0 \le t \le \pi/4$
68. $x = t^{3/2}, \quad y = 2t + 4; \quad t \ge 0$

69. Encuentre una ecuación de la hipérbola cuyos focos son los vértices de la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ y cuyos vértices son los focos de esta elipse.
70. Encuentre una ecuación de la elipse cuyos focos son los vértices de la hipérbola $x^2 - 4y^2 = 16$, y cuyos vértices son los focos de esta hipérbola.
71. Describa la colección de puntos en un plano de modo que la distancia desde cada uno al punto $(3, 0)$ sea tres cuartos de su distancia a la recta $x = \frac{16}{3}$.

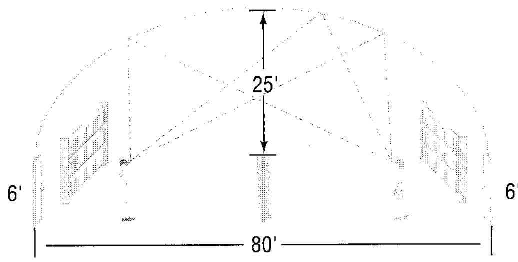
72. Describa la colección de puntos en un plano de modo que la distancia de cada uno al punto (5, 0) sea cinco cuartos de su distancia a la recta $x = \frac{16}{5}$.

73. Un espejo se construye en forma de paraboloide de revolución. Si una fuente luminosa está ubicada a un pie desde la base a lo largo del eje de simetría y la abertura es de 2 pies de ancho, ¿cuál debe ser la profundidad del espejo?

74. Un puente es construido en forma de arco parabólico. El puente tiene una extensión de 60 pies y una altura máxima de 20 pies. Encuentre la altura del arco a distancias de 5, 10 y 20 pies del centro.

75. Un puente es construido en forma de arco semielíptico. El puente tiene una extensión de 60 pies y una altura máxima de 20 pies. Encuentre la altura del arco a distancias de 5, 10 y 20 pies del centro.

76. La figura muestra las especificaciones para un techo elíptico en un salón diseñado para ser una galería de murmullos. ¿En dónde están ubicados los focos?



77. Dos estaciones LORAN están separadas 150 millas a lo largo de una costa recta.

(a) Un barco registra una diferencia de tiempo de 0.00032 segundos entre las señales LORAN. Establezca un sistema de coordenadas rectangulares apropiado para determinar en dónde llegará el barco a la costa si continúa sobre la ruta de la hipérbola correspondiente a esta diferencia de tiempo.

(b) Si el barco debe atracar en un puerto ubicado entre las dos estaciones a 15 millas de la estación principal, ¿cuál es la diferencia de tiempo que debe buscar?

(c) Si el barco está a 20 millas de la costa cuando obtiene la diferencia de tiempo deseada, ¿cuál es su localización exacta? [*Nota:* La velocidad de cada señal de radio es de 186,000 millas por segundo.]

78. Formule una estrategia para analizar y trazar la gráfica de una ecuación de la forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

TEMA 5

CAPÍTULO 10

SISTEMAS DE ECUACIONES Y DESIGUALDADES

Panorama **Carreras**

En una carrera de una milla, el ganador cruzó la meta 10 pies antes del corredor de segundo lugar y 20 pies antes que el tercero. Si cada corredor mantiene una velocidad constante en toda la carrera, ¿por cuántos pies gana el corredor de segundo lugar al de tercero?
[problema 80 en el ejercicio 10.4]

En este capítulo estudiaremos la resolución de ecuaciones y desigualdades con dos o más variables. Como sugieren los títulos de sección, existen varias formas de resolver tales expresiones.

El *método de sustitución* para resolver ecuaciones con varias incógnitas data de tiempos antiguos.

El *método de eliminación*, aunque existe desde hace siglos, fue sistematizado por Karl Friedrich Gauss (1777-1855) y Camille Jordan (1838-1922). En la actualidad, este método se utiliza para resolver sistemas de gran tamaño por medio de computadora.

La teoría de *matrices* fue desarrollada en 1857 por Arthur Cayley (1821-1895), aunque sólo posteriormente las matrices fueron utilizadas de la manera en que las emplearemos en este capítulo. Las matrices se han convertido en un instrumento muy flexible, útil en casi todas las áreas de las matemáticas.

El método de *determinantes* fue ideado por Seki Kōwa (1642-1708) en 1683 en Japón; y por Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) en 1693 en Alemania. Ambos lo utilizaron sólo en relación con las ecuaciones lineales. La *regla de Cramer* recibe el nombre del suizo Gabriel Cramer (1704-1752), quien popularizó el uso de los determinantes para resolver sistemas lineales.

La sección 10.6 presenta la *programación lineal*, que es una aplicación moderna de las desigualdades lineales a ciertos tipos de problemas. Este tema es de utilidad en particular para los estudiantes interesados en la investigación de operaciones.

10.1 Sistemas de ecuaciones lineales: sustitución; eliminación

Comenzaremos con un ejemplo.

EJEMPLO 1 *Venta de boletos en un cine*

Un cine vende boletos a \$8.00 cada uno y las personas de la tercera edad reciben un descuento de \$2.00. En una tarde, el cine tuvo un ingreso de \$3580.00. Si x representa el número de boletos vendidos a \$8.00 y y el de boletos vendidos al precio con descuento de \$6.00, escriba una ecuación que relacione estas variables.

Solución Cada boleto sin descuento implica un ingreso de \$8.00, de modo que x boletos producen $8x$ dólares. De manera análoga, y boletos con descuento producen $6y$ dólares. Si el total obtenido es de \$3580.00, debemos tener

$$8x + 6y = 3580$$

En el ejemplo 1, si también supiéramos que se vendieron 525 boletos esa tarde, tendríamos otra ecuación que relaciona las variables x y y:

$$x + y = 525$$

Las dos ecuaciones

$$\begin{aligned} 8x + 6y &= 3580 \\ x + y &= 525 \end{aligned}$$

forman un *sistema* de ecuaciones.

En general, un **sistema de ecuaciones** es una colección de dos o más ecuaciones, cada una de las cuales contiene una o más variables. El ejemplo 2 muestra algunos casos de sistemas de ecuaciones.

EJEMPLO 2 *Sistemas de ecuaciones*

(a) $\begin{cases} 2x + y = 5 & (1) \\ -4x + 6y = -2 & (2) \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + y^2 = 5 & (1) \text{ Dos ecuaciones con} \\ 2x + y \ = 4 & (2) \quad \text{dos variables } x \text{ y } y \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + \ \ y + \ \ z = 6 & (1) \text{ Tres ecuaciones con} \\ 3x - 2y + 4z = 9 & (2) \quad \text{tres variables } x, y \text{ y } z \\ x - \ \ y - \ \ z = 0 & (3) \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x + y + z = 5 & (1) \text{ Dos ecuaciones con} \\ \quad x - y = 2 & (2) \quad \text{tres variables } x, y \text{ y } z \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x + y + \ \ z = 6 & (1) \text{ Cuatro ecuaciones con} \\ \quad 2x + 2z = 4 & (2) \quad \text{tres variables } x, y \text{ y } z \\ \quad\ \ y + \ \ z = 2 & (3) \\ \qquad\quad x = 4 & (4) \end{cases}$

Utilizamos una llave, como en el ejemplo anterior, para recordar que estamos trabajando con un sistema de ecuaciones. También será conveniente numerar cada ecuación del sistema.

Una **solución** de un sistema de ecuaciones consta de valores para las variables para los cuales cada ecuación del sistema resulta un enunciado verdadero. **Resolver** un sistema de ecuaciones significa determinar todas las soluciones del sistema.

Por ejemplo, $x = 2$, $y = 1$ es una solución del sistema en el ejemplo 2(a), ya que

$$2(2) + 1 = 5 \quad \text{y} \quad -4(2) + 6(1) = -2$$

Una solución del sistema del ejemplo 2(b) es $x = 1$, $y = 2$, ya que

$$1 + 2^2 = 5 \quad \text{y} \quad 2(1) + 2 = 4$$

Otra solución del sistema del ejemplo 2(b) is $x = \frac{11}{4}$, $y = -\frac{3}{2}$, la cual puede verificar usted. Una solución del sistema en el ejemplo 2(c) es 2(c) es $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$, ya que

$$\begin{cases} 3 \quad + 2 \quad + 1 \quad = 6 & (1) \; x = 3, y = 2, z = 1 \\ 3(3) - 2(2) + 4(1) = 9 & (2) \\ 3 \quad - 2 \quad - 1 \quad = 0 & (3) \end{cases}$$

Advierta que $x = 3$, $y = 3$, $z = 0$ no es una solución del sistema del ejemplo 2(c):

$$\begin{cases} 3 \quad + 3 \quad + 0 \quad = 6 & (1) \; x = 3, y = 3, z = 0 \\ 3(3) - 2(3) + 4(0) = 3 \neq 9 & (2) \\ 3 \quad - 3 \quad - 0 \quad = 0 & (3) \end{cases}$$

Aunque estos valores satisfacen las ecuaciones (1) y (3), no satisfacen la ecuación (2). Cualquier solución del sistema debe satisfacer a *todas* las ecuaciones del sistema.

Ahora resuelva el problema 3.

Cuando un sistema de ecuaciones tiene al menos una solución, es **consistente;** en caso contrario es **inconsistente.**

Una ecuación con n variables es **lineal** si es equivalente a una ecuación de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdot \cdot \cdot + a_nx_n = b$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son n variables distintas, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, b son constantes y al menos una de las constantes a_i es distinta de cero.

Algunos ejemplos de ecuaciones lineales son

$$2x + 3y = 2 \qquad 5x - 2y + 3z = 10 \qquad 8x + 8y - 2z + 5w = 0$$

Si cada ecuación de un sistema de ecuaciones es lineal, entonces tenemos un **sistema de ecuaciones lineales.** Así, los sistemas de los ejemplos 2(a), (c), (d) y (e) son lineales, mientras que el sistema del ejemplo 2(b) es no lineal. En las secciones 10.1, 10.2 y 10.3 nos centraremos en la solución de sistemas lineales y analizaremos los sistemas no lineales en la sección 10.4.

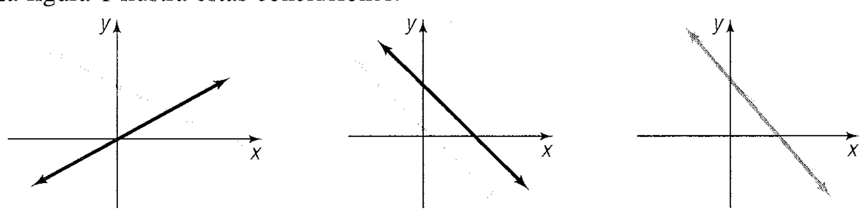
Dos ecuaciones lineales con dos variables

Podemos enfocar el problema de resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables como un problema de geometría. La gráfica de cada ecuación de tal sistema es una línea recta. Así, un sistema de dos ecuaciones con dos variables representa un par de rectas. Las rectas (1) se pueden cortar, (2) pueden ser paralelas, o (3) pueden ser **coincidentes** (es decir, idénticas).

1. Si las rectas se cortan, el sistema de ecuaciones tiene una solución dada por el punto de intersección. El sistema es **consistente** y las ecuaciones son **independientes.**
2. Si las rectas son paralelas, el sistema de ecuaciones no tiene solución, ya que las rectas nunca se cortan. El sistema es **inconsistente.**
3. Si las rectas son coincidentes, el sistema de ecuaciones tiene una infinidad de soluciones, representadas por todos los puntos sobre la recta. El sistema es **consistente** y las ecuaciones son **dependientes.**

La figura 1 ilustra estas conclusiones.

FIGURA 1



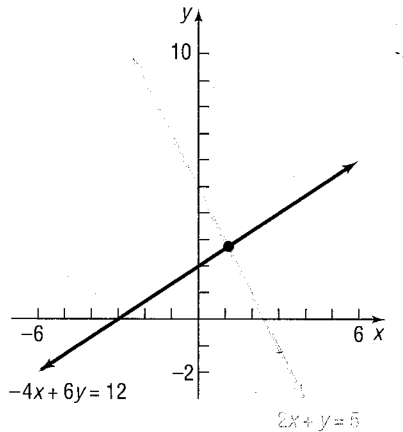
(a) Rectas que se cortan; el sistema tiene una solución.
(b) Rectas paralelas; el sistema no tiene solución.
(c) Rectas coincidentes; el sistema tiene una infinidad de soluciones.

Hacer la gráfica del sistema $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -4x + 6y = 12 \end{cases}$

La ecuación (1) en forma pendiente-ordenada al origen es $y = -2x + 5$, con pendiente -2 y ordenada al origen 5. La ecuación (2) en forma pendiente-ordenada al origen es $y = \frac{2}{3}x + 2$, con pendiente $\frac{2}{3}$ y ordenada al origen 2. La figura 2 muestra la gráfica.

A partir de la gráfica de la figura 2, vemos que las rectas se cortan, de modo que el sistema del ejemplo 3 es consistente. También podemos utilizar la gráfica como medio para aproximar la solución que, para este sistema, parece estar cerca del punto (1,3). La solución real, que usted puede verificar, es $(\frac{9}{8}, \frac{11}{4})$. Para obtener las soluciones exactas utilizaremos métodos algebraicos. El primer método algebraico que analizaremos es el *método de sustitución.*

FIGURA 2



Verificación: Haga la gráfica de las rectas $2x + y = 5$ y $-4x + 6y = 12$ y compare con la figura 2. Utilice TRACE para verificar que el punto de intersección es (1.125, 2.75).

Método de sustitución

Ilustraremos el **método de sustitución** mediante el sistema del ejemplo 3.

EJEMPLO 4 *Solución de un sistema de ecuaciones mediante sustitución*

Resolver: $\begin{cases} 2x + y = 5 & (1) \\ -4x + 6y = 12 & (2) \end{cases}$

Solución Primero despejamos y en la primera ecuación, con lo que obtenemos

$$y = 5 - 2x \tag{1}$$

Sustituimos este resultado en la segunda ecuación y nos quedamos con una ecuación que sólo contiene a la variable x, la cual también podemos despejar:

$$\begin{aligned} -4x + 6y &= 12 \\ -4x + 6(5 - 2x) &= 12 \\ -4x + 30 - 12x &= 12 \\ -16x &= -18 \\ x &= \frac{-18}{-16} = \frac{9}{8} \end{aligned}$$

Una vez que sabemos que $x = \frac{9}{8}$, podemos determinar con facilidad el valor de y mediante **sustitución regresiva,** es decir, sustituyendo $\frac{9}{8}$ en vez de x en una de las ecuaciones originales. Utilizaremos la primera:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 5 \\ 2\left(\frac{9}{8}\right) + y &= 5 \\ \frac{9}{4} + y &= 5 \\ y &= 5 - \frac{9}{4} = \frac{20}{4} - \frac{9}{4} = \frac{11}{4} \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = \frac{9}{8}$, $y = \frac{11}{4}$

El método utilizado para resolver el sistema del ejemplo 4 es el de **sustitución.** Bosquejamos a continuación los pasos de este método.

Pasos para resolver por sustitución

PASO 1: Elegir una de las ecuaciones y despejar una de las variables en términos de las otras.
PASO 2: Sustituir el resultado en las demás ecuaciones.
PASO 3: Si se obtiene una ecuación con una variable hay que resolverla. En caso contrario se repite el paso 1 hasta que quede una sola ecuación con una variable.
PASO 4: Determinar los valores de las demás variables por sustitución regresiva.
PASO 5: Verificar la solución determinada.

EJEMPLO 5 *Solución de un sistema de ecuaciones por sustitución*

Resolver: $\begin{cases} 3x - 2y = 5 & (1) \\ 5x - y = 6 & (2) \end{cases}$

Solución PASO 1: Después de observar las dos ecuaciones, concluimos que es más fácil despejar la variable y en la ecuación (2):

$$\begin{aligned} 5x - y &= 6 \\ y &= 5x - 6 \end{aligned}$$

PASO 2: Sustituimos este resultado en la ecuación (1) y simplificamos:

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 5 \\ 3x - 2(5x - 6) &= 5 \\ -7x + 12 &= 5 \\ -7x &= -7 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

PASO 3: Como ahora tenemos una solución, $x = 1$, vamos al paso 4.
PASO 4: Como sabemos que $x = 1$, podemos determinar y a partir de la ecuación

$$y = 5x - 6 = 5(1) - 6 = -1$$

PASO 5: *Verificación:* $\begin{cases} 3(1) - 2(-1) = 3 + 2 = 5 \\ 5(1) - (-1) \quad = 5 + 1 = 6 \end{cases}$

La solución del sistema es $x = 1$, $y = -1$. ◻

EJEMPLO 6 *Solución de un sistema de ecuaciones por sustitución*

Resolver: $\begin{cases} 2x - 3y = 7 & (1) \\ 4x + 5y = 3 & (2) \end{cases}$

Solución PASO 1: Después de analizar el sistema, concluimos que no hay forma de despejar una de las variables sin utilizar fracciones. Despejamos la variable x en la ecuación (1):

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 7 \\ 2x &= 3y + 7 \\ x &= \frac{3}{2}y + \frac{7}{2} \end{aligned}$$

PASO 2: Sustituimos este resultado en la ecuación (2) y simplificamos:

$$\begin{aligned} 4x + 5y &= 3 \\ 4\left(\frac{3}{2}y + \frac{7}{2}\right) + 5y &= 3 \\ 6y + 14 + 5y &= 3 \\ 11y + 14 &= 3 \\ 11y &= -11 \end{aligned}$$

PASO 3: $y = -1$

PASO 4: $x = \frac{3}{2}y + \frac{7}{2} = \frac{3}{2}(-1) + \frac{7}{2} = \frac{4}{2} = 2$

PASO 5: *Verificación:* $\begin{cases} 2(2) - 3(-1) = 4 + 3 = 7 \\ 4(2) + 5(-1) = 8 - 5 = 3 \end{cases}$

La solución es $x = 2$, $y = -1$.

Ahora utilice la sustitución para resolver el problema 13.

Método de eliminación

Un segundo procedimiento para resolver un sistema de ecuaciones lineales es el *método de eliminación.* Por lo general, este método es preferible sobre el de sustitución cuando este último conduce al uso de fracciones o si el sistema contiene más de dos variables. La eliminación también proporciona la motivación necesaria para la solución de sistemas mediante matrices (tema de la siguiente sección).

La idea subyacente tras el método de eliminación es la de reemplazar las ecuaciones originales del sistema con ecuaciones equivalentes, hasta llegar a un sistema de ecuaciones con una solución obvia. Al proceder de esta forma obtenemos **sistemas equivalentes de ecuaciones.** Las reglas para obtener ecuaciones equivalentes son las mismas que estudiamos en el capítulo 1. Sin embargo, también podemos intercambiar dos ecuaciones cualesquiera del sistema o reemplazar cualquier ecuación por la suma (o resta) de esa ecuación con cualquier otra del sistema.

Reglas para obtener un sistema equivalente de ecuaciones

1. Intercambiar dos ecuaciones cualesquiera del sistema.
2. Multiplicar (o dividir) cada lado de una ecuación por la misma constante distinta de cero.
3. Reemplazar cualquier ecuación del sistema por la suma (o resta) de esa ecuación y cualquiera otra del sistema.

Un ejemplo le aclarará lo anterior. Al estudiar el ejemplo, preste particular atención al patrón seguido.

EJEMPLO 7 *Solución de un sistema de ecuaciones por eliminación*

Resolver: $\begin{cases} 2x + 3y = 1 & (1) \\ -x + y = -3 & (2) \end{cases}$

Solución Multiplicamos cada lado de la ecuación (2) por 2, de modo que los coeficientes de x en las dos ecuaciones sean el negativo uno del otro. El resultado es el sistema equivalente

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 & (1) \\ -2x + 2y = -6 & (2) \end{cases}$$

Si ahora reemplazamos la ecuación (2) de este sistema por la suma de las dos ecuaciones, obtenemos una ecuación que sólo contiene a la variable y, que podemos entonces despejar así:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 & (1) \\ -2x + 2y = -6 & (2) \end{cases}$$

$$5y = -5$$

$$y = -1$$

Ahora sustituimos en forma regresiva utilizando este valor de y en la ecuación (1), y simplificamos para obtener

$$2x + 3(-1) = 1$$
$$2x = 4$$
$$x = 2$$

Así, la solución del sistema original es $x = 2$, $y = -1$. Dejaremos para usted la verificación correspondiente.

El procedimiento utilizado en el ejemplo 7 es el **método de eliminación.** Observe el patrón seguido. Primero eliminamos la variable x de la segunda ecuación; después sustituimos en forma regresiva, es decir, sustituimos el valor determinado para y de nuevo en la primera ecuación para encontrar x.

Regresemos al ejemplo del cine (Ejemplo 1).

EJEMPLO 8 *Venta de boletos en un cine*

Un cine vende boletos a \$8.00 cada uno pero las personas de la tercera edad reciben un descuento de \$2.00. En una tarde, el cine vendió 525 boletos y tuvo un ingreso de \$3580.00. ¿Cuántos boletos de cada tipo se vendieron?

Solución Si x representa el número de boletos vendidos a \$8.00 y y el número de boletos vendidos al precio con descuento de \$6.00, entonces la información dada produce el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 8x + 6y = 3580 \\ x + y = 525 \end{cases}$$

Utilizamos eliminación multiplicando la segunda ecuación por -6 y después sumamos las ecuaciones.

$$\begin{cases} 8x + 6y = 3580 \\ -6x - 6y = -3150 \end{cases}$$

$$2x = 430$$
$$x = 215$$

Como $x + y = 525$, entonces $y = 525 - x = 525 - 215 = 310$. Así podemos concluir que se vendieron 215 boletos sin descuento y 310 con descuento.

Ahora utilice eliminación para resolver el problema 13.

Los ejemplos anteriores utilizaban sistemas consistentes de ecuaciones que tenían una solución única. Los siguientes dos ejemplos tratan otras dos posibilidades, donde la primera es un sistema que no tiene solución.

EJEMPLO 9 *Un sistema inconsistente de ecuaciones*

Resolver: $\begin{cases} 2x + y = 5 & (1) \\ 4x + 2y = 8 & (2) \end{cases}$

Solución Optamos por el método de sustitución y despejamos y en la ecuación (1):

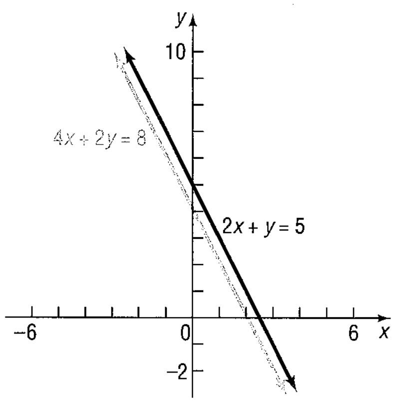
$$\begin{aligned} 2x + y &= 5 \\ y &= 5 - 2x \end{aligned}$$

Sustituimos en la ecuación (2) para obtener

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 8 \\ 4x + 2(5 - 2x) &= 8 \\ 4x + 10 - 4x &= 8 \\ 0 \cdot x &= -2 \end{aligned}$$

Esta ecuación no tiene solución. Así, concluimos que el propio sistema no tiene solución y, por lo tanto, que es inconsistente.

FIGURA 3



La figura 3 ilustra el par de rectas cuyas ecuaciones forman el sistema del ejemplo 9. Observe que las gráficas de las dos ecuaciones son rectas, cada una con pendiente -2; una tiene una ordenada al origen de 5 y la otra de 4. Así, las rectas son paralelas y no tienen punto de intersección. Esta afirmación geométrica es equivalente a la afirmación algebraica de que el sistema no tiene solución.

Verificación: Haga la gráfica de las rectas $2x + y = 5$ y $4x + 2y = 8$ compare el resultado con la figura 3. ¿Cómo puede asegurarse de que las rectas son paralelas?

El siguiente ejemplo ilustra un sistema con una infinidad de soluciones.

EJEMPLO 10 *Solución de un sistema de ecuaciones con una infinidad de soluciones*

Resolver: $\begin{cases} 2x + y = 4 & (1) \\ -6x - 3y = -12 & (2) \end{cases}$

Solución Optamos por el método de eliminación:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 & (1) \\ -6x - 3y = -12 & (2) \end{cases}$$

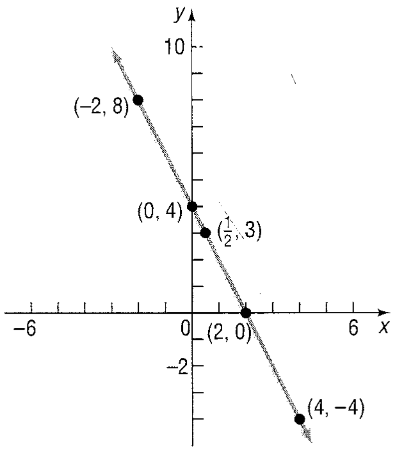
$$\begin{cases} 6x + 3y = 12 & (1) \text{ Multiplicamos cada lado de la ecuación (1) por 3.} \\ -6x - 3y = -12 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 3y = 12 & (1) \text{ Reemplazamos la ecuación (2) por la suma de} \\ 0 = 0 & (2) \text{ las ecuaciones (1) y (2).} \end{cases}$$

Así, el sistema original es equivalente a un sistema que tiene una ecuación, de modo que las ecuaciones son dependientes. Esto significa que todos los valores x y y para los cuales $6x + 3y = 12$ o, en forma equivalente, $2x + y = 4$ son soluciones. Por ejemplo, $x = 2$, $y = 0$; $x = 0$, $y = 4$; $x = -2$, $y = 8$; $x = 4$, $y = -4$; etcétera, son soluciones. De hecho, existe una infinidad de valores de x y y para los cuales $2x + y = 4$, de modo que el sistema original tiene una infinidad de soluciones. Escribiremos las soluciones del sistema original como

$$y = 4 - 2x$$

FIGURA 4
$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ -6x - 3y = -12 \end{cases}$$



donde x puede ser cualquier número real, o como

$$x = 2 - \frac{1}{2}y$$

donde y puede ser cualquier número real.

La figura 4 ilustra la situación del ejemplo 10. Observe que las gráficas de las dos ecuaciones son rectas, cada una con pendiente -2 y ordenada al origen 4. Así, las rectas son coincidentes. Observe también que la ecuación (2) del sistema original es simplemente -3 por la ecuación (1), lo cual indica que las dos ecuaciones son dependientes.

Para el sistema del ejemplo 10, podemos escribir algunas de la infinidad de soluciones, asignando valores a x para determinar después $y = 4 - 2x$. Así,

Si $x = 4$, entonces $y = -4$.
Si $x = 0$, entonces $y = 4$.
Si $x = \frac{1}{2}$, entonces $y = 3$.

Los pares (x, y) son puntos sobre la recta de la figura 4.

Verificación: Haga la gráfica de las rectas $2x + y = 4$ y $-6x - 3y = -12$ y compare el resultado con la figura 4. ¿Cómo puede asegurarse de que las rectas sean coincidentes?

Ahora resuelva los problemas 19 y 23.

Tres ecuaciones lineales con tres variables

Al igual que un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables también tiene exactamente una solución, ninguna, o una infinidad de soluciones.

Ahora veremos cómo funciona el método de eliminación en un sistema de tres ecuaciones con tres variables.

EJEMPLO 11 *Solución de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables*

Utilizar el método de eliminación para resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y - z = -1 & (1) \\ 4x - 3y + 2z = 16 & (2) \\ 2x - 2y - 3z = 5 & (3) \end{cases}$$

Solución Para un sistema de tres ecuaciones intentamos eliminar una variable a la vez, formando pares con las ecuaciones dadas. Nuestro plan para este sistema es eliminar la variable x, primero de las ecuaciones (1) y (2) y luego de las ecuaciones (1) y (3). A continuación eliminaremos la variable y de las ecuaciones resultantes, quedándonos una ecuación que sólo contiene a la variable z. Entonces podremos utilizar la sustitución regresiva para obtener los valores de y y luego de x.

Comenzamos multiplicando cada lado de la ecuación (1) por -2, como primer paso para eliminar la variable x de la ecuación (3), sumando las ecuaciones (1) y (3):

$$\begin{cases} -2x - 2y + 2z = 2 & (1) \text{ Multiplicamos cada lado de la ecuación (1) por } -2 \\ 4x - 3y + 2z = 16 & (2) \\ 2x - 2y - 3z = 5 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x - 2y + 2z = 2 & (1) \\ 4x - 3y + 2z = 16 & (2) \\ -4y - z = 7 & (3) \text{ Reemplazamos la ecuación (3) por la suma de las ecuaciones (1) y (3).} \end{cases}$$

Ahora eliminamos la variable x de la ecuación (2):

$$\begin{cases} -4x - 4y + 4z = 4 & (1) \text{ Multiplicamos cada lado de la ecuación (1) por 2.} \\ 4x - 3y + 2z = 16 & (2) \\ -4y - z = 7 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x - 4y + 4z = 4 & (1) \\ -7y + 6z = 20 & (2) \text{ Reemplazamos la ecuación (2) por la suma de las ecuaciones (1) y (2).} \\ -4y - z = 7 & (3) \end{cases}$$

Ahora eliminamos y de la ecuación (3):

$$\begin{cases} -4x - 4y + 4z = 4 & (1) \\ -28y + 24z = 80 & (2) \text{ Multiplicamos cada lado de la ecuación (2) por 4.} \\ 28y + 7z = -49 & (3) \text{ Multiplicamos cada lado de la ecuación (3) por } -7. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x - 4y + 4z = 4 & (1) \\ -28y + 24z = 80 & (2) \\ 31z = 31 & (3) \text{ Reemplazamos la ecuación (3) por la suma de las ecuaciones (2) y (3).} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x - 4y + 4z = 4 & (1) \\ -28y + 24z = 80 & (2) \\ z = 1 & (3) \text{ Multiplicamos cada lado de la ecuación (3) por } \tfrac{1}{31}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x - 4y + 4 = 4 & (1) \text{ Sustituimos en forma regresiva; reemplazamos } z \text{ por 1 en las ecuaciones (1) y (2).} \\ -28y + 24 = 80 & (2) \\ z = 1 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x - 4y = 0 & (1) \\ y = -2 & (2) \text{ Despejamos } y \text{ en la ecuación (2).} \\ z = 1 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x + 8 = 0 & (1) \text{ Sustituimos en forma regresiva; reemplazamos } y \text{ por } -2. \\ y = -2 & (2) \\ z = 1 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 & (1) \\ y = -2 & (2) \\ z = 1 & (3) \end{cases}$$

La solución del sistema original es $x = 2$, $y = -2$, $z = 1$. (Usted puede verificar este resultado.)

Revise de nuevo la solución del ejemplo 11. Observe el patrón: primero hicimos que la ecuación (3) sólo tuviera a la variable z; luego conseguimos que la ecuación (2) sólo tuviera a la variable y y que la ecuación (1) sólo tuviera a la variable x. Aunque usted es quien decide cuáles variables debe despejar, la metodología es la misma en todos los sistemas.

Ejercicio 10.1

En los problemas del 1 al 10 verifique si los valores dados de las variables son soluciones del sistema de ecuaciones.

1. $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 5x + 2y = 8 \end{cases}$ $x = 2,\ y = -1$

2. $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ x - 7y = -30 \end{cases}$ $x = -2,\ y = 4$

3. $\begin{cases} 3x - 4y = 4 \\ \frac{1}{2}x - 3y = -\frac{1}{2} \end{cases}$ $x = 2,\ y = \frac{1}{2}$

4. $\begin{cases} 2x + \frac{1}{2}y = 0 \\ 3x - 4y = -\frac{19}{2} \end{cases}$ $x = -\frac{1}{2},\ y = 2$

5. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$ $x = 2,\ y = 1$

6. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$ $x = -2,\ y = -1$

7. $\begin{cases} \dfrac{x}{1+x} + 3y = 6 \\ x + 9y^2 = 36 \end{cases}$ $x = 0,\ y = 2$

8. $\begin{cases} \dfrac{x}{x-1} + y = 5 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$ $x = 2,\ y = 3$

9. $\begin{cases} 3x + 3y + 2z = 4 \\ x - y - z = 0 \\ 2y - 3z = -8 \end{cases}$ $x = 1,\ y = -1,\ z = 2$

10. $\begin{cases} 4x - z = 7 \\ 8x + 5y - z = 0 \\ -x - y + 5z = 6 \end{cases}$ $x = 2,\ y = -3,\ z = 1$

En los problemas del 11 al 46 resuelva cada sistema de ecuaciones. Si el sistema no tiene solución, señale que es inconsistente. Utilice sustitución o eliminación.

11. $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 4 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 5x - y = 13 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - 3y = -8 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x = 24 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 4x + 5y = -3 \\ -2y = -4 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 3x - 6y = 2 \\ 5x + 4y = 1 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x + 4y = \frac{2}{3} \\ 3x - 5y = -10 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 2y = 3 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x - y = 5 \\ -3x + 3y = 2 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x + 3y = -1 \\ 4x + y = \frac{8}{3} \end{cases}$

23. $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 9x - 3y = 21 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 10x + y = 11 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 5x + 10y = 4 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x - y = \frac{1}{2} \end{cases}$

28. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = -2 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$

29. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 3 \\ \frac{1}{4}x - \frac{2}{3}y = -1 \end{cases}$

30. $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{3}{2}y = -5 \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{3}y = 11 \end{cases}$

31. $\begin{cases} 3x - 5y = 3 \\ 15x + 5y = 21 \end{cases}$

32. $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2} \end{cases}$

33. $\begin{cases} x - y = 6 \\ 2x - 3z = 16 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$

34. $\begin{cases} 2x + y = -4 \\ -2y + 4z = 0 \\ 3x - 2z = -11 \end{cases}$

35. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 7 \\ 2x + y + z = 4 \\ -3x + 2y - 2z = -10 \end{cases}$

36. $\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ -2x + 2y + z = -7 \\ 3x - 4y - 3z = 7 \end{cases}$

37. $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$

38. $\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ -x + 2y + z = 5 \\ 3x - 4y - z = 1 \end{cases}$

39. $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ -x + 2y - 3z = -4 \\ 3x - 2y - 7z = 0 \end{cases}$

40. $\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 2 \\ x + 5y + 3z = 2 \end{cases}$

41. $\begin{cases} 2x - 2y + 3z = 6 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ -2x + 3y - 7z = 1 \end{cases}$

42. $\begin{cases} 3x - 2y + 2z = 6 \\ 7x - 3y + 2z = -1 \\ 2x - 3y + 4z = 0 \end{cases}$

43. $\begin{cases} x + y - z = 6 \\ 3x - 2y + z = -5 \\ x + 3y - 2z = 14 \end{cases}$

44. $\begin{cases} x - y + z = -4 \\ 2x - 3y + 4z = -15 \\ 5x + y - 2z = 12 \end{cases}$

45. $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - 4y + z = -7 \\ -2x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$

46. $\begin{cases} x + 4y - 3z = -8 \\ 3x - y + 3z = 12 \\ x + y + 6z = 1 \end{cases}$

47. Resuelva: $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 8 \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{5}{y} = 0 \end{cases}$

48. Resuelva: $\begin{cases} \dfrac{4}{x} - \dfrac{3}{y} = 0 \\ \dfrac{6}{x} + \dfrac{3}{2y} = 2 \end{cases}$

[*Sugerencia*: Sean $u = 1/x$ y $v = 1/y$, resuelva el sistema en términos u y v. Después, utilice el hecho de que $x = 1/u$ y $y = 1/v$.]

En los problemas del 49 al 54 resuelva cada sistema de ecuaciones. Aproxime la solución redondeada a dos cifras decimales.

49. $\begin{cases} y = \sqrt{2}x - 20\sqrt{7} \\ y = -0.1x + 20 \end{cases}$

50. $\begin{cases} y = -\sqrt{3}x + 100 \\ y = 0.2x + \sqrt{19} \end{cases}$

51. $\begin{cases} \sqrt{2}x + \sqrt{3}y + \sqrt{6} = 0 \\ \sqrt{3}x - \sqrt{2}y + 60 = 0 \end{cases}$

52. $\begin{cases} \sqrt{5}x - \sqrt{6}y + 60 = 0 \\ 0.2x + 0.3y + \sqrt{5} = 0 \end{cases}$

53. $\begin{cases} \sqrt{3}x + \sqrt{2}y = \sqrt{0.3} \\ 100x - 95y = 20 \end{cases}$

54. $\begin{cases} \sqrt{6}x - \sqrt{5}y + \sqrt{1.1} = 0 \\ y = -0.2x + 0.1 \end{cases}$

55. La suma de dos números es 81. La diferencia del doble del primero y el triple del segundo es 62. Determine los dos números.

56. La diferencia de dos números es 40. Seis veces el menor menos el mayor es igual a 5. Determine los dos números.

57. El perímetro de un piso rectangular es de 90 pies. Determine las dimensiones del piso si la longitud es el doble de la anchura.

58. La cantidad de cerca necesaria para encerrar un campo rectangular es de 3000 metros. ¿Cuáles son las dimensiones del campo si se sabe que la diferencia entre la longitud y la anchura es de 50 metros?

59. *Costo de comida rápida.* Cuatro hamburguesas grandes con queso y dos malteadas de chocolate cuestan en total \$7.90. Dos malteadas cuestan 15 centavos más que una hamburguesa con queso. ¿Cuánto cuesta una hamburguesa con queso? ¿Una malteada?

60. *Boletos de un cine.* Un cine cobra \$9.00 por adulto y \$7.00 por cada persona de la tercera edad. En un día con asistencia de 325 personas el total recaudado fue de \$2495.00. ¿Cuántas personas pagaron boletos de adulto? ¿Cuántas de la tercera edad?

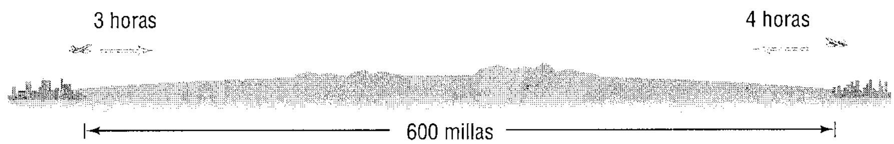
61. *Mezcla de nueces.* Una tienda vende nueces a \$5.00 la libra y cacahuates a \$1.50 la libra. El gerente decide hacer una mezcla de 30 libras de cacahuate con algo de nuez y venderla a \$3.00 la libra. ¿Cuántas libras de nuez debe mezclar con el cacahuate de modo que se produzca el mismo ingreso que se obtendría al vender las nueces por separado?

62. *Planeación financiera.* Una pareja recién jubilada necesita \$12,000.00 como complemento de su pensión. Disponen de \$150,000.00 para invertir y lograr ese ingreso por lo que han decidido utilizar dos tipos de inversión: bonos AA con un rendimiento del 10% anual y certificados bancarios con rendimiento del 5% anual.

(a) ¿Cuánto dinero deben invertir en cada depósito para obtener exactamente \$12,000.00?

(b) Si después de 2 años la pareja necesitará un ingreso anual de \$14,000.00, ¿cómo deben redistribuir su inversión para obtenerlo?

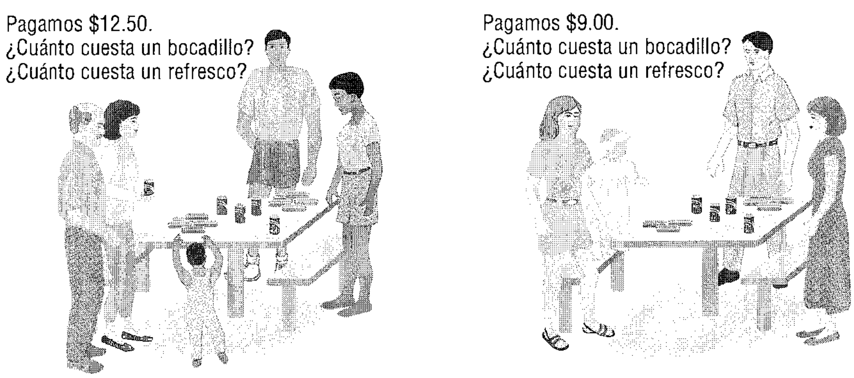
63. *Cálculo de la velocidad del viento.* Con viento a favor, una avioneta Piper puede volar 600 millas en 3 horas. Con el viento en contra puede volar la misma distancia en 4 horas. Determine por separado las velocidades promedio del viento y de la Piper.



64. *Cálculo de la velocidad del viento.* La velocidad promedio (sin viento) de un avión con un solo motor es de 150 millas por hora. Si el avión recorrió una misma distancia en 2 horas con el viento a favor y en 3 horas con el viento en contra, ¿cuál era la velocidad del viento?

65. *Administración de un restaurante.* La gerente de un restaurante desea adquirir 200 juegos de platos. Un diseño cuesta $25.00 por juego y otro cuesta $45.00 por juego. Si ella sólo desea gastar $7400.00, ¿cuántos juegos de cada diseño debe ordenar?

66. *Costo de comida rápida.* Un grupo de personas compró 10 bocadillos y 5 refrescos por $12.50. Un segundo grupo compró 7 bocadillos y 4 refrescos por $9.00. ¿Cuál es el costo de un bocadillo? ¿De un refresco?

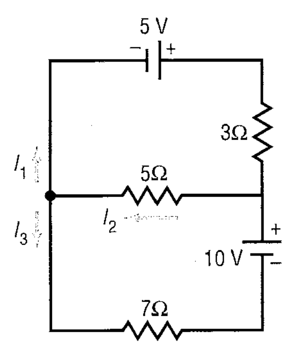


67. *Cálculo de una devolución.* La tienda donde compramos no marca los precios de los artículos. Mi esposa fue a la tienda, compró tres paquetes de tocino, de una libra cada uno, y dos cartones de huevo; pagó un total de $7.45. Sin saber que ella había ido a la tienda yo también fui, compré un paquete de tocino y tres cartones de huevo, pagando un total de $6.45. Ahora queremos devolver dos paquetes de tocino y dos cartones de huevo. ¿Cuánto dinero nos regresarán?

68. *Determinación de la corriente de un río.* Un nadador necesita 3 horas para nadar 15 millas río abajo y 5 horas para el viaje de regreso. Determine la velocidad promedio del nadador en aguas tranquilas. ¿Qué tan rápida es la corriente del río? (Suponga que la velocidad del nadador es la misma en cada dirección.)

69. La suma de tres números es 48. La suma de los dos números mayores es el triple del menor. La suma de los dos números menores es 6 unidades más que el número mayor. Determine los números.

70. Una colección de monedas consta de 37 piezas (de 1, 10 y 25 centavos). Si la colección tiene un valor total de $3.25 y hay 5 veces más monedas de 10 centavos que de 1 centavo, ¿cuántas monedas de cada tipo hay en la colección?



71. *Electricidad: leyes de Kirchhoff.* Una aplicación de las *leyes de Kirchhoff* al circuito de la figura anexa produce el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} I_2 = I_1 + I_3 \\ 5 - 3I_1 - 5I_2 = 0 \\ 10 - 5I_2 - 7I_3 = 0 \end{cases}$$

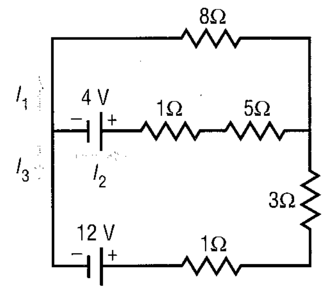
Determine las corrientes I_1, I_2, y I_3.*

**Fuente:* Basado en Raymond Serway, *Physics*, tercera edición. Filadelfia: Saunders, 1990, problema 31, p. 790.

72. *Electricidad: leyes de Kirchhoff.* Una aplicación de las leyes de Kirchhoff al circuito de la figura anexa produce el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} I_3 = I_1 + I_2 \\ 8 = 4I_3 + 6I_2 \\ 8I_1 = 4 + 6I_2 \end{cases}$$

Determine las corrientes I_1, I_2, y I_3.†



73. Un teatro de Broadway tiene 500 asientos, divididos en asientos de orquesta, luneta y de galería. Los asientos de orquesta se venden a \$50.00, los de luneta a \$35.00 y los de galería a \$25.00. Si se venden todos los asientos el ingreso total es de \$17,100.00. Si se venden todos los asientos de luneta y de galería, pero sólo la mitad de los de orquesta, el ingreso es de \$14,600.00. ¿Cuántos asientos existen de cada tipo?

74. *Mesas de trabajo en un laboratorio.* Un laboratorio de química puede ser utilizado por 38 estudiantes al mismo tiempo. El laboratorio tiene 16 mesas de trabajo, algunas configuradas para 2 estudiantes y otras para 3. ¿Cuántas mesas de trabajo existen de cada tipo?

75. Plantee tres sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables tales que:

(a) No tengan solución. (b) Tengan exactamente una solución. (c) Tengan una infinidad de soluciones.

Déselas a un amigo para que las resuelva y critique.

76. Escriba unas líneas explicando su estrategia para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables.

77. ¿Prefiere el método de sustitución o el de eliminación para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables? ¿Y en el caso de tres ecuaciones lineales con tres variables? Justifique sus respuestas.

78. *Ajuste de curvas.* Determine números reales b y c tales que la parábola $y = x^2 + bx + c$ pase por los puntos $(1, 3)$ y $(3, 5)$.

79. *Ajuste de curvas.* Determine números reales b y c tales que la parábola $y = x^2 + bx + c$ pase por los puntos $(1, 2)$ y $(-1, 3)$.

80. *Ajuste de curvas.* Determine números reales b y c tales que la parábola $y = x^2 + bx + c$ pase por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

81. *Ajuste de curvas.* Determine números reales a, b y c tales que la parábola $y = ax^2 + bx + c$ pase por los puntos $(-1, 4)$, $(2, 3)$ y $(0, 1)$.

82. *Ajuste de curvas.* Determine números reales a, b y c tales que la parábola $y = ax^2 + bx + c$ pase por los puntos $(-1, -2)$, $(1, -4)$ y $(2, 4)$.

83. Resuelva: $\begin{cases} y = m_1x + b_1 \\ y = m_2x + b_2 \end{cases}$

donde $m_1 \neq m_2$.

84. Resuelva: $\begin{cases} y = m_1x + b_1 \\ y = m_2x + b_2 \end{cases}$

donde $m_1 = m_2 = m$ y $b_1 \neq b_2$.

85. Resuelva: $\begin{cases} y = m_1x + b_1 \\ y = m_2x + b_2 \end{cases}$

donde $m_1 = m_2 = m$ y $b_1 = b_2 = b$.

†*Fuente: Op cit*, problema 27, p. 790.

Sistemas de ecuaciones lineales: matrices

El punto de vista sistemático del método de eliminación para resolver un sistema de ecuaciones lineales proporciona otro método de solución que utiliza una notación simplificada.

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 4y = 14 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

Si optamos por no escribir los símbolos utilizados para las variables, podemos representar este sistema como

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 4 & 14 \\ 3 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

donde se entiende que la primera columna representa los coeficientes de la variable x, la segunda columna los coeficientes de y y la tercera columna las constantes ubicadas al lado derecho de los signos de igualdad. La línea vertical sirve para recordarnos los signos de igualdad. Los grandes corchetes cuadrados son los símbolos que se utilizan tradicionalmente en álgebra para denotar una *matriz*.

Matriz

Una **matriz** es un arreglo rectangular de números,

$$\begin{array}{lc} & \begin{array}{ccccccc} \text{Columna 1} & \text{Columna 2} & & \text{Columna } j & & \text{Columna } n \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{Renglón 1} \\ \text{Renglón 2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \text{Renglón } i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \text{Renglón } m \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \qquad (1)$$

Cada número a_{ij} de la matriz tiene dos índices: **índice de renglón,** i, e **índice de columna,** j. La matriz en (1) tiene m renglones y n columnas. Los números a_{ij} son las **entradas** de la matriz.

Ahora utilizaremos la notación matricial para representar un sistema de ecuaciones lineales. Las matrices utilizadas para representar sistemas de ecuaciones lineales se denominan **matrices aumentadas.**

EJEMPLO 1

Escritura de la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones

Escribir la matriz aumentada de cada sistema de ecuaciones.

(a) $\begin{cases} 3x - 4y = -6 & (1) \\ 2x - 3y = -5 & (2) \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x - y + z = 0 & (1) \\ x + z - 1 = 0 & (2) \\ x + 2y - 8 = 0 & (3) \end{cases}$

Solución

(a) La matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{rr|r} 3 & -4 & -6 \\ 2 & -3 & -5 \end{array}\right]$$

(b) Hay que tener cuidado y escribir el sistema con los coeficientes de todas las variables presentes (si falta alguna variable su coeficiente es 0), y ubicar todas las constantes al lado derecho de los signos de igualdad. Así, debemos reordenar el sistema dado como sigue:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 & (1) \\ x + z - 1 = 0 & (2) \\ x + 2y - 8 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - \quad y + \quad z = 0 & (1) \\ x + 0 \cdot y + \quad z = 1 & (2) \\ x + \quad 2y + 0 \cdot z = 8 & (3) \end{cases}$$

La matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 8 \end{array}\right]$$

Si no incluimos las constantes a la derecha del signo de igualdad, es decir, a la derecha de la barra vertical en la matriz aumentada, en un sistema de ecuaciones, la matriz resultante será una **matriz de coeficientes** del sistema. Para los sistemas del ejemplo 1, las matrices de coeficientes son

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora resuelva el problema 3.

EJEMPLO 2

Escritura de un sistema de ecuaciones lineales a partir de la matriz aumentada

Escribir el sistema de ecuaciones lineales correspondiente a cada matriz aumentada.

(a) $\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 13 \\ -3 & 1 & -10 \end{array}\right]$ (b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & 7 \\ 2 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$

Solución

(a) La matriz tiene dos renglones, de modo que representa un sistema de dos ecuaciones. Las dos columnas a la izquierda de la barra vertical indican que el sistema tiene dos variables. Si utilizamos x, y para denotar esas variables, el sistema de ecuaciones es

$$\begin{cases} 5x + 2y = 13 & (1) \\ -3x + y = -10 & (2) \end{cases}$$

(b) Esta matriz representa un sistema de tres ecuaciones con tres variables. Si x, y, z son las tres variables, este sistema es

$$\begin{cases} 3x - y - z = 7 & (1) \\ 2x \qquad + 2z = 8 & (2) \\ \qquad y + z = 0 & (3) \end{cases}$$

Operaciones sobre renglones de una matriz

EJEMPLO 3

Solución de un sistema de ecuaciones

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 4x - 3y = 11 & (1) \\ 3x + 2y = 4 & (2) \end{cases}$$

Solución Utilizaremos una variante del método de eliminación para resolver el sistema. En primer lugar, multiplicamos cada lado de la ecuación (2) por -1 y la sumamos con la ecuación (1). Reemplazamos la ecuación (1) con el resultado:

$$\begin{cases} x - 5y = 7 & (1) \\ 3x + 2y = 4 & (2) \end{cases}$$

Multiplicamos cada lado de la ecuación (1) por -3 y la sumamos a la ecuación (2). Reemplazamos la ecuación (2) con el resultado:

$$\begin{cases} x - 5y = 7 & (1) \\ 0 \cdot x + 17y = -17 & (2) \end{cases}$$

Multiplicamos cada lado de la ecuación (2) por $\frac{1}{17}$:

$$\begin{cases} x - 5y = 7 & (1) \\ y = -1 & (2) \end{cases}$$

Ahora sustituimos en forma regresiva $y = -1$ en la ecuación (1) para obtener

$$\begin{aligned} x - 5y &= 7 \\ x - 5(-1) &= 7 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 2$, $y = -1$.

El patrón de resolución anterior proporciona una manera metódica para resolver cualquier sistema de ecuaciones. La idea es partir de la matriz aumentada del sistema,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & -3 & 11 \\ 3 & 2 & 4 \end{array}\right] \qquad \begin{cases} 4x - 3y = 11 & (1) \\ 3x + 2y = 4 & (2) \end{cases}$$

y llegar a la matriz,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \qquad \begin{cases} x - 5y = 7 & (1) \\ y = -1 & (2) \end{cases}$$

Revisemos de nuevo el procedimiento partiendo de la matriz aumentada original y manteniendo en mente la matriz aumentada final:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & -3 & 11 \\ 3 & 2 & 4 \end{array}\right] \qquad \begin{cases} 4x - 3y = 11 & (1) \\ 3x + 2y = 4 & (2) \end{cases}$$

Como antes, comenzamos multiplicando cada lado de la ecuación (2) por -1 y sumando el resultado a la ecuación (1). Esto es equivalente a multiplicar cada entrada del segundo renglón de la matriz por -1, sumando el resultado a las entradas correspondientes del primer renglón y reemplazando todo este renglón con esas entradas. El resultado de este paso es que el número 1 aparece en el primer renglón y en la primera columna:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & 7 \\ 3 & 2 & 4 \end{array}\right] \qquad \begin{cases} x - 5y = 7 & (1) \\ 3x + 2y = 4 & (2) \end{cases}$$

Multiplicamos cada entrada del primer renglón por -3, sumamos el resultado a las entradas del segundo renglón y reemplazamos el segundo renglón por estas entradas. El resultado de este paso es que el número 0 aparece en el segundo renglón, primera columna:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & 7 \\ 0 & 17 & -17 \end{array}\right] \qquad \begin{cases} x - 5y = 7 & (1) \\ 0 \cdot x + 17y = -17 & (2) \end{cases}$$

Multiplicamos cada entrada del segundo renglón por $\frac{1}{17}$. El resultado de este paso es que el número 1 aparece en el renglón 2, columna 2:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \qquad \begin{cases} x - 5y = 7 & (1) \\ y = -1 & (2) \end{cases}$$

Ahora que sabemos que $y = -1$, podemos realizar la sustitución regresiva para obtener $x = 2$.

Las operaciones realizadas en la matriz aumentada son **operaciones de renglón.** De éstas existen tres básicas:

Operaciones de renglón

1. Intercambio de dos renglones cualesquiera.
2. Reemplazo de un renglón por un múltiplo distinto de cero de ese renglón.
3. Reemplazo de un renglón por la suma de ese renglón y un múltiplo constante de algún otro renglón.

Estas tres operaciones de renglón corresponden a las tres reglas ya dadas anteriormente para obtener un sistema equivalente de ecuaciones. Así, al realizar una operación de renglón en una matriz, la matriz resultante representa un sistema de ecuaciones equivalente al sistema representado por la matriz original.

Por ejemplo, consideremos la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

Supongamos que queremos aplicar una operación de renglón a esta matriz para tener una matriz cuya entrada en el renglón 2, columna 1 sea un cero. La operación de renglón por utilizar es

Multiplicar cada entrada del renglón 1 por -4 y sumar el resultado a las entradas correspondientes del renglón 2. (2)

Si utilizamos R_2 para representar las nuevas entradas del renglón 2 y r_1 y r_2 para las entradas originales de los renglones 1 y 2, respectivamente, entonces podremos representar la operación de renglón en el enunciado (2) como

$$R_2 = -4r_1 + r_2$$

Así

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 = -4r_1 + r_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ -4(1) + 4 & -4(2) + (-1) & -4(3) + 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -9 & -10 \end{array}\right]$$

Como queríamos, ahora tenemos la entrada 0 en el renglón 2, columna 1.

EJEMPLO 4 *Aplicación de una operación de renglón a una matriz aumentada*

Apicar las operaciones de renglón $R_2 = -3r_1 + r_2$ a la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -5 & 9 \end{array}\right]$$

Solución La operación de renglón $R_2 = -3r_1 + r_2$ indica que debemos reemplazar las entradas del renglón 2 por las entradas obtenidas después de multiplicar cada entrada del renglón 1 por -3 y sumar el resultado con las entradas correspondientes del renglón 2. Así,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -5 & 9 \end{array}\right] \underset{R_2 = -3r_1 + r_2}{\xrightarrow{}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ -3(1) + 3 & (-3)(-2) + (-5) & -3(2) + 9 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

EJEMPLO 5 *Determinación de una operación de renglón particular*

Utilizar la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

y determinar una operación de renglón que produzca una matriz con un 0 en el renglón 1, columna 2.

Solución Queremos un 0 en el renglón 1, columna 2. Podemos obtener este resultado al multiplicar el renglón 2 por 2 y sumar el resultado al renglón 1. Es decir, aplicamos la operación de renglón $R_1 = 2r_2 + r_1$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \underset{R_1 = 2r_2 + r_1}{\xrightarrow{}} \left[\begin{array}{cc|c} 2(0) + 1 & 2(1) + (-2) & 2(3) + 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Debemos hacer un comentario en cuanto a la notación que hemos presentado. Una operación de renglón como $R_1 = 2r_2 + r_1$ cambia las entradas del renglón 1. Observe también que para modificar las entradas de un renglón dado, multiplicamos las entradas de algún otro renglón por un número adecuado y sumamos los resultados a las entradas originales del renglón por modificar.

Ahora resuelva los problemas 11 y 15.

Veamos a continuación la forma de utilizar las operaciones de renglón para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

EJEMPLO 6 *Solución de un sistema de ecuaciones mediante matrices*

Resolver: $\begin{cases} 4x + 3y = 11 & (1) \\ x - 3y = -1 & (2) \end{cases}$

Solución Primero escribimos la matriz aumentada que representa a este sistema:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 11 \\ 1 & -3 & -1 \end{array}\right]$$

El primer paso es obtener un 1 en el renglón 1, columna 1. La manera más sencilla de lograr esto es intercambiando los renglones 1 y 2:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -1 \\ 4 & 3 & 11 \end{array}\right]$$

Ahora, queremos un 0 debajo de la entrada 1 en la columna 1. Utilizamos la operación de renglón $R_2 = -4r_1 + r_2$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -1 \\ 4 & 3 & 11 \end{array}\right] \underset{R_2 = -4r_1 + r_2}{\rightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 15 & 15 \end{array}\right]$$

Ahora queremos obtener 1 como entrada en el renglón 2, columna 2. Utilizamos $R_2 = \frac{1}{15}r_2$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 15 & 15 \end{array}\right] \underset{R_2 = \frac{1}{15}r_2}{\rightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

El segundo renglón de la matriz de la derecha representa la ecuación $y = 1$. Así, con el valor $y = 1$, sustituimos en forma regresiva en la ecuación $x - 3y = -1$ (del primer renglón) para obtener

$$x - 3(1) = -1 \quad y = 1$$
$$x = 2$$

La solución del sistema es $x = 2$, $y = 1$.

Ahora resuelva el problema 31.

Podemos resumir los pasos que utilizamos para resolver el sistema de ecuaciones lineales del ejemplo 6 como sigue:

Método de matrices para resolver un sistema de ecuaciones lineales

PASO 1: Escribir la matriz aumentada que representa al sistema.

PASO 2: Realizar operaciones de renglón que coloquen la entrada 1 en el renglón 1, columna 1.

PASO 3: Realizar operaciones de renglón que dejen un 1 en el renglón 1, columna 1, sin variar pero de modo que aparezcan ceros debajo de esta entrada en la columna 1.

PASO 4: Realizar operaciones de renglón que coloquen la entrada 1 en el renglón 2, columna 2 y dejen las entradas en las columnas a su izquierda sin variación. Si no es posible colocar un 1 en el renglón 2, columna 2, entonces trate de colocar un 1 en el renglón 2, columna 3. Una vez que un 1 quede en un lugar, realizar operaciones de renglón para colocar ceros debajo de él.

PASO 5: Repetir el paso 4 colocando un 1 en el siguiente renglón pero en una columna hacia la derecha. Continuar hasta llegar al último renglón inferior o la barra vertical.

PASO 6: Si se obtienen renglones que sólo contengan ceros del lado izquierdo de la barra vertical, coloque esos renglones en la parte inferior de la matriz.

Al concluir los pasos del 1 al 6 la matriz tendrá **forma escalonada.** Un poco de reflexión le convencerá que una matriz tiene forma escalonada cuando:

1. La entrada del renglón 1, columna 1, es un 1, y aparecen ceros debajo de ésta.
2. La primera entrada distinta de cero en cada renglón después del primero es un 1, con ceros debajo de éste, y aparece a la derecha de la primera entrada distinta de cero en cualquier renglón superior.
3. Todos los renglones que sólo contienen ceros a la izquierda de la barra vertical aparecen en la parte inferior.

Dos de las ventajas de resolver un sistema de ecuaciones escribiendo la matriz aumentada en forma escalonada son las siguientes:

1. El proceso es algorítmico; es decir, consta de pasos repetitivos, de modo que puede programarse en una computadora.
2. El proceso funciona con cualquier sistema de ecuaciones lineales, sin importar el número de ecuaciones o de variables.

El siguiente ejemplo muestra cómo escribir una matriz en forma escalonada.

EJEMPLO 7 *Solución de un sistema de ecuaciones mediante matrices*

Resolver: $\begin{cases} x - y + z = 8 & (1) \\ 2x + 3y - z = -2 & (2) \\ 3x - 2y - 9z = 9 & (3) \end{cases}$

Solución PASO 1: La matriz aumentada del sistema es

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -9 & 9 \end{array}\right]$$

PASO 2: Como la entrada 1 ya está presente en el renglón 1, columna 1, podemos ir directamente al paso 3.

PASO 3: Realizamos las operaciones de renglón $R_2 = -2r_1 + r_2$ y $R_3 = -3r_1 + r_3$. Cada una de estas operaciones deja la entrada 1 en el renglón 1, columna 1 sin variar, y hacen que aparezcan ceros debajo de ella:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -9 & 9 \end{array}\right] \underset{\substack{R_2 = -2r_1 + r_2 \\ R_3 = -3r_1 + r_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & -3 & -18 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \end{array}\right]$$

PASO 4: La manera más sencilla de obtener la entrada 1 en el renglón 2, columna 2, sin alterar la columna 1 es intercambiando los renglones 2 y 3 (otra forma sería multiplicar el renglón 2 por $\frac{1}{5}$, pero esto nos haría trabajar con fracciones):

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ 0 & 5 & -3 & -18 \end{array}\right]$$

Para obtener ceros debajo del 1 en el renglón 2, columna 2, realizamos la operación de renglón $R_3 = -5r_2 + r_3$:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ 0 & 5 & -3 & -18 \end{array}\right] \underset{R_3 = -5r_2 + r_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & 57 & 57 \end{array}\right]$$

PASO 5: Para continuar, colocamos un 1 en el renglón 3, columna 3, utilizando $R_3 = \frac{1}{57}r_3$:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & 57 & 57 \end{array}\right] \underset{R_3 = \frac{1}{57}r_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Como hemos llegado al último renglón, la matriz tiene forma escalonada y podemos detenernos.

El sistema de ecuaciones representado por la matriz en forma escalonada es

$$\begin{cases} x - y + \quad z = 8 \\ \quad y - 12z = -15 \\ \qquad\quad z = 1 \end{cases}$$

Con $z = 1$, sustituimos en forma regresiva para obtener

$$\begin{cases} x - y + 1 = 8 & \text{Del renglón 1 de la matriz} \\ y - 12(1) = -15 & \text{Del renglón 2 de la matriz} \end{cases}$$

Así, obtenemos $y = -3$, y con la sustitución en forma regresiva en $x - y = 7$, tenemos $x = 4$. La solución del sistema es $x = 4$, $y = -3$, $z = 1$.

A veces conviene escribir una matriz en **forma escalonada reducida.** En esta forma utilizamos operaciones de renglón para obtener entradas que son 0 sobre (al igual que debajo) del primer 1 de un renglón. Por ejemplo, la forma escalonada obtenida en la solución del ejemplo 7 es

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Para escribir esta matriz en forma escalonada reducida procedemos como sigue:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{R_1 = r_2 + r_1}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -11 & -7 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{R_1 = 11r_3 + r_1 \\ R_2 = 12r_3 + r_2}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Ahora la matriz está en forma escalonada reducida. La ventaja de escribir la matriz en esta forma es que la solución del sistema, $x = 4$, $y = -3$, $z = 1$, es evidente, sin tener que realizar la sustitución regresiva. En la sección 12.1, donde analizaremos la inversa de una matriz, veremos otra ventaja.

Ahora resuelva el problema 49.

El método matricial para resolver un sistema de ecuaciones lineales también identifica a los sistemas que tienen una infinidad de soluciones y a los que son inconsistentes. *Veamos* cómo lo hace.

EJEMPLO 8 *Solución matricial de un sistema de ecuaciones*

Resolver: $\begin{cases} 6x - y - z = 4 & (1) \\ -12x + 2y + 2z = -8 & (2) \\ 5x + y - z = 3 & (3) \end{cases}$

Solución Comenzamos con la matriz aumentada del sistema:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 6 & -1 & -1 & 4 \\ -12 & 2 & 2 & -8 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right] \underset{R_1 = -1r_3 + r_1}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -12 & 2 & 2 & -8 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right] \underset{\substack{R_2 = 12r_1 + r_2 \\ R_3 = -5r_1 + r_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -22 & 2 & 4 \\ 0 & 11 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

Para obtener un 1 en el renglón 2, columna 2 sin alterar la columna 1, hacemos $R_2 = -\frac{1}{22}r_2$ o $R_3 = \frac{1}{11}r_3$. (¿Puede advertir por qué?) Utilizamos la primera opción:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -22 & 2 & 4 \\ 0 & 11 & -1 & -2 \end{array}\right] \underset{R_2 = -\frac{1}{22}r_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & 11 & -1 & -2 \end{array}\right] \underset{R_3 = -11r_2 + r_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Esta matriz tiene forma escalonada. Como el renglón inferior sólo tiene ceros, el sistema consta en realidad de dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 2y = 1 & (1) \\ y - \frac{1}{11}z = -\frac{2}{11} & (2) \end{cases}$$

Realizamos la sustitución regresiva de la solución para y desde la segunda ecuación, $y = \frac{1}{11}z - \frac{2}{11}$, a la primera ecuación para obtener

$$x = 2y + 1 = 2(\tfrac{1}{11}z - \tfrac{2}{11}) + 1 = \tfrac{2}{11}z + \tfrac{7}{11}$$

Así, el sistema original es equivalente al sistema

$$\begin{cases} x = \frac{2}{11}z + \frac{7}{11} & (1) \\ y = \frac{1}{11}z - \frac{2}{11} & (2) \end{cases}$$

donde z puede ser cualquier número real.

Analicemos un poco la situación. El sistema original de tres ecuaciones es equivalente a uno con dos ecuaciones. Esto significa que cualesquiera valores de x, y, z que satisfagan

$$x = \tfrac{2}{11}z + \tfrac{7}{11} \quad \text{y} \quad y = \tfrac{1}{11}z - \tfrac{2}{11}$$

eran soluciones. Por ejemplo, $z = 0$, $x = \frac{7}{11}$, $y = -\frac{2}{11}$; $z = 1$, $x = \frac{9}{11}$, $y = -\frac{1}{11}$; y $z = -1$, $x = \frac{5}{11}$, $y = -\frac{3}{11}$ son algunas de las soluciones del sistema original. De hecho, existe una infinidad de valores de x, y, z para los que se satisfacen las dos ecuaciones. Es decir, el sistema original tiene una infinidad de soluciones. Escribiremos la solución del sistema original como

$$\begin{cases} x = \frac{2}{11}z + \frac{7}{11} \\ y = \frac{1}{11}z - \frac{2}{11} \end{cases}$$

donde z puede ser cualquier número real.

También podemos determinar la solución si escribimos la matriz aumentada en forma escalonada reducida. Partiendo de la forma escalonada, tenemos

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{R_1 = 2r_2 + r_1}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -\frac{2}{11} & \frac{7}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La matriz de la derecha tiene forma escalonada reducida. El sistema de ecuaciones correspondiente es

$$\begin{cases} x - \frac{2}{11}z = \frac{7}{11} & (1) \\ y - \frac{1}{11}z = -\frac{2}{11} & (2) \end{cases}$$

o bien, en forma equivalente,

$$\begin{cases} x = \frac{2}{11}z + \frac{7}{11} & (1) \\ y = \frac{1}{11}z - \frac{2}{11} & (2) \end{cases}$$

donde z puede ser cualquier número real.

Ahora resuelva el problema 53.

EJEMPLO 9 *Solución matricial de un sistema de ecuaciones*

Resolver: $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y - z = 3 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$

Solución La matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{R_2 = -2r_1 + r_2 \\ R_3 = -1r_1 + r_3}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & -6 \end{array}\right] \underset{\substack{\text{Intercambiamos los} \\ \text{renglones 2 y 3.}}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & -3 & -3 & -9 \end{array}\right] \underset{R_3 = 3r_2 + r_3.}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -27 \end{array}\right]$$

Esta matriz tiene forma escalonada. El renglón inferior es equivalente a la ecuación

$$0x + 0y + 0z = -27$$

que no tiene solución. Por lo tanto, el sistema original es inconsistente.

Ahora resuelva los problemas 23 y 29.

El método de matrices es de particular eficacia en sistemas de ecuaciones donde el número de ecuaciones y de variables es distinto. Aquí también, tales sistemas de ecuaciones pueden ser inconsistentes o consistentes. Si un sistema es consistente, tendrá exactamente una solución o una infinidad de soluciones.

Veamos ahora un sistema de cuatro ecuaciones con tres variables.

EJEMPLO 10 *Solución matricial de un sistema de ecuaciones*

Resolver: $\begin{cases} x - 2y + z = 0 & (1) \\ 2x + 2y - 3z = -3 & (2) \\ y - z = -1 & (3) \\ -x + 4y + 2z = 13 & (4) \end{cases}$

Solución La matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 2 & 13 \end{array}\right] \underset{\substack{R_2 = -2r_1 + r_2 \\ R_4 = r_1 + r_4}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 13 \end{array}\right] \underset{\text{Intercambiamos los renglones 2 y 3.}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 13 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{R_3 = -5r_2 + r_3 \\ R_4 = -2r_2 + r_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array}\right] \underset{R_4 = -5r_3 + r_4}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Podríamos detenernos en este punto, pues la matriz tiene forma escalonada, y sustituir en forma regresiva $z = 3$ para determinar x y y. O bien podemos continuar para obtener la forma escalonada reducida:

$$\underset{R_1 = 2r_2 + r_1}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{R_1 = r_3 + r_1 \\ R_2 = r_3 + r_2}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La matriz tiene ahora la forma escalonada reducida, y podemos ver que la solución es $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. ■

EJEMPLO 11 *Mezcla de ácidos*

Un laboratorio químico tiene tres recipientes de ácido nítrico, HNO_3. Un recipiente contiene una solución concentrada de HNO_3 al 10%, el segundo tiene HNO_3 al 20% y el tercero HNO_3 al 40%. ¿Cuántos litros de cada recipiente hay que mezclar para obtener 100 litros de una solución cuya concentración sea de 25% de HNO_3?

Solución Sean x, y, z el número de litros de las concentraciones de 10, 20 y 40% de HNO_3, respectivamente. Queremos 100 litros en total, y que la concentración de HNO_3 de cada solución sume 25% de 100 litros. Así, tenemos que

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 0.10x + 0.20y + 0.40z = 0.25(100) \end{cases}$$

Ahora, la matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0.10 & 0.20 & 0.40 & 25 \end{array}\right] \underset{R_2 = -0.10r_1 + r_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 0.10 & 0.30 & 15 \end{array}\right]$$

$$\underset{R_2 = 10r_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 3 & 150 \end{array}\right] \underset{R_1 = -1r_2 + r_1}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -50 \\ 0 & 1 & 3 & 150 \end{array}\right]$$

La matriz tiene ahora la forma escalonada reducida. La matriz final representa al sistema

$$\begin{cases} x - 2z = -50 & (1) \\ y + 3z = 150 & (2) \end{cases}$$

que tiene una infinidad de soluciones dadas por

$$\begin{cases} x = 2z - 50 & (1) \\ y = -3z + 150 & (2) \end{cases}$$

donde z es cualquier número real. Sin embargo, las consideraciones prácticas de este problema nos obligan a restringir las soluciones a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Además, necesitamos que $25 \leq z \leq 50$, pues en caso contrario $x < 0$ o $y < 0$. La tabla 1 muestra algunas soluciones posibles. La determinación final acerca de la solución elegida por el laboratorio dependerá de la disponibilidad, las diferencias de costos y otras consideraciones.

TABLA 1

LITROS DE SOLUCIÓN AL 10%	LITROS DE SOLUCIÓN AL 20%	LITROS DE SOLUCIÓN AL 40%	LITROS DE SOLUCIÓN AL 25%
0	75	25	100
10	60	30	100
12	57	31	100
16	51	33	100
26	36	38	100
38	18	44	100
46	6	48	100
50	0	50	100

10.2

Ejercicio 10.2

En los problemas del 1 al 10 escriba la matriz aumentada del sistema de ecuaciones dado.

1. $\begin{cases} x - 5y = 5 \\ 4x + 3y = 6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 4x - 2y = 5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ 4x - 6y + 2 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 9x - y = 0 \\ 3x - y - 4 = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 0.01x - 0.03y = 0.06 \\ 0.13x + 0.10y = 0.20 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \frac{4}{3}x - \frac{3}{2}y = \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y = \frac{2}{3} \end{cases}$

7. $\begin{cases} x - y + z = 10 \\ 3x + 2y = 5 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + y = 5 \\ 2x - 3z = 2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 0 \\ x - 5z + 2 = 0 \end{cases}$

En los problemas del 11 al 20 realice las operaciones indicadas, en orden (a), (b) y (c), sobre la matriz aumentada que se especifica.

11. $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -5 & -2 \\ 2 & -5 & -4 & 5 \\ -3 & 5 & 4 & 6 \end{array}\right]$ (a) $R_2 = -2r_1 + r_2$ (b) $R_3 = 3r_1 + r_3$ (c) $R_3 = 4r_2 + r_3$

12. $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -3 & -3 \\ 2 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right]$ (a) $R_2 = -2r_1 + r_2$ (b) $R_3 = 3r_1 + r_3$ (c) $R_3 = 7r_2 + r_3$

13. $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & 6 & 6 \\ -3 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right]$ (a) $R_2 = -2r_1 + r_2$ (b) $R_3 = 3r_1 + r_3$ (c) $R_3 = 6r_2 + r_3$

14. $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 3 & -5 \\ 2 & -5 & -3 & -5 \\ -3 & -2 & 4 & 6 \end{array}\right]$ (a) $R_2 = -2r_1 + r_2$ (b) $R_3 = 3r_1 + r_3$ (c) $R_3 = 11r_2 + r_3$

15. $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & -6 \\ 2 & -5 & 3 & -4 \\ -3 & -6 & 4 & 6 \end{array}\right]$ (a) $R_2 = -2r_1 + r_2$ (b) $R_3 = 3r_1 + r_3$ (c) $R_3 = 15r_2 + r_3$

16. $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -4 & -6 \\ 2 & -5 & 6 & -6 \\ -3 & 1 & 4 & 6 \end{array}\right]$ (a) $R_2 = -2r_1 + r_2$ (b) $R_3 = 3r_1 + r_3$ (c) $R_3 = 8r_2 + r_3$

17. $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 6 & -2 \\ -3 & 1 & 4 & 6 \end{array}\right]$ (a) $R_2 = -2r_1 + r_2$ (b) $R_3 = 3r_1 + r_3$ (c) $R_3 = 8r_2 + r_3$

18. $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & 2 & 6 \\ -3 & -6 & 4 & 6 \end{array}\right]$ (a) $R_2 = -2r_1 + r_2$ (b) $R_3 = 3r_1 + r_3$ (c) $R_3 = 15r_2 + r_3$

19. $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 4 & 6 \end{array}\right]$ (a) $R_2 = -2r_1 + r_2$ (b) $R_3 = 3r_1 + r_3$ (c) $R_3 = 11r_2 + r_3$

20. $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 5 & -3 \\ 2 & -5 & 1 & -4 \\ -3 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right]$ (a) $R_2 = -2r_1 + r_2$ (b) $R_3 = 3r_1 + r_3$ (c) $R_3 = 6r_2 + r_3$

En los problemas del 21 al 30 se proporciona la forma escalonada reducida de un sistema de ecuaciones lineales. Escriba el sistema de ecuaciones correspondiente a la matriz dada. Utilice x, y, o bien x, y, z, incluso x_1, x_2, x_3, x_4 como variables. Determine si el sistema es consistente o inconsistente. Si es consistente proporcione la solución.

21. $\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$

22. $\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

23. $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$

24. $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$

25. $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

26. $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

27. $\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$

28. $\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$

29. $\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

30. $\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$

En los problemas del 31 al 72 resuelva cada sistema de ecuaciones mediante matrices (operaciones de renglón). Si el sistema no tiene soluciones señale que es inconsistente.

31. $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 4 \end{cases}$

32. $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$

33. $\begin{cases} x - 5y = -13 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$

34. $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - 3y = -8 \end{cases}$

35. $\begin{cases} 3x - 6y = 24 \\ 5x + 4y = 12 \end{cases}$

36. $\begin{cases} 2x + 4y = 16 \\ 3x - 5y = -9 \end{cases}$

37. $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 2y = 6 \end{cases}$

38. $\begin{cases} x - y = 5 \\ -3x + 3y = 2 \end{cases}$

39. $\begin{cases} 2x - 4y = -2 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$

40. $\begin{cases} 3x + 3y = 3 \\ 4x + 2y = \frac{8}{3} \end{cases}$

41. $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$

42. $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 9x - 3y = 21 \end{cases}$

43. $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x - y = \frac{1}{2} \end{cases}$

44. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = -2 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$

45. $\begin{cases} 3x - 5y = 3 \\ 15x + 5y = 21 \end{cases}$

46. $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2} \end{cases}$

47. $\begin{cases} x - y = 6 \\ 2x - 3z = 16 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$

48. $\begin{cases} 2x + y = -4 \\ -2y + 4z = 0 \\ 3x - 2z = -11 \end{cases}$

49. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 7 \\ 2x + y + z = 4 \\ -3x + 2y - 2z = -10 \end{cases}$

50. $\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ -2x + 2y + z = -7 \\ 3x - 4y - 3z = 7 \end{cases}$

51. $\begin{cases} 2x - 2y - 2z = 2 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$

52. $\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ -x + 2y + z = 5 \\ 3x - 4y - z = 1 \end{cases}$

53. $\begin{cases} -x + y + z = -1 \\ -x + 2y - 3z = -4 \\ 3x - 2y - 7z = 0 \end{cases}$

54. $\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 2 \\ x + 5y + 3z = 2 \end{cases}$

55. $\begin{cases} 2x - 2y + 3z = 6 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ -2x + 3y - 7z = 1 \end{cases}$

56. $\begin{cases} 3x - 2y + 2z = 6 \\ 7x - 3y + 2z = -1 \\ 2x - 3y + 4z = 0 \end{cases}$

57. $\begin{cases} x + y - z = 6 \\ 3x - 2y + z = -5 \\ x + 3y - 2z = 14 \end{cases}$

58. $\begin{cases} x - y + z = -4 \\ 2x - 3y + 4z = -15 \\ 5x + y - 2z = 12 \end{cases}$

59. $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - 4y + z = -7 \\ -2x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$

60. $\begin{cases} x + 4y - 3z = -8 \\ 3x - y + 3z = 12 \\ x + y + 6z = 1 \end{cases}$

61. $\begin{cases} 3x + y - z = \frac{2}{3} \\ 2x - y + z = 1 \\ 4x + 2y = \frac{8}{3} \end{cases}$

62. $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y + z = 1 \\ x + 2y + z = \frac{8}{3} \end{cases}$

63. $\begin{cases} x + y + z + w = 4 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x + 2y + z - w = 6 \\ x - 2y - 2z + 2w = -1 \end{cases}$

64. $\begin{cases} x + y + z + w = 4 \\ -x + 2y + z = 0 \\ 2x + 3y + z - w = 6 \\ -2x + y - 2z + 2w = -1 \end{cases}$

65. $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = 2 \\ 3x + y + 3z = 3 \end{cases}$

66. $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + 2z = 6 \\ x - 3y + 3z = 4 \end{cases}$

67. $\begin{cases} x - y + z = 5 \\ 3x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$

68. $\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ -x + y + 3z = 1 \end{cases}$

69. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ x - y - z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ x + y + 3z = 5 \end{cases}$

70. $\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x - y - 4z = 0 \\ x - 3y + 2z = 1 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$

71. $\begin{cases} 4x + y + z - w = 4 \\ x - y + 2z + 3w = 3 \end{cases}$

72. $\begin{cases} -4x + y = 5 \\ 2x - y + z - w = 5 \\ z + w = 4 \end{cases}$

73. *Ajuste de curvas.* Determine la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $(1, 2)$, $(-2, -7)$, y $(2, -3)$.

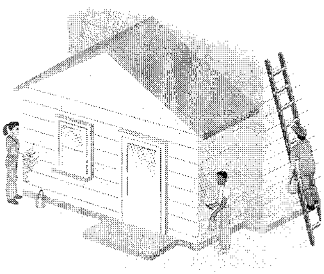
74. *Ajuste de curvas.* Determine la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $(1, -1)$, $(3, -1)$, y $(-2, 14)$.

75. *Ajuste de curvas.* Determine la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ para la cual $f(-3) = -112$, $f(-1) = -2$, $f(1) = 4$, y $f(2) = 13$.

76. *Ajuste de curvas.* Determine la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ para la cual $f(-2) = -10$, $f(-1) = 3$, $f(1) = 5$, y $f(3) = 15$.

77. *Mezcla de ácidos.* Un laboratorio químico tiene tres recipientes de ácido sulfúrico, H_2SO_4. Un recipiente contiene una solución concentrada de H_2SO_4 al 15%, el segundo tiene H_2SO_4 al 25% y el tercero H_2SO_4 al 50%. ¿Cuántos litros de cada solución hay que mezclar para obtener 100 litros de una solución cuya concentración sea del 40% de H_2SO_4? Construya una tabla similar a la tabla 1 con algunas de las combinaciones posibles.

78. *Pintura de una casa.* Si los tres pintores Miguel, Daniel y Catalina trabajan juntos, pueden pintar el exterior de una casa en 10 horas. Daniel y Catalina juntos pueden pintar una casa similar en 15 horas. Un día, los tres trabajaron en el mismo tipo de casa durante 4 horas, después de lo cual Catalina se fue. Miguel y Daniel necesitaron 8 horas más de trabajo para terminar. Si no hay pérdida ni ganancia de eficiencia, ¿cuánto tiempo tardaría cada persona en terminar el trabajo ella sola?



79. *Precios de comida rápida.* Un grupo de clientes compró 8 hamburguesas de lujo, 6 órdenes grandes de papas y 6 refrescos grandes por $26.10. Un segundo grupo ordenó 10 hamburguesas de lujo, 6 órdenes grandes de papas y 8 refrescos grandes y pagó $31.60. ¿Existe la información suficiente para determinar el precio de cada artículo? En caso contrario, construya una tabla que muestre las diversas posibilidades. Suponga que las hamburguesas cuestan entre $1.75 y $2.25, las papas entre $0.75 y $1.00 y los refrescos entre $0.60 y $0.90.

80. *Precios de comida rápida.* Utilice la información del problema 79 y suponga que un tercer grupo compró 3 hamburguesas de lujo, 2 órdenes grandes de papas y 4 refrescos grandes por $10.95. ¿Ahora existe la información suficiente para determinar el precio de cada artículo?

81. *Planeación financiera.* Tres parejas retiradas necesitan cada una un ingreso anual adicional de $2000.00. Como consultor financiero, usted les recomienda que inviertan algo de dinero en bonos del gobierno, que producen 7%, algo más en bonos empresariales al 9% y otra parte en un tercer tipo de bonos al 11%. Prepare una tabla para cada pareja con las diversas formas de lograr su objetivo:

(a) Si la primera pareja tiene $20,000 para invertir.

(b) Si la segunda pareja tiene $25,000 para invertir.

(c) Si la tercera pareja tiene $30,000 para invertir.

(d) ¿Qué consejo le daría a cada pareja con respecto de la cantidad a invertir y las opciones disponibles? [Los intereses más altos conllevan por lo general mayor riesgo.]

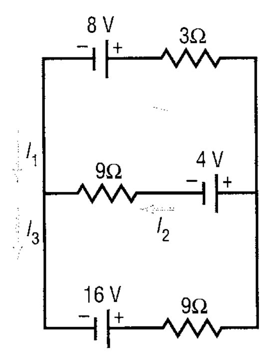
82. *Planeación financiera.* Una pareja retirada tiene $25,000.00 para invertir. Como consultor financiero, usted le recomienda que inviertan algo de dinero en los bonos del gobierno, que producen 7%, algo más en bonos empresariales al 9% y otra parte en un tercer tipo de bonos al 11%. Prepare una tabla con las diversas formas en que esta pareja puede lograr los siguientes objetivos:

(a) Un ingreso anual de $1500.

(b) Un ingreso anual de $2000.

(c) Un ingreso anual de $2500.

(d) ¿Qué consejo le daría a la pareja respecto del ingreso que desean y las opciones disponibles? [Los intereses más altos conllevan por lo general mayor riesgo.]



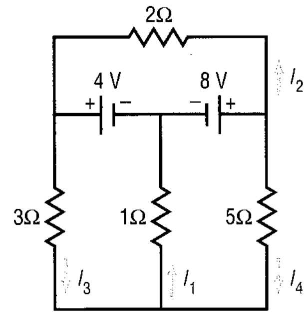
83. *Electricidad: leyes de Kirchhoff.* Una aplicación de las *leyes de Kirchhoff* al circuito de la figura anexa produce el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3 \\ 16 - 8 - 9I_3 - 3I_1 = 0 \\ 16 - 4 - 9I_3 - 9I_2 = 0 \\ 8 - 4 - 9I_2 + 3I_1 = 0 \end{cases}$$

Determine las corrientes I_1, I_2 y I_3.*

**Fuente:* Basado en Raymond Serway, *Physics*, tercera edición. Filadelfia: Saunders, 1990, problema 31, p. 790.

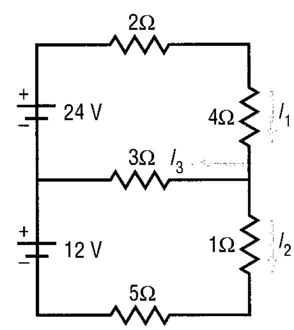
84. *Electricidad: leyes de Kirchhoff.* Una aplicación de las leyes de Kirchhoff al circuito de la figura anexa produce el siguiente sistema de ecuaciones:



$$\begin{cases} -4 + 8 - 2I_2 = 0 \\ 8 = 5I_4 + I_1 \\ 4 = 3I_3 + I_1 \\ I_3 + I_4 = I_1 \end{cases}$$

Determine las corrientes I_1, I_2, I_3, y I_4.*

85. *Electricidad: leyes de Kirchhoff.* Una aplicación de las leyes de Kirchhoff al circuito de la figura anexa produce el siguiente sistema de ecuaciones:



$$\begin{cases} I_1 = I_3 + I_2 \\ 24 - 6I_1 - 3I_3 = 0 \\ 12 + 24 - 6I_1 - 6I_2 = 0 \end{cases}$$

Determine las corrientes I_1, I_2, y I_3.†

86. Escriba unas líneas que expliquen su estrategia para resolver un sistema de ecuaciones lineales mediante matrices.

87. Al resolver un sistema de ecuaciones lineales con matrices, ¿prefiere colocar la matriz aumentada en forma escalonada o en forma escalonada reducida? Justifique su elección.

88. Plantee tres sistemas de tres ecuaciones lineales con tres variables tales que:

(a) El primero no tenga solución. (b) El segundo tenga exactamente una solución.
(c) El tercero tenga una infinidad de soluciones.

Déselos a un amigo para que los resuelva y critique.

89. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Si $D = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, utilice matrices para mostrar que la solución es

$$x = \frac{1}{D}(c_1b_2 - c_2b_1), \qquad y = \frac{1}{D}(a_1c_2 - a_2c_1)$$

90. Para el sistema del problema 89, suponga que $D = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$. Utilice matrices para mostrar que el sistema es inconsistente si $a_1c_2 \neq a_2c_1$ o bien si $b_1c_2 \neq b_2c_1$ y que tiene una infinidad de soluciones si $a_1c_2 = a_2c_1$ y $b_1c_2 = b_2c_1$.

91. La gráfica de una ecuación lineal con tres variables es un plano. Proporcione un argumento geométrico de lo que puede ocurrir al resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con tres variables. [*Sugerencia*: Dos planos en un espacio tridimensional son coincidentes (los mismos), paralelos, o se cortan en una recta.]

92. Consulte el problema 91. Proporcione un argumento geométrico de lo que puede ocurrir al resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables.

93. Consulte el problema 91. Proporcione un argumento geométrico de lo que puede ocurrir al resolver un sistema de cuatro ecuaciones lineales con tres variables.

**Fuente: Íbidem*, problema 34, p. 791.
†*Fuente: Íbidem*, problema 38, p. 791.

10.3 Sistemas de ecuaciones lineales: determinantes

En la sección anterior describimos un método que utiliza matrices para resolver cualquier sistema de ecuaciones lineales. En esta sección veremos otro método para resolver sistemas de ecuaciones lineales; sin embargo, sólo se puede utilizar cuando el número de ecuaciones es igual al número de variables. Aunque el método servirá en cualquier sistema (siempre que el número de ecuaciones sea igual al número de variables), se utiliza con más frecuencia para sistemas de dos ecuaciones con dos variables o de tres ecuaciones con tres variables. Este método es la *regla de Cramer* y se basa en el concepto de *determinante*.

Determinantes de 2 por 2

Determinante de 2 por 2

Si a, b, c y d son cuatro números reales, el símbolo

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

se llama **determinante de 2 por 2.** Su valor es el número $ad - bc$; es decir,

$$\boxed{D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc} \qquad (1)$$

Una forma que puede ayudarnos a recordar el valor de un determinante de 2 por 2 es la siguiente:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{matrix} bc \\ \\ ad \end{matrix} = ad - bc$$

Menos

EJEMPLO 1 *Evaluación de un determinante de 2 por 2*

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (6)(-2) = 3 - (-12) = 15$$

Ahora resuelva el problema 3.

Veamos enseguida el papel que juega un determinante de 2 por 2 en la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos variables. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} ax + by = s & (1) \\ cx + dy = t & (2) \end{cases} \qquad (2)$$

Utilizaremos el método de eliminación para resolver este sistema.

Si $d \neq 0$ y $b \neq 0$, este sistema es equivalente al sistema

$$\begin{cases} adx + bdy = sd & (1) \text{ Multiplicamos por } d. \\ bcx + bdy = tb & (2) \text{ Multiplicamos por } b. \end{cases}$$

Al restar la segunda ecuación de la primera obtenemos

$$\begin{cases} (ad - bc)x + 0 \cdot y = sd - tb & (1) \\ \quad bcx \quad + \quad bdy = tb & (2) \end{cases}$$

Ahora, podemos reescribir la primera ecuación usando la notación de determinantes:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} s & b \\ t & d \end{vmatrix}$$

Si $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$, podemos despejar x para obtener

$$x = \frac{\begin{vmatrix} s & b \\ t & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} s & b \\ t & d \end{vmatrix}}{D} \tag{3}$$

Ahora, regresemos al problema original (2). Si $a \neq 0$ y $c \neq 0$, el sistema es equivalente a

$$\begin{cases} acx + bcy = cs & (1) \text{ Multiplicamos por } c. \\ acx + ady = at & (2) \text{ Multiplicamos por } a. \end{cases}$$

Al restar la primera ecuación de la segunda, obtenemos

$$\begin{cases} acx + \quad bcy \quad = \quad cs & (1) \\ 0 \cdot x + (ad - bc)y = at - cs & (2) \end{cases}$$

Así podemos reescribir la segunda ecuación usando la notación de determinantes:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a & s \\ c & t \end{vmatrix}$$

Si $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$, podemos despejar y para obtener

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & s \\ c & t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a & s \\ c & t \end{vmatrix}}{D} \tag{4}$$

Las ecuaciones (3) y (4) conducen al siguiente resultado, la **regla de Cramer:**

Teorema
regla de Cramer para dos ecuaciones con dos variables

La solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ax + by = s & (1) \\ cx + dy = t & (2) \end{cases} \tag{5}$$

está dada por

$$x = \frac{\begin{vmatrix} s & b \\ t & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & s \\ c & t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \tag{6}$$

siempre que

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

En la deducción anterior de la regla de Cramer, supusimos que ninguno de los números *a, b, c* y *d* eran iguales a cero. En el problema 58 al final de esta sección, el lector deberá completar la demostración bajo la condición más débil $D = ad - bc \neq 0$.

Ahora observe con cuidado el patrón de la regla de Cramer. El denominador de la solución (6) es el determinante de los coeficientes de las variables:

$$\begin{cases} ax + by = s \\ cx + dy = t \end{cases} \qquad D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

En la solución para x, el numerador es el determinante (denotado D_x) formado al reemplazar las entradas en la primera columna (los coeficientes de x) en D por las constantes que aparecen al lado derecho del signo de igualdad:

$$D_x = \begin{vmatrix} s & b \\ t & d \end{vmatrix}$$

En la solución para y, el numerador es el determinante (denotado D_y) formado al reemplazar las entradas en la segunda columna (los coeficientes de y) en D por las constantes que aparecen al lado derecho del signo de igualdad:

$$D_y = \begin{vmatrix} a & s \\ c & t \end{vmatrix}$$

La regla de Cramer establece entonces que, si $D \neq 0$,

$$x = \frac{D_x}{D}, \qquad y = \frac{D_y}{D} \tag{7}$$

EJEMPLO 2 *Solución de un sistema de ecuaciones mediante determinantes*

Utilice la regla de Cramer, si es aplicable, para resolver el sistema

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 & (1) \\ 6x + y = 13 & (2) \end{cases}$$

Solución El determinante D de los coeficientes de las variables es

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (6)(-2) = 15$$

Como $D \neq 0$, podemos utilizar la regla de Cramer (7):

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 13 & 1 \end{vmatrix}}{15} = \frac{30}{15} = 2, \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 13 \end{vmatrix}}{15} = \frac{15}{15} = 1$$

La solución es $x = 2$, $y = 1$.

Si, al intentar utilizar la regla de Cramer, el determinante de D de los coeficientes de las variables es igual a 0 (de modo que no se pueda aplicar la regla de Cramer), entonces el sistema es inconsistente o tiene una infinidad de soluciones. (Consulte el problema 90 del ejercicio 10.2.)

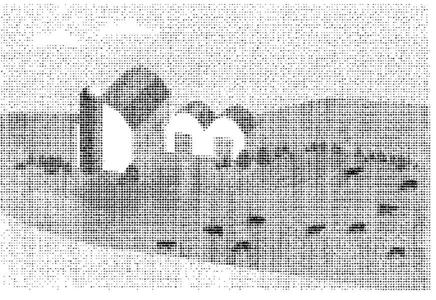
Ahora resuelva el problema 11.

MISIÓN POSIBLE

Capítulo 10

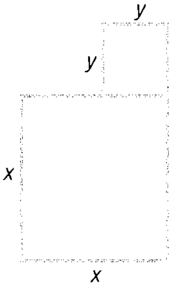
RANCHOS GANADEROS

Su equipo es dueño de una compañía que vende material para cercar terrenos. Una propietaria quiere comprar cerca para formar dos corrales cuadrados de igual tamaño. Ella quisiera tener cercado un total de 4500 pies cuadrados y piensa que si los dos corrales están juntos, la cerca entre ellos podría funcionar como un lado para cada corral, lo que le permitiría utilizar menos cerca. Ella espera que ustedes puedan ayudarle a determinar la longitud de los lados. Su presupuesto le permite comprar hasta 300 pies de cerca.



Por supuesto, ustedes quieren ayudarle a lograr el uso más eficiente posible de la cerca; aunque esto signifique por ahora que ella comprará menos cerca, tendrá sus ventajas a largo plazo pues será una clienta fiel.

1. Realicen un bosquejo de los corrales. Señalen las longitudes de los lados con variables.
2. Formulen ecuaciones que relacionen las longitudes de los lados de los dos corrales con el área y el perímetro que la propietaria tiene en mente.
3. Resuelvan el sistema de ecuaciones y muestren a la clienta las longitudes que se obtendrán con las medidas de los corrales proporcionadas por ella. ¿Serán suficientes 300 pies de cerca?
4. Si el presupuesto de ella realmente está restringido a 300 pies de cerca y debe tener dos corrales de igual tamaño con la forma que describió, ¿cuál será el tamaño de cada corral en pies cuadrados?
5. Considere otras formas posibles para que la propietaria rodee al menos 4500 pies cuadrados con 300 pies de cerca. No se limite a la configuración mencionada por ella. Por ejemplo, ¿qué ocurriría si los corrales no tuvieran el mismo tamaño? ¿Cuáles serían sus dimensiones?
6. ¿Qué ocurriría si no es obligatorio mantener el ganado separado por edad, sexo o raza? Si forma un corral grande con sus 300 pies de cerca podría incluir más pies cuadrados. Muestre a su clienta otras posibilidades si, por ejemplo, utiliza un corral triangular, rectangular, cuadrado o, incluso, circular. Junto a cada forma de corral coloque el número de pies cuadrados que encerraría. ¿Existe una mejor forma en términos de incluir más pies cuadrados por menos cerca? ¿Cuál sería esta?



Determinantes de 3 por 3

Para utilizar la regla de Cramer en la solución de un sistema de tres ecuaciones con tres variables, necesitamos definir un determinante de 3 por 3.

Un **determinante de 3 por 3** se simboliza como

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{8}$$

donde a_{11}, a_{12}, . . . son números reales.

Como en el caso de las matrices, utilizamos un doble subíndice para identificar una entrada, indicando sus números de renglón y de columna. Por ejemplo, la entrada a_{23} está en el renglón 2, columna 3.

Podemos definir el valor de un determinante de 3 por 3 mediante determinantes de 2 por 2 y la siguiente fórmula:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{\substack{\text{Determinante}\\ \text{2 por 2 que queda}\\ \text{después de eliminar}\\ \text{el renglón y la}\\ \text{columna que}\\ \text{contienen a } a_{11}}} \overset{\text{Menos}}{-} a_{12}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}_{\substack{\text{Determinante}\\ \text{2 por 2 que queda}\\ \text{después de eliminar}\\ \text{el renglón y la}\\ \text{columna que}\\ \text{contienen a } a_{12}}} + a_{13}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}_{\substack{\text{Determinante}\\ \text{2 por 2 que queda}\\ \text{después de eliminar}\\ \text{el renglón y la}\\ \text{columna que}\\ \text{contienen a } a_{13}}} \tag{9}$$

Tome nota del signo menos que aparece en el segundo término, ¡es fácil olvidarlo! La fórmula (9) se recordará mejor al observar que cada entrada del renglón 1 se multiplica por el determinante de 2 por 2 restante después de eliminar el renglón y la columna que contienen a la entrada, como sigue:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{Primer término}$$

Escribimos estas entradas como un determinante 2 por 2.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{Segundo término}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad \text{Tercer término}$$

Ahora insertamos el signo menos antes de la expresión intermedia y sumamos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{\text{Menos}}{-} a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

La fórmula (9) exhibe una forma de encontrar el valor de un determinante de 3 por 3, *desarrollando sobre el renglón 1.* De hecho, podemos hacer este desarrollo sobre de cualquier renglón o columna. Los términos que se suman o restan constan de la entrada del renglón (o columna) por el valor del determinante de 2 por 2 restante después de eliminar el renglón y la columna de la entrada. Calculamos el valor del determinante sumando o restando los términos de acuerdo con el siguiente esquema:

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

Por ejemplo, si optamos por desarrollar sobre la columna 2, obtenemos

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

↑ Desarrollamos mediante la columna 2 (−, +, −)

Si preferimos desarrollar sobre el renglón 3, obtenemos

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

↑ Desarrollamos mediante el renglón 3 (+, −, +)

Es posible mostrar que el valor de un determinante no depende de la elección del renglón o columna utilizados en el desarrollo.

EJEMPLO 3 *Evaluación de un determinante de 3 por 3*

Calcular el valor del determinante de 3 por 3: $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 8 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

Solución Vamos a desarrollar sobre el renglón 1.

Recuerde el signo menos.
↓

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 8 & -2 & 3 \end{vmatrix} &= 3\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 3(18 + 4) - 4(12 - 16) + (-1)(-8 - 48) \\ &= 3(22) - 4(-4) + (-1)(-56) \\ &= 66 + 16 + 56 = 138 \end{aligned}$$

También podríamos calcular el valor del determinante de 3 por 3 del ejemplo 3 desarrollando sobre la columna 3 (los signos son +, −, +):

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 8 & -2 & 3 \end{vmatrix} &= (-1)\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \\ &= -1(-8 - 48) - 2(-6 - 32) + 3(18 - 16) \\ &= 56 + 76 + 6 = 138 \end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 7.

Sistemas de tres ecuaciones con tres variables

Consideremos el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres variables:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3 \end{cases} \qquad (10)$$

Se puede mostrar que si el determinante D de los coeficientes de las variables no es 0, es decir, si

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

entonces la única solución del sistema (10) está dada por

Regla de Cramer para tres ecuaciones con tres variables

$$x = \frac{D_x}{D}, \qquad y = \frac{D_y}{D}, \qquad z = \frac{D_z}{D}$$

donde

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}$$

Es evidente la analogía de este patrón con el observado antes para un sistema de dos ecuaciones con dos variables.

EJEMPLO 4 *Uso de la regla de Cramer*

Utilizar la regla de Cramer, si es aplicable, para resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 & (1) \\ -x + 2y + 4z = -3 & (2) \\ x - 2y - 3z = 4 & (3) \end{cases}$$

Solución El valor del determinante D de los coeficientes de las variables es

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(2) - 1(-1) + (-1)(0)$$

$$= 4 + 1 = 5$$

Como $D \neq 0$, calcularemos los valores de D_x, D_y y D_z:

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 3(2) - 1(-7) + (-1)(-2) = 15$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= 2(-7) - 3(-1) + (-1)(-1)$$
$$= -14 + 3 + 1 = -10$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= 2(2) - 1(-1) + 3(0) = 5$$

Como resultado,

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{15}{5} = 3, \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-10}{5} = -2, \qquad z = \frac{D_z}{D} = \frac{5}{5} = 1$$

La solución es $x = 3$, $y = -2$, $z = 1$.

Si el determinante de los coeficientes de las variables de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables es 0, entonces no se puede aplicar la regla de Cramer. En este caso, el sistema es inconsistente o tiene una infinidad de soluciones.

Ahora resuelva el problema 29.

Más acerca de los determinantes

Los determinantes tienen varias propiedades que con frecuencia son útiles para obtener su valor. Enseguida mencionaremos algunas de ellas.

Teorema El valor de un determinante cambia de signo si intercambiamos dos cualesquiera renglones (o columnas). (11)

Demostración para determinantes de 2 por 2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad = -(ad - bc)$$

EJEMPLO 5 *Ejemplificando un teorema (11)*

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

Teorema Si todas las entradas de cualquier renglón (o columna) son iguales a cero, el valor del determinante es 0. (12)

Demostración Sólo hay que desarrollar sobre el renglón (o la columna) que contenga los ceros.

Teorema Si dos renglones cualesquiera (o dos columnas) de un determinante tienen entradas correspondientes iguales, el valor del determinante es 0. (13)

En el problema 61 al final de esta sección, se le pedirá que demuestre este resultado para un determinante de 3 por 3 donde las entradas de la columna 1 son iguales a las entradas en la columna 3.

EJEMPLO 6 *Ejemplificando un teorema (13)*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= 1(-3) - 2(-6) + 3(-3)$$
$$= -3 + 12 - 9 = 0$$

Teorema Si cualquier renglón (o columna) de un determinante se multiplica por un número distinto de cero k, el valor del determinante también se multiplicará por el factor k. (14)

En el problema 60 al final de esta sección, se le pedirá que demuestre este resultado para un determinante de 3 por 3, utilizando el renglón 2.

EJEMPLO 7 *Ejemplificando un teorema(14)*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 8 = -2$$
$$\begin{vmatrix} k & 2k \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6k - 8k = -2k = k(-2) = k\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

Teorema Si las entradas de cualquier renglón (o columna) de un determinante se multiplican por un número distinto de cero k y el resultado se suma a las entradas correspondientes de otro renglón (o columna), el valor del determinante permanece sin cambio. (15)

En el problema 62 al final de esta sección, se le pedirá que demuestre este resultado para un determinante de 3 por 3, utilizando los renglones 1 y 2.

EJEMPLO 8 *Ejemplificando un teorema(15)*

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -14$$

Multiplicamos el renglón 2 por -2 y lo sumamos al renglón 1.

10.3

Ejercicio 10.3

En los problemas del 1 al 10 calcule el valor de cada determinante.

1. $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ **2.** $\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$ **3.** $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$ **4.** $\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ **5.** $\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}$ **7.** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ **8.** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 6 & 1 & -5 \\ 8 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ **9.** $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 6 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ **10.** $\begin{vmatrix} 3 & -9 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \\ 8 & -3 & 1 \end{vmatrix}$

En los problemas del 11 al 38 resuelva cada sistema de ecuaciones mediante la regla de Cramer, si es aplicable. En caso contrario, indíquelo.

11. $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 4 \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$ **13.** $\begin{cases} 5x - y = 13 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$ **14.** $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - 3y = -8 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x = 24 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ **16.** $\begin{cases} 4x + 5y = -3 \\ -2y = -4 \end{cases}$ **17.** $\begin{cases} 3x - 6y = 24 \\ 5x + 4y = 12 \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} 2x + 4y = 16 \\ 3x - 5y = -9 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 6x - 4y = 0 \end{cases}$ **20.** $\begin{cases} -x + 2y = 5 \\ 4x - 8y = 6 \end{cases}$ **21.** $\begin{cases} 2x - 4y = -2 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$ **22.** $\begin{cases} 3x + 3y = 3 \\ 4x + 2y = \frac{8}{3} \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 10x + 10y = 5 \end{cases}$ **24.** $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 5x + 10y = 4 \end{cases}$ **25.** $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x - y = \frac{1}{2} \end{cases}$ **26.** $\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = -2 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 3x - 5y = 3 \\ 15x + 5y = 21 \end{cases}$ **28.** $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2} \end{cases}$ **29.** $\begin{cases} x + y - z = 6 \\ 3x - 2y + z = -5 \\ x + 3y - 2z = 14 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x - y + z = -4 \\ 2x - 3y + 4z = -15 \\ 5x + y - 2z = 12 \end{cases}$ **31.** $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - 4y + z = -7 \\ -2x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$ **32.** $\begin{cases} x + 4y - 3z = -8 \\ 3x - y + 3z = 12 \\ x + y + 6z = 1 \end{cases}$

33. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ 2x - 4y + 6z = 2 \end{cases}$ **34.** $\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ 3x + 2y = 4 \\ -2x + 2y - 4z = -10 \end{cases}$ **35.** $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - 4y + z = 0 \\ -2x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$

36. $\begin{cases} x + 4y - 3z = 0 \\ 3x - y + 3z = 0 \\ x + y + 6z = 0 \end{cases}$ **37.** $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ 2x - 4y + 6z = 0 \end{cases}$ **38.** $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ -2x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$

39. Resuelva: $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 8 \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{5}{y} = 0 \end{cases}$ **40.** Resuelva: $\begin{cases} \dfrac{4}{x} - \dfrac{3}{y} = 0 \\ \dfrac{6}{x} + \dfrac{3}{2y} = 2 \end{cases}$

[*Sugerencia:* Sean $u = 1/x$ y $v = 1/y$ y resuelva las ecuaciones en términos de u y v.]

En los problemas del 41–46, despeje x.

41. $\begin{vmatrix} x & x \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 5$ **42.** $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 3 & x \end{vmatrix} = -2$ **43.** $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2$

44. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & x & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$ **45.** $\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 1 & x & 0 \\ 6 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 7$ **46.** $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & x & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4x$

En los problemas del 47 al 54, utilice las propiedades de los determinantes para calcular el valor de cada determinante, si se sabe que

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

47. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix}$ **48.** $\begin{vmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ **49.** $\begin{vmatrix} x & y & z \\ -3 & -6 & -9 \\ u & v & w \end{vmatrix}$

50. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x-u & y-v & z-w \\ u & v & w \end{vmatrix}$

51. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x-3 & y-6 & z-9 \\ 2u & 2v & 2w \end{vmatrix}$

52. $\begin{vmatrix} x & y & z-x \\ u & v & w-u \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

53. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2x & 2y & 2z \\ u-1 & v-2 & w-3 \end{vmatrix}$

54. $\begin{vmatrix} x+3 & y+6 & z+9 \\ 3u-1 & 3v-2 & 3w-3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

55. Podemos expresar una ecuación de la recta que contiene a los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) como el determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Demuestre este resultado desarrollando el determinante y comparando el resultado con la forma de la ecuación de una recta que pasa por dos puntos.

56. Utilice el resultado del problema 55 y muestre que tres puntos distintos (x_1, y_1), (x_2, y_2), y (x_3, y_3) son colineales (están en una misma recta) si, y sólo si,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

57. Muestre que $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix} = (y-z)(x-y)(x-z)$.

58. Complete la demostración de la regla de Cramer para dos ecuaciones con dos variables. [*Sugerencia:* En el sistema (5), de la página 643, si $a = 0$, entonces $b \neq 0$ y $c \neq 0$, pues $D = -bc \neq 0$. Ahora, muestre que las ecuaciones (6) proporcionan una solución del sistema cuando $a = 0$. Todavía restan tres casos: $b = 0$, $c = 0$, y $d = 0$.]

59. Intercambie las columnas 1 y 3 de un determinante de 3 por 3. Muestre que el valor del nuevo determinante es -1 por el valor del determinante original.

60. Multiplique cada entrada del renglón 2 de un determinante de 3 por 3 por el número k, $k \neq 0$. Muestre que el valor del nuevo determinante es k veces el valor del determinante original.

61. Demuestre que un determinante de 3 por 3 en donde las entradas de la columna 1 son iguales a las de la columna 3 tiene como valor al cero.

62. Demuestre que, si el renglón 2 de un determinante de 3 por 3 se multiplica por k, $k \neq 0$, y el resultado se suma a las entradas del renglón 1, entonces no cambia el valor del determinante.

Sistemas de ecuaciones no lineales

No existe una metodología general para resolver un sistema de ecuaciones no lineales. En ciertos casos es mejor la sustitución; en otros, la eliminación; en otros más, ninguno de estos métodos funciona. La experiencia y cierto grado de imaginación serán sus mejores aliados.

Antes de comenzar debemos hacer unos comentarios:

1. Si el sistema contiene dos variables y se pueden hacer las gráficas de sus ecuaciones con facilidad, entonces hágalas. Al hacer la gráfica de cada ecuación podemos darnos una idea del número de soluciones que tiene el sistema y su posición aproximada.
2. Pueden surgir soluciones extrañas al resolver sistemas no lineales, así que es imperativo verificar todas las soluciones aparentes.

EJEMPLO 1 *Resolución de un sistema de ecuaciones no lineales mediante sustitución*

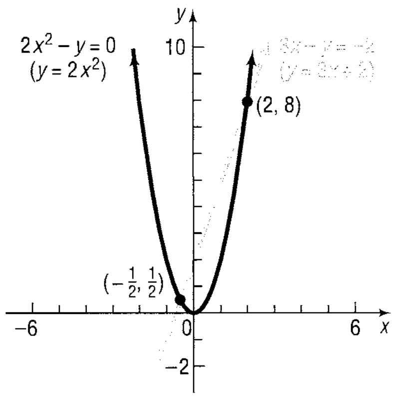
Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x - y = -2 & (1) \text{ Una recta} \\ 2x^2 - y = \ \ 0 & (2) \text{ Una parábola} \end{cases}$$

Solución Observemos primero que el sistema contiene dos variables y que sabemos cómo hacer la gráfica de cada ecuación. En la figura 5 vemos que, aparentemente, el sistema tiene dos soluciones.

Utilizaremos el método de sustitución para resolver el sistema. Podemos despejar a y con facilidad en la ecuación (1):

FIGURA 5



$$\begin{aligned} 3x - y &= -2 \\ y &= 3x + 2 \end{aligned}$$

Sustituimos esta expresión por y en la ecuación (2). El resultado es una ecuación que sólo contiene a la variable x, la cual podemos entonces despejar:

$$\begin{aligned} 2x^2 - y &= 0 \\ 2x^2 - (3x + 2) &= 0 \\ 2x^2 - 3x - 2 &= 0 \\ (2x + 1)(x - 2) &= 0 \end{aligned}$$

$$2x + 1 = 0 \qquad \text{o} \qquad x - 2 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \qquad\qquad x = 2$$

Con estos valores de x en $y = 3x + 2$, tenemos

$$y = 3\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad y = 3(2) + 2 = 8$$

Las soluciones aparentes son $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ y $x = 2$, $y = 8$.

Para $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} 3\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -2 \\ 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = 2\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} = \ \ 0 \end{cases}$$

Para $x = 2$, $y = 8$:

$$\begin{cases} 3(2) - 8 = \ \ 6 - 8 = -2 \\ 2(2)^2 - 8 = 2(4) - 8 = \ \ 0 \end{cases}$$

Las dos soluciones aparentes son soluciones reales. Ahora sabemos que las gráficas de la figura 5 se cortan en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y en (2, 8).

Haga la gráfica de $3x - y = -2$ y $2x^2 - y = 0$ y compare el resultado con la figura 5. Utilice ZOOM y TRACE para determinar los puntos de intersección.

Ahora resuelva el problema 3.

Nuestro siguiente ejemplo ilustra la forma en que el método de eliminación funciona con los sistemas no lineales.

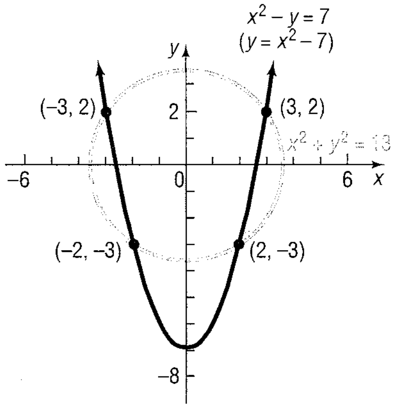
EJEMPLO 2 *Resolución de un sistema de ecuaciones no lineales mediante eliminación*

Resolver: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 & (1) \text{ Un círculo} \\ x^2 - y = 7 & (2) \text{ Una parábola} \end{cases}$

Solución Primero hacemos la gráfica de cada ecuación, como nos muestra la figura 6. Con base en la gráfica, esperamos cuatro soluciones. Al restar la ecuación (2) de la ecuación (1) eliminamos la variable x, obteniendo

$$y^2 + y = 6$$

FIGURA 6



Podemos resolver con facilidad esta ecuación cuadrática en y factorizando:

$$y^2 + y - 6 = 0$$
$$(y + 3)(y - 2) = 0$$
$$y = -3 \quad \text{o} \quad y = 2$$

Utilizamos valores de y en la ecuación (2) para determinar x. Si $y = 2$, entonces $x^2 = y + 7 = 9$ y $x = 3$ o -3. Si $y = -3$, entonces $x^2 = y + 7 = 4$ y $x = 2$ o -2. Así tenemos cuatro soluciones: $x = 3$, $y = 2$; $x = -3$, $y = 2$; $x = 2$, $y = -3$; y $x = -2$, $y = -3$. Usted puede verificar que estas cuatro soluciones realmente satisfacen la ecuación (1), de modo que las cuatro son soluciones del sistema. Los cuatro puntos, $(3, 2)$, $(-3, 2)$, $(2, -3)$, y $(-2, -3)$, son los puntos de intersección de las gráficas. *Véase* de nuevo la figura 6.

Verificación: Haga la gráfica de $x^2 + y^2 = 13$ y $x^2 - y = 7$. [Recuerde que para hacer la gráfica $x^2 + y^2 = 13$ necesita dos funciones: $y = \sqrt{13 - x^2}$ y $y = -\sqrt{13 - x^2}$.] Compare el resultado con la figura 6. Utilice ZOOM y TRACE para determinar los cuatro puntos de intersección.

Ahora resuelva el problema 1.

EJEMPLO 3 *Resolución de un sistema de ecuaciones no lineales mediante eliminación*

Resolver: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 & (1) \\ x^3 - y^2 = x & (2) \end{cases}$

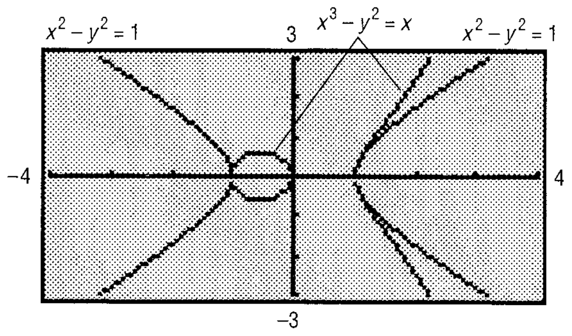
Solución Como no es fácil hacer la gráfica de la segunda ecuación, omitimos ese paso. Utilizamos eliminación, restando la ecuación (2) de la ecuación (1), para obtener

$$x^2 - x^3 = 1 - x$$
$$x^2(1 - x) = 1 - x$$
$$x^2(1 - x) - (1 - x) = 0$$
$$(x^2 - 1)(1 - x) = 0$$
$$x^2 - 1 = 0 \quad \text{o} \quad 1 - x = 0$$
$$x = \pm 1 \qquad\qquad x = 1$$

Ahora utilizamos la ecuación (1) para obtener y. Si $x = 1$, entonces $1 - y^2 = 1$ y $y = 0$. Si $x = -1$, entonces $1 - y^2 = 1$ y $y = 0$. Existen dos soluciones aparentes: $x = 1$, $y = 0$ y $x = -1$, $y = 0$. Como cada una de estas soluciones también satisface la ecuación (2), el sistema tiene dos soluciones: $x = 1$, $y = 0$ y $x = -1$, $y = 0$. Las gráficas de estas ecuaciones se cortan en $(1, 0)$ y en $(-1, 0)$.

Haga la gráfica $x^2 - y^2 = 1$ y $x^3 - y^2 = x$. [Necesitará hacer la gráfica de cuatro funciones: $y = \sqrt{x^2 - 1}$, $y = -\sqrt{x^2 - 1}$, $y = \sqrt{x^3 - x}$, y $y = -\sqrt{x^3 - x}$.] Utilice ZOOM y TRACE para verificar los dos puntos de intersección. *Véase* la figura 7.

FIGURA 7



EJEMPLO 4 *Resolución de un sistema de ecuaciones no lineales mediante eliminación*

Resolver: $\begin{cases} x^2 + x + y^2 - 3y + 2 = 0 & (1) \\ x + 1 + \dfrac{y^2 - y}{x} = 0 & (2) \end{cases}$

Solución Primero multiplicamos la ecuación (2) por x para eliminar la fracción. El resultado es un sistema equivalente, pues x no puede anularse [observe la ecuación (2) para ver por qué]:

$$\begin{cases} x^2 + x + y^2 - 3y + 2 = 0 & (1) \\ x^2 + x + y^2 - y = 0 & (2) \end{cases}$$

Ahora reste la ecuación (2) de la ecuación (1) para eliminar x. El resultado es

$$-2y + 2 = 0$$
$$y = 1$$

Para determinar x, sustituimos en forma regresiva $y = 1$ en la ecuación (1):

$$x^2 + x + 1 - 3 + 2 = 0$$
$$x^2 + x = 0$$
$$x(x + 1) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = -1$$

Como x no puede anularse, el valor $x = 0$ es extraño y lo descartamos. Así, la solución es $x = -1$, $y = 1$.

Verificación: Ahora verificamos $x = -1$, $y = 1$:

$$\begin{cases} (-1)^2 + (-1) + 1^2 - 3(1) + 2 = 1 - 1 + 1 - 3 + 2 = 0 & (1) \\ -1 + 1 + \dfrac{1^2 - 1}{-1} = 0 + \dfrac{0}{-1} = 0 & (2) \end{cases}$$

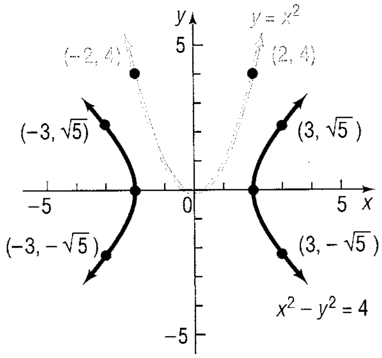
Así, la única solución del sistema es $x = -1$, $y = 1$. Las gráficas de estas ecuaciones se cortan en $(-1, 1)$.

Ahora resuelva los problemas 17 y 41.

EJEMPLO 5 *Resolución de un sistema de ecuaciones no lineales*

Resolver: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 & (1) \text{ Una hipérbola} \\ y = x^2 & (2) \text{ Una parábola} \end{cases}$

FIGURA 8



Solución Podemos utilizar sustitución o eliminación en este caso. Utilizamos sustitución y reemplazamos x^2 por y en la ecuación (1). El resultado es

$$y - y^2 = 4$$
$$y^2 - y + 4 = 0$$

Esta es una ecuación cuadrática cuyo discriminante es $1 - 4 \cdot 4 = -15 < 0$. Así, la ecuación no tiene soluciones reales, por lo que el sistema es inconsistente. Las gráficas de estas dos ecuaciones no se cortan. *Véase* la figura 8.

Verificación: Haga la gráfica $x^2 - y^2 = 4$ y $y = x^2$ y compare con la figura 8. Seleccione una pantalla que no deje lugar a dudas acerca de que las gráficas nunca se cortan.

Los siguientes ejemplos ilustran dos de las formas más imaginativas de resolver sistemas de ecuaciones no lineales.

EJEMPLO 6 *Resolución de un sistema de ecuaciones no lineales*

Resolver: $\begin{cases} 4x^2 - 9xy - 28y^2 = 0 & (1) \\ 16x^2 - 4xy = 16 & (2) \end{cases}$

Solución Observemos que la ecuación (1) es factorizable:

$$4x^2 - 9xy - 28y^2 = 0$$
$$(4x + 7y)(x - 4y) = 0$$

Esto produce las siguientes dos ecuaciones

$$4x + 7y = 0 \quad \text{o} \quad x - 4y = 0$$
$$x = -\tfrac{7}{4}y \qquad\qquad x = 4y$$

Sustituimos cada uno de estos valores para x en la ecuación (2):

$$\begin{aligned} 16x^2 - 4xy &= 16 & 16x^2 - 4xy &= 16 \\ 16(-\tfrac{7}{4}y)^2 - 4(-\tfrac{7}{4}y)y &= 16 & 16(4y)^2 - 4(4y)y &= 16 \\ 49y^2 + 7y^2 &= 16 & 16(16y^2) - 16y^2 &= 16 \\ 56y^2 &= 16 & 15y^2 &= 1 \\ 7y^2 &= 2 & y^2 &= \tfrac{1}{15} \\ y^2 &= \tfrac{2}{7} \end{aligned}$$

Así, tenemos

$$y = \pm\sqrt{\frac{2}{7}} = \pm\frac{\sqrt{14}}{7} \qquad y = \pm\frac{\sqrt{15}}{15}$$
$$x = -\frac{7}{4}y = \mp\frac{\sqrt{14}}{4} \qquad x = 4y = \pm\frac{4\sqrt{15}}{15}$$

Verifique usted que las cuatro soluciones $x = -\sqrt{14}/4$, $y = \sqrt{14}/7$; $x = \sqrt{14}/4$, $y = -\sqrt{14}/7$; $x = 4\sqrt{15}/15$, $y = \sqrt{15}/15$; y $x = -4\sqrt{15}/15$, $y = -\sqrt{15}/15$ son soluciones reales del sistema.

EJEMPLO 7 *Resolución de un sistema de ecuaciones no lineales*

Resolver: $\begin{cases} 3xy - 2y^2 = -2 & (1) \\ 9x^2 + 4y^2 = 10 & (2) \end{cases}$

Solución Multiplicamos la ecuación (1) por 2 y sumamos el resultado a la ecuación (2) para eliminar los términos en y^2:

$$\begin{cases} 6xy - 4y^2 = -4 & (1) \\ 9x^2 + 4y^2 = \ \ 10 & (2) \end{cases}$$

$$9x^2 + 6xy = 6$$

$$3x^2 + 2xy = 2 \qquad \text{Dividimos cada lado entre 3.}$$

Como $x \neq 0$ (¿puede advertir por qué?), podemos despejar y en esta ecuación para obtener

$$y = \frac{2 - 3x^2}{2x}, \qquad x \neq 0 \tag{1}$$

Ahora sustituimos y en la ecuación (2) del sistema:

$$\begin{aligned} 9x^2 + 4y^2 &= 10 \\ 9x^2 + 4\left(\frac{2 - 3x^2}{2x}\right)^2 &= 10 \\ 9x^2 + \frac{4 - 12x^2 + 9x^4}{x^2} &= 10 \\ 9x^4 + 4 - 12x^2 + 9x^4 &= 10x^2 \\ 18x^4 - 22x^2 + 4 &= 0 \\ 9x^4 - 11x^2 + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Podemos factorizar esta ecuación cuadrática (en x^2):

$$(9x^2 - 2)(x^2 - 1) = 0$$

$$\begin{aligned} 9x^2 - 2 &= 0 & \quad \text{o} \quad x^2 - 1 &= 0 \\ x^2 &= \tfrac{2}{9} & x^2 &= 1 \\ x &= \pm\frac{\sqrt{2}}{3} & x &= \pm 1 \end{aligned}$$

Para determinar y, utilizamos la ecuación (1):

$$\text{Si } x = \frac{\sqrt{2}}{3}: \quad y = \frac{2 - 3x^2}{2x} = \frac{2 - \frac{2}{3}}{2(\sqrt{2}/3)} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\text{Si } x = -\frac{\sqrt{2}}{3}: \quad y = \frac{2 - 3x^2}{2x} = \frac{2 - \frac{2}{3}}{-2(\sqrt{2}/3)} = \frac{4}{-2\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

$$\text{Si } x = 1: \quad y = \frac{2 - 3x^2}{2x} = \frac{2 - 3}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Si } x = -1: \quad y = \frac{2 - 3x^2}{2x} = \frac{2 - 3}{-2} = \frac{1}{2}$$

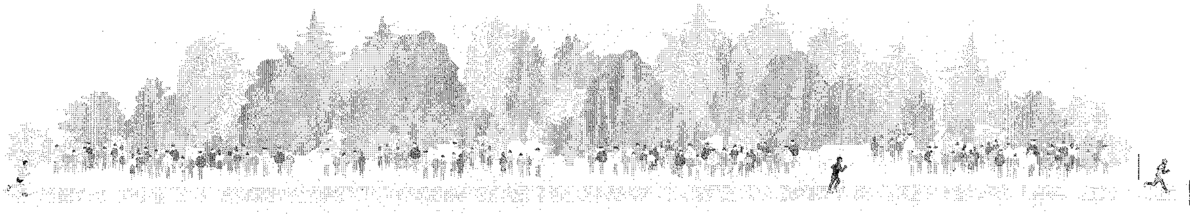
El sistema tiene cuatro soluciones, las cuales debe usted verificar.

Ahora resuelva el problema 37.

EJEMPLO 6 *Carrera de maratón*

En una carrera de maratón de 50 millas, el ganador cruza la meta con una milla de ventaja sobre el corredor de segundo lugar y con 4 millas de ventaja sobre el tercero.

Si cada corredor mantiene una velocidad constante en toda la carrera, ¿por cuántas millas gana el corredor de segundo lugar al de tercero?



Solución Sean v_1, v_2, v_3 las velocidades de los corredores que quedaron en primero, segundo y tercer lugares, respectivamente. Sean t_1 y t_2 los tiempos (en horas) necesarios para que el primero y el segundo corredor terminaran la carrera. Entonces tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 50 = v_1 t_1 & (1) \quad \text{El primer corredor recorre 50 millas en } t_1 \text{ horas.} \\ 49 = v_2 t_1 & (2) \quad \text{El segundo corredor recorre 49 millas en } t_1 \text{ horas.} \\ 46 = v_3 t_1 & (3) \quad \text{El tercer corredor recorre 46 millas en } t_1 \text{ horas.} \\ 50 = v_2 t_2 & (4) \quad \text{El segundo corredor recorre 50 millas en } t_2 \text{ horas.} \end{cases}$$

Buscamos la distancia del corredor de tercer lugar a la meta en el instante t_2. Es decir,

$$\begin{aligned} 50 - v_3 t_2 &= 50 - v_3\left(t_1 \cdot \frac{t_2}{t_1}\right) \\ &= 50 - (v_3 t_1) \cdot \frac{t_2}{t_1} \\ &= 50 - 46 \cdot \frac{50/v_2}{50/v_1} && \begin{cases} \text{De (3), } v_3 t_1 = 46; \\ \text{de (4), } t_2 = 50/v_2; \\ \text{de (1), } t_1 = 50/v_1. \end{cases} \\ &= 50 - 46 \cdot \frac{v_1}{v_2} \\ &= 50 - 46 \cdot \frac{50}{49} && \text{Formamos el cociente de (1) y (2).} \\ &\approx 3.06 \text{ millas} \end{aligned}$$

CARACTERÍSTICA HISTÓRICA

■ Recuerde que, al inicio de esta sección, señalamos la importancia de emplear la imaginación y la experiencia para resolver ecuaciones no lineales simultáneas. De hecho, estos tipos de problemas han conducido a algunas de las partes más profundas y difíciles de las matemáticas modernas. Revise de nuevo las gráficas de los ejemplos 1 y 2 de esta sección (figuras 5 y 6). Vemos que el ejemplo 1 tiene dos soluciones y que el ejemplo 2 tiene cuatro. Podríamos conjeturar que el número de soluciones es igual al producto de los grados de las ecuaciones en cuestión. Esta conjetura fue planteada por Etienne Bezout (1739-1783), pero afinar los detalles se llevó cerca de 150 años. Se puede ver que, para lograr el número correcto de intersecciones, hay que contar no sólo las intersecciones numéricas complejas, sino también aquellas que, en cierto sentido, están en el infinito. Por ejemplo, una parábola y una recta sobre el eje de esa parábola se cortan en el vértice y en el infinito. El tema es parte del estudio de la geometría algebraica. ■

PROBLEMA HISTÓRICO

■ 1. Un papiro que data de 1950 a.C., contiene el siguiente problema: Un área dada de 100 unidades debe representarse como la suma de dos cuadrados cuyos lados están en proporción de $1:\frac{3}{4}$. Determine las longitudes de los lados resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x = \frac{3}{4}y \end{cases}$$

■

10.4

Ejercicio 10.4

En los problemas del 1 al 12, haga la gráfica de cada ecuación del sistema y después resuelva éste.

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + 2x + y^2 = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x^2 + y^2 + 4y = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y = 3x - 5 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ y = x + 2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y^2 - x = 4 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x^2 - 2y = 8 \end{cases}$

7. $\begin{cases} xy = 4 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2 = y \\ xy = 1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x^2 - 9 \end{cases}$

10. $\begin{cases} xy = 1 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = 6x - 13 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases}$

En los problemas del 13 al 44 resuelva cada sistema. Use el método que desee.

13. $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 18 \\ xy = 4 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 21 \\ x + y = 7 \end{cases}$

15. $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ 2x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 16 \\ 2y - x = 2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 6y - x = -5 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x^2 - xy + y^2 = 8 \\ xy = 4 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 4x^2 - 3xy + 9y^2 = 15 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2y^2 - 3xy + 6y + 2x + 4 = 0 \\ 2x - 3y + 4 = 0 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x^2 - 4y^2 + 7 = 0 \\ 3x^2 + y^2 = 31 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 + 5 = 0 \\ 2x^2 - y^2 + 2 = 0 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 7x^2 - 3y^2 + 5 = 0 \\ 3x^2 + 5y^2 = 12 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x^2 - 3y^2 + 1 = 0 \\ 2x^2 - 7y^2 + 5 = 0 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x^2 + 2xy = 10 \\ 3x^2 - xy = 2 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 5xy + 13y^2 + 36 = 0 \\ xy + 7y^2 = 6 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 - 2y^2 + 8 = 0 \end{cases}$

28. $\begin{cases} y^2 - x^2 + 4 = 0 \\ 2x^2 + 3y^2 = 6 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 16 \\ 4x^2 - y^2 = 24 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 4x^2 + 3y^2 = 4 \\ 2x^2 - 6y^2 = -3 \end{cases}$

31. $\begin{cases} \dfrac{5}{x^2} - \dfrac{2}{y^2} + 3 = 0 \\ \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 7 \end{cases}$

32. $\begin{cases} \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{3}{y^2} + 1 = 0 \\ \dfrac{6}{x^2} - \dfrac{7}{y^2} + 2 = 0 \end{cases}$

33. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{6}{y^4} = 6 \\ \dfrac{2}{x^4} - \dfrac{2}{y^4} = 19 \end{cases}$

34. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^4} - \dfrac{1}{y^4} = 1 \\ \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{1}{y^4} = 4 \end{cases}$

35. $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + xy = 6 \end{cases}$

36. $\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ xy + x + 6 = 0 \end{cases}$

37. $\begin{cases} xy - x^2 + 3 = 0 \\ 3xy - 4y^2 = 2 \end{cases}$

38. $\begin{cases} 5x^2 + 4xy + 3y^2 = 36 \\ x^2 + xy + y^2 = 9 \end{cases}$

39. $\begin{cases} x^3 - y^3 = 26 \\ x - y = 2 \end{cases}$

40. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 26 \\ x + y = 2 \end{cases}$

41. $\begin{cases} y^2 + y + x^2 - x - 2 = 0 \\ y + 1 + \dfrac{x-2}{y} = 0 \end{cases}$

42. $\begin{cases} x^3 - 2x^2 + y^2 + 3y - 4 = 0 \\ x - 2 + \dfrac{y^2 - y}{x^2} = 0 \end{cases}$

43. $\begin{cases} \log_x y = 3 \\ \log_x(4y) = 5 \end{cases}$

44. $\begin{cases} \log_x(2y) = 3 \\ \log_x(4y) = 2 \end{cases}$

45. La diferencia de dos números es 2 y la suma de sus cuadrados es 10. Determine los números.

46. La suma de dos números es 7 y la diferencia de sus cuadrados es 21. Determine los números.

47. El producto de dos números es 4 y la suma de sus cuadrados es 8. Determine los números.

48. El producto de dos números es 10 y la diferencia de sus cuadrados es 21. Determine los números.

49. La diferencia de dos números es igual a su producto, y la suma de sus recíprocos es 5. Determine los números.

50. La suma de dos números es igual a su producto, y la diferencia de sus recíprocos es 3. Determine los números.

51. La razón entre a y b es $\frac{2}{3}$. La suma de a y b es 10. ¿Cuál es la razón entre $a + b$ y $b - a$?

52. La razón entre a y b es $\frac{4}{3}$. La suma de a y b es 14. ¿Cuál es la razón entre $-b$ y $a + b$?

En los problemas del 53 al 60 haga la gráfica de cada ecuación del sistema. Asegúrese de señalar los puntos de intersección.

53. $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$

54. $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = 4x + 1 \end{cases}$

55. $\begin{cases} y = \sqrt{36 - x^2} \\ y = 8 - x \end{cases}$

56. $\begin{cases} y = \sqrt{4 - x^2} \\ y = 2x + 4 \end{cases}$

57. $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = 2 - x \end{cases}$

58. $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = 6 - x \end{cases}$

59. $\begin{cases} x = 2y \\ x = y^2 - 2y \end{cases}$

60. $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = x^2 - 6x + 9 \end{cases}$

En los problemas del 61 al 66 haga la gráfica de cada ecuación y determine los puntos de intersección, si existen.

61. La recta $x + 2y = 0$ y el círculo $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$

62. La recta $x + 2y + 6 = 0$ y el círculo $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 5$

63. El círculo $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$ y la parábola $y^2 + 4y - x + 1 = 0$

64. El círculo $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ y la parábola $y^2 - 2y - x - 5 = 0$

65. La gráfica de $y = \dfrac{4}{x - 3}$ y el círculo $x^2 - 6x + y^2 + 1 = 0$

66. La gráfica de $y = \dfrac{4}{x + 2}$ y el círculo $x^2 + 4x + y^2 - 4 = 0$

En los problemas del 67 al 74 resuelva cada uno de los sistemas de ecuaciones. Exprese las soluciones redondeadas a dos cifras decimales.

67. $\begin{cases} y = x^{2/3} \\ y = e^{-x} \end{cases}$

68. $\begin{cases} y = x^{3/2} \\ \end{cases}$

69. $\begin{cases} x^2 + y^3 = 2 \\ x^3 y = 4 \end{cases}$

70. $\begin{cases} x^3 + y^2 = 2 \\ x^2 y = 4 \end{cases}$

71. $\begin{cases} x^4 + y^4 = 12 \\ xy^2 = 2 \end{cases}$

72. $\begin{cases} x^4 + y^4 = 6 \\ xy = 1 \end{cases}$

73. $\begin{cases} xy = 2 \\ y = \ln x \end{cases}$

74. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = \ln x \end{cases}$

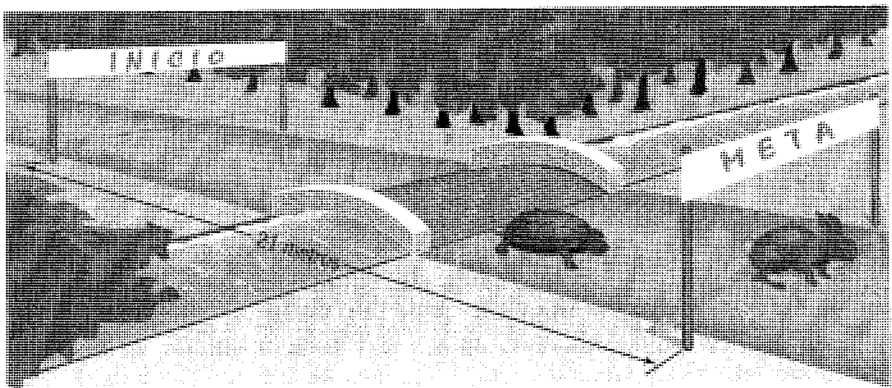
75. Geometría El perímetro de un rectángulo es de 16 pulgadas y su área de 15 pulgadas cuadradas. ¿Cuáles son sus dimensiones?

76. Geometría Hay que encerrar un área de 52 pies cuadrados mediante dos cuadrados cuyos lados están en la razón 2:3. Determine los lados de los cuadrados.

77. Geometría Los perímetros de dos círculos suman 12π centímetros y las áreas suman 20π centímetros cuadrados. Determine los radios de los círculos.

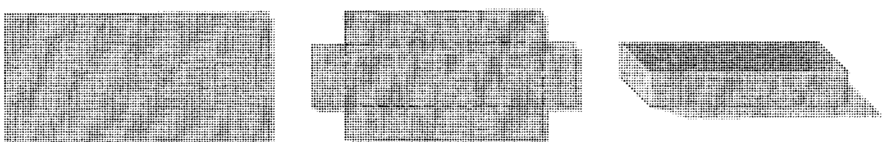
78. *Geometría.* La altura de un triángulo isósceles trazada hasta su base es de 3 centímetros, y su perímetro es de 18 centímetros. Determine la longitud de su base.

79. *La liebre y la tortuga.* En una carrera de 21 metros entre una tortuga y una liebre, la tortuga sale 9 minutos antes que la liebre. La liebre, que corre a una velocidad promedio de 0.5 metros por hora más rápido que la tortuga, cruza la meta 3 minutos antes que la tortuga. ¿Cuáles son las velocidades promedio de la tortuga y la liebre?

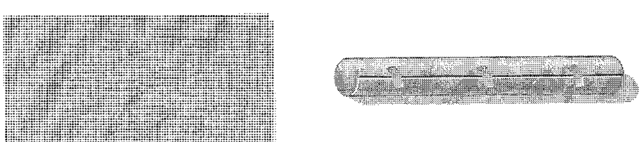


80. *Carreras.* En una carrera de una milla, el ganador cruza la meta 10 pies antes del corredor de segundo lugar y 20 pies antes que el tercero. Si cada corredor mantiene una velocidad constante en toda la carrera, ¿por cuántos pies gana el corredor de segundo lugar al de tercero?

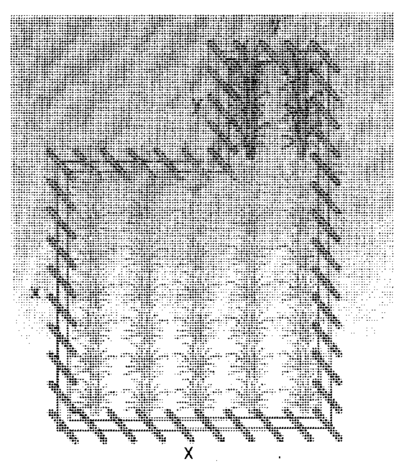
81. *Construcción de una caja.* Un pedazo rectangular de cartulina, cuya área es de 216 centímetros cuadrados, debe formar una caja abierta al cortarle un cuadrado de 2 centímetros en cada esquina y doblar después los lados hacia arriba. *Véase* la figura. Si la caja debe tener un volumen de 224 centímetros cúbicos, ¿con qué tamaño de cartulina hay que comenzar?



82. *Construcción de un tubo cilíndrico.* Un pedazo rectangular de cartulina, cuya área es de 216 centímetros cuadrados, debe formar un tubo cilíndrico al unir dos de sus lados. (*Véase* la figura.) Si el tubo debe tener un volumen de 224 centímetros cúbicos, ¿con qué tamaño de cartulina hay que comenzar?



83. *Cercas.* Un agricultor dispone de 300 pies de cerca para encerrar 4500 pies cuadrados en forma de dos cuadrados adyacentes, con lados de longitudes x y y. *Véase* la figura. Determine x y y.



84. *Alambre.* Un alambre con longitud de 60 pies se corta en dos partes. ¿Es posible doblar una parte para formar un cuadrado y doblar la otra para formar un círculo, de modo que el área total encerrada por las dos partes sea de 100 pies cuadrados? En caso de que así sea, determine la longitud de un lado del cuadrado y el radio del círculo.

85. *Geometría.* Determine fórmulas para la longitud l y la anchura w de un rectángulo en términos de su área A y perímetro P.

86. *Geometría.* Determine fórmulas para la base b y uno de los lados iguales l de un triángulo isósceles en términos de su altura h y perímetro P.

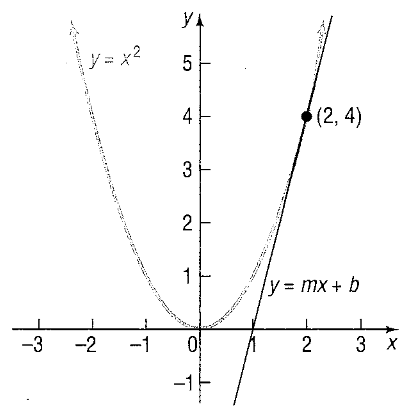
87. *Método de Descartes de las raíces iguales.* El método de Descartes para la determinación de tangentes se relaciona con la idea de que, para muchas gráficas, la recta tangente en un punto dado es la *única* recta que sólo corta a la gráfica en ese punto. Aplicaremos este método para determinar una ecuación de la tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto (2, 4); *véase* la figura. En primer lugar, sabemos que la ecuación de la tangente debe ser de la forma $y = mx + b$. Utilizamos el hecho de que el punto (2,4) está sobre la recta, para despejar b en términos de m y obtener la ecuación $y = mx + (4 - 2m)$. Ahora, queremos que (2, 4) sea la *única* solución del sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = mx + 4 - 2m \end{cases}$$

A partir de este sistema, obtenemos que $x^2 = mx + 4 - 2m$ o $x^2 - mx + (2m - 4) = 0$. Utilizamos la fórmula cuadrática para calcular

$$x = m \pm \frac{\sqrt{m^2 - 4(2m - 4)}}{2}$$

Para obtener una única solución de x, las dos raíces deben ser iguales; en otras palabras, la expresión $m^2 - 4(2m - 4)$ debe anularse. Concluya el trabajo pertinente para obtener m y escriba una ecuación de la tangente.



En los problemas del 88 al 94, utilice el método de Descartes del problema 87 para determinar la ecuación de la tangente a la gráfica en el punto dado.

88. $x^2 + y^2 = 10$; en (1, 3)

89. $y = x^2 + 2$; en (1, 3)

90. $x^2 + y = 5$; en (−2, 1)

91. $2x^2 + 3y^2 = 14$; en (1, 2)

92. $3x^2 + y^2 = 7$; en (−1, 2)

93. $x^2 - y^2 = 3$; en (2, 1)

94. $2y^2 - x^2 = 14$; en (2, 3)

95. Si r_1 y r_2 son dos soluciones de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, entonces se puede mostrar que

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{y} \quad r_1 r_2 = \frac{c}{a}$$

Resuelva este sistema de ecuaciones en términos der r_1 y r_2.

96. Un círculo y una recta se cortan cuando mucho dos veces. Un círculo y una parábola se cortan un máximo de cuatro veces. Deduzca que un círculo y la gráfica de un polinomio de grado 3 se cortan cuando mucho seis veces. ¿Qué podría conjeturar acerca de un polinomio de grado 4? ¿De un polinomio de grado n? ¿Puede explicar sus conclusiones mediante un argumento algebraico?

97. Suponga que es el gerente de un taller de hojas de metal. Un cliente le pide que fabrique 10,000 cajas abiertas por la parte superior. Las cajas deben tener una base cuadrada y una capacidad de 9 pies cúbicos. Usted las construye cortando un cuadrado en cada esquina de una hoja cuadrada de metal, y doblando los lados hacia arriba.

(a) ¿Cuáles son las dimensiones del cuadrado que se debe utilizar para cada caja si el área total de la hoja metálica es de 100 pies cuadrados?

(b) ¿Podría fabricar las cajas con una pieza más pequeña de hoja metálica? Forme una lista con las dimensiones de una caja para diversos tamaños de hoja metálica.

10.5 Sistemas de desigualdades

En el capítulo 1 analizamos las desigualdades en una variable. En esta sección analizaremos las desigualdades en dos variables. El ejemplo 1 muestra algunos casos.

EJEMPLO 1 *Casos de desigualdades en dos variables*

(a) $3x + y - 6 < 0$ (b) $x^2 + y^2 < 4$ (c) $y^2 \leq x$

Una desigualdad en dos variables x, y es **satisfecha** por un par ordenado (a,b) si, al reemplazar x por a y y por b, se obtiene un enunciado verdadero. La **gráfica de una desigualdad en dos variables** x y y consta de todos los puntos (x,y) cuyas coordenadas satisfacen la desigualdad.

Veamos un ejemplo.

EJEMPLO 2 *Graficación de una desigualdad lineal*

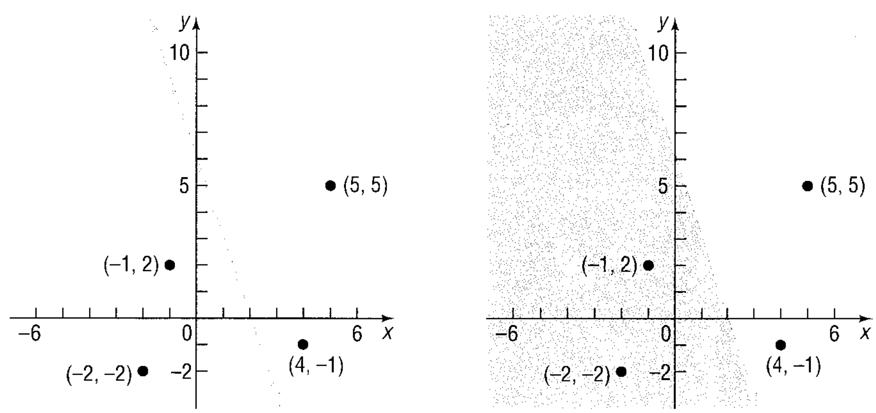
Hacer la gráfica de la desigualdad lineal: $3x + y - 6 \leq 0$

Solución Comenzamos con el problema asociado de hacer la gráfica de la igualdad lineal

$$3x + y - 6 = 0$$

formada al reemplazar (por el momento) el símbolo $\leq$ por un signo =. La gráfica de la ecuación lineal es una recta. *Véase* la figura 9(a). Esta recta es parte de la desigualdad que buscamos pues la desigualdad no es estricta. (¿Puede advertir por qué? Porque estamos buscando puntos para los cuales $3x + y - 6$ es menor *o igual que* 0.)

FIGURA 9



(a) $3x + y - 6 = 0$ **(b)** Gráfica de $3x + y - 6 \quad 0$

Ahora verificaremos algunos puntos elegidos al azar para ver si pertenecen a la gráfica de la desigualdad.

	$3x + y - 6$	CONCLUSIÓN
$(4, -1)$	$3(4) + (-1) - 6 = 5 > 0$	No pertenece a la gráfica
$(5, 5)$	$3(5) + 5 - 6 = 14 > 0$	No pertenece a la gráfica
$(-1, 2)$	$3(-1) + 2 - 6 = -7 < 0$	Pertenece a la gráfica
$(-2, -2)$	$3(-2) + (-2) - 6 = -14 < 0$	Pertenece a la gráfica

Observe de nuevo la figura 9(a). Advierta que los dos puntos que pertenecen a la gráfica están (ambos) del mismo lado de la recta, y los dos puntos que no pertenecen a la gráfica están del lado opuesto. Como puede verse, éste será siempre el caso. Así, la gráfica buscada consta de todos los puntos que están del mismo lado de la recta que $(-1, 2)$ y $(-2, -2)$. La gráfica buscada es la región sombreada de la figura 9(b).

Podemos obtener la gráfica de cualquier desigualdad en dos variables de manera similar. En primer lugar, hacemos la gráfica de la ecuación correspondiente a la desigualdad, utilizando líneas punteadas si la desigualdad es estricta y con líneas continuas si no es estricta. Esta gráfica, en la mayor parte de los casos, separará el plano xy en dos o más regiones. En cada región, todos los puntos satisfacen la desigualdad o ningún punto la satisface. Así, sólo hay que verificar un punto de prueba para ver si los puntos de esa región son parte de la gráfica o no. Los pasos a seguir aparecen a continuación.

Pasos para hacer la gráfica de una desigualdad

PASO 1: Reemplazar el símbolo de desigualdad por un signo de igualdad y hacer la gráfica de la ecuación resultante. Si la desigualdad es estricta, utilizar una línea punteada; si no lo es, utilizar una línea continua. Esta gráfica separa al plano xy en dos o más regiones.

PASO 2: En cada una de las regiones, elija un punto de prueba P.

(a) Si las coordenadas de P satisfacen la desigualdad, entonces también la satisfacen todos los puntos de esa región. Indicar esto sombreando la región.

(b) Si las coordenadas de P no satisfacen la desigualdad, entonces ninguno de los puntos de esa región la satisface.

EJEMPLO 5 Graficación de una desigualdad

Hacer la gráfica de: $x^2 + y^2 \leq 4$

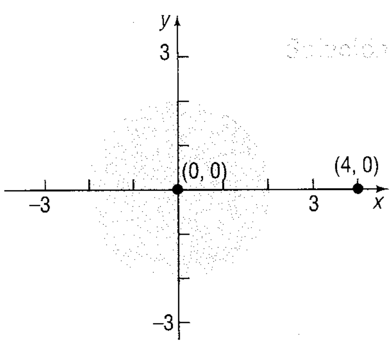
Solución Primero hacemos la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 4$, un círculo de radio 2, con centro en el origen. Utilizaremos una línea continua pues la desigualdad no es estricta. Seleccionamos dos puntos de prueba, uno dentro del círculo y otro fuera:

Dentro $(0, 0)$: $x^2 + y^2 = 0^2 + 0^2 = 0 \leq 4$

Fuera $(4, 0)$: $x^2 + y^2 = 4^2 + 0^2 = 16 > 4$

Todos los puntos dentro y sobre el círculo satisfacen la desigualdad. *Véase* la figura 10.

FIGURA 10



Ahora resuelva el problema 7.

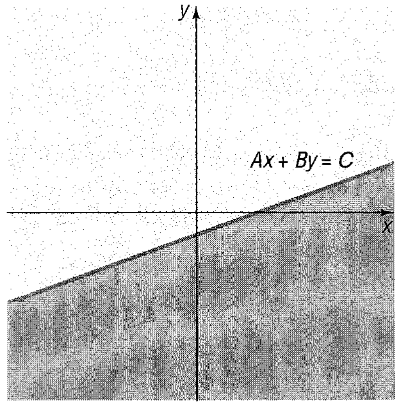
Las desigualdades lineales presentan alguna de las formas siguientes:

$$Ax + By < C, \qquad Ax + By > C, \qquad Ax + By \leq C, \qquad Ax + By \geq C$$

La gráfica de la ecuación correspondiente a una desigualdad lineal es una recta que separa el plano xy en dos regiones, llamadas **semiplanos.** *Véase* la figura 11.

Como se muestra en la figura, si $Ax + By = C$ es la ecuación de la recta frontera, entonces ésta divide al plano en dos semiplanos; en uno de ellos, $Ax + By < C$ y en el otro $Ax + By > C$. Debido a esto, sólo es necesario un punto de prueba para las desigualdades lineales.

FIGURA 11



EJEMPLO 4 Graficación de desigualdades lineales

Hacer la gráfica de: (a) $y < 2$ (b) $y \geq 2x$

Solución (a) La gráfica de la ecuación $y = 2$ es una recta horizontal y no forma parte de la gráfica de la desigualdad. Como (0,0) satisface la desigualdad, la gráfica consta del semiplano por debajo de la recta $y = 2$. *Véase* la figura 12.

FIGURA 12

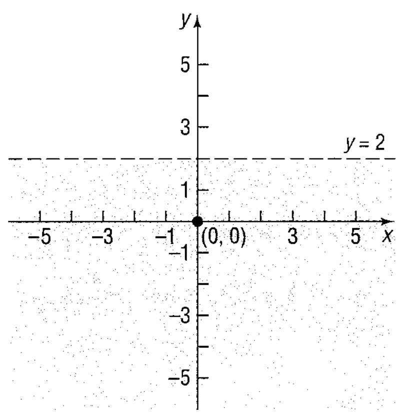
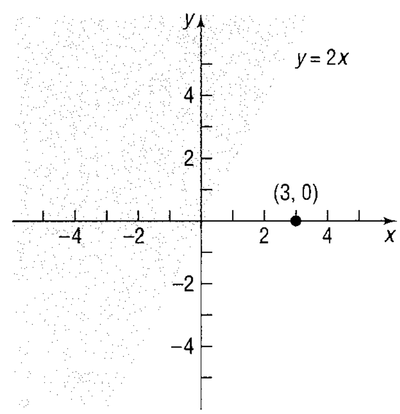


FIGURA 13



(b) La gráfica de la ecuación $y = 2x$ es una recta y forma parte de la gráfica de la desigualdad. Utilizamos (3,0) como punto de prueba y vemos que no satisface la desigualdad $[0 < 2 \cdot 3]$. Así, los puntos del semiplano en el lado opuesto de $y = 2x$ satisfacen la desigualdad. *Véase* la figura 13.

Ahora resuelva el problema 3.

Sistemas de desigualdades con dos variables

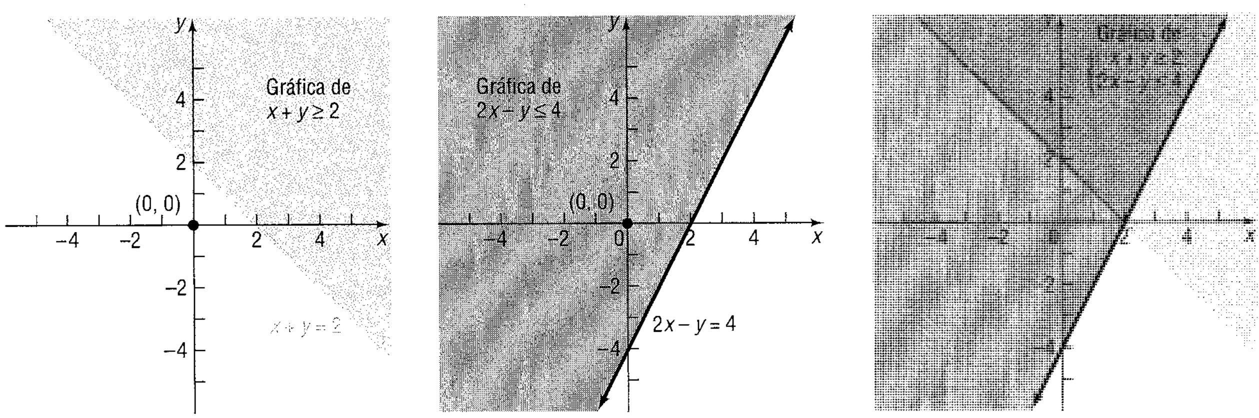
La **gráfica de un sistema de desigualdades** con dos variables x, y es el conjunto de todos los puntos (x,y) que satisfacen en forma simultánea *cada una* de las desigualdades del sistema. Así, podemos obtener la gráfica de un sistema de desigualdades haciendo la gráfica de cada desigualdad en forma individual y determinando entonces si se cortan.

EJEMPLO 5 *Graficación de un sistema de desigualdades lineales*

Hacer la gráfica del sistema: $\begin{cases} x + y \geq 2 \\ 2x - y \leq 4 \end{cases}$

Solución En primer lugar, hacemos la gráfica de la desigualdad $x + y \geq 2$ como la región sombreada de la figura 14(a). A continuación hacemos la gráfica de la desigualdad $2x - y \leq 4$ como la región sombreada de la figura 14(b). Ahora superponemos las dos gráficas como en la figura 14(c). Los puntos que están en ambas regiones sombreadas [la región más oscura de la figura 14(c)] son las soluciones que estábamos buscando, ya que satisfacen en forma simultánea cada desigualdad lineal del sistema.

FIGURA 14



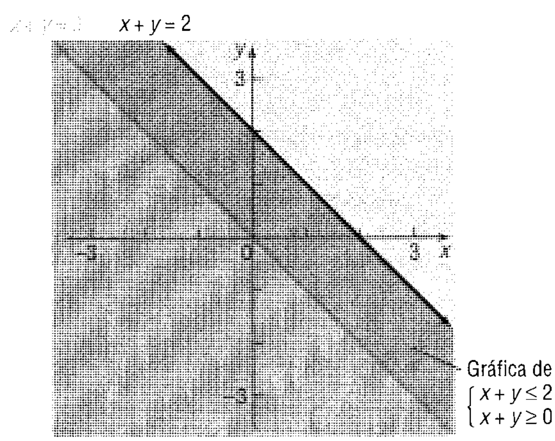
(a) (b) (c)

EJEMPLO 6 *Graficación de un sistema de desigualdades lineales*

Hacer la gráfica del sistema: $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x + y \geq 0 \end{cases}$

Solución *Véase* la figura 15. La región más oscura, la superposición, entre las dos rectas fronterizas es la gráfica del sistema.

FIGURA 15



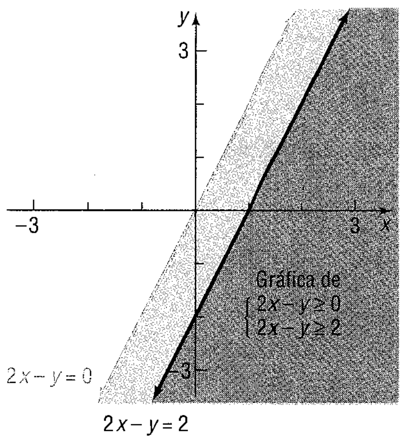
Ahora resuelva el problema 25.

EJEMPLO 7 *Graficación de un sistema de desigualdades lineales*

Hacer la gráfica del sistema: $\begin{cases} 2x - y \geq 2 \\ 2x - y \geq 0 \end{cases}$

Solución *Véase* la figura 16. La región más oscura, la superposición, entre las dos rectas fronterizas es la gráfica del sistema. Observe que la gráfica del sistema es idéntica a la gráfica de la desigualdad $2x - y \geq 2$.

FIGURA 16

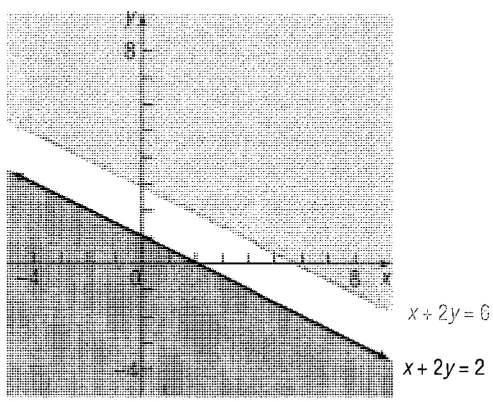


EJEMPLO 8 *Graficación de un sistema de desigualdades lineales*

Hacer la gráfica del sistema: $\begin{cases} x + 2y \leq 2 \\ x + 2y \geq 6 \end{cases}$

Solución *Véase* la figura 17. Como no existe una región de superposición, no existen puntos del plano xy que satisfagan en forma simultánea cada desigualdad. Por lo tanto, el sistema no tiene solución.

FIGURA 17



EJEMPLO 9 *Graficación de un sistema de desigualdades*

Hacer la gráfica del sistema: $\begin{cases} y \geq x^2 - 4 \\ x + y \leq 2 \end{cases}$

Solución La figura 18 muestra que la gráfica del sistema consta de la región encerrada por las gráficas de la parábola $y = x^2 - 4$ y la recta $x + y = 2$. Determinamos los puntos de intersección de las dos ecuaciones resolviendo el sistema de ecuaciones

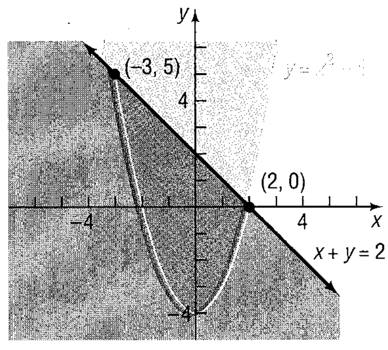
$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Utilizamos sustitución para encontrar

$$\begin{aligned} x + (x^2 - 4) &= 2 \\ x^2 + x - 6 &= 0 \\ (x + 3)(x - 2) &= 0 \\ x = -3, \qquad x &= 2 \end{aligned}$$

Los dos puntos de intersección son $(-3, 5)$ y $(2, 0)$.

FIGURA 18



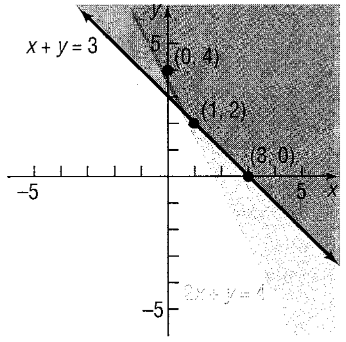
Ahora resuelva el problema 19.

EJEMPLO 1[illegible] *Graficación de un sistema de cuatro desigualdades lineales*

Hacer la gráfica del sistema: $\begin{cases} x + y \geq 3 \\ 2x + y \geq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Solución Las dos desigualdades $x \geq 0$ y $y \geq 0$ exigen que la gráfica esté en el primer cuadrante. Así, nos concentraremos en las otras dos desigualdades. La región más oscura, la superposición, de la figura 19 muestra la gráfica del sistema.

FIGURA 19



EJEMPLO 11 *Planeación financiera*

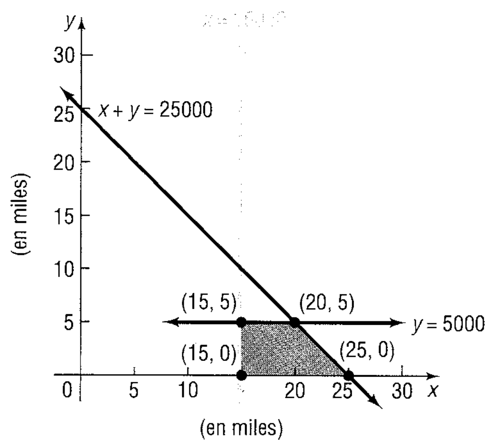
Una pareja retirada puede invertir hasta \$25,000.00. Como asesor financiero, usted recomienda que deben colocar al menos \$15,000.00 en bonos del gobierno, que rinden el 6%, y cuando mucho \$5000.00 en bonos empresariales que rinden un 9 por ciento.
(a) Utilice x para denotar la cantidad de dinero invertido en bonos del gobierno y y para la cantidad invertida en bonos empresariales; escriba un sistema de desigualdades lineales que describa las cantidades posibles de cada inversión.
(b) Haga la gráfica del sistema.

Solución (a) El sistema de desigualdades lineales es

$$\begin{cases} x \geq 0 & \\ y \geq 0 & x \text{ y } y \text{ son variables no negativas pues representan el dinero invertido.} \\ x + y \leq 25{,}000 & \text{El total de las dos inversiones, } x + y \text{, no puede exceder de \$25,000.} \\ x \geq 15{,}000 & \text{Al menos \$15,000 en bonos del gobierno} \\ y \leq 5000 & \text{Cuando mucho \$5000 en bonos empresariales} \end{cases}$$

(b) *Véase* la región sombreada en la figura 20. Observe que las desigualdades $x \geq 0$ y $y \geq 0$ de nuevo exigen que la gráfica del sistema esté en el primer cuadrante.

FIGURA 20



La gráfica del sistema de desigualdades en la figura 20 está **acotada,** ya que puede estar contenida dentro de un círculo con un radio lo suficientemente grande. Una gráfica que no puede estar contenida en círculo alguno es **no acotada.** Por ejemplo, la gráfica del sistema de desigualdades lineales en la figura 19 es no acotada, ya que se extiende de manera indefinida en una dirección particular.

Observe, en las figuras 19 y 20, que los puntos de la gráfica pertenecientes a la intersección de las fronteras han sido resaltados. Tales puntos son los **vértices** o **esquinas** de la gráfica. Así, el sistema cuya gráfica aparece en la figura 19 tiene tres vértices: (0,4), (1,2) y (3,0). El sistema de la figura 20 tiene cuatro vértices: (15,0), (25,0), (20,5) y (15,5).

Utilizaremos estas ideas en la siguiente sección para desarrollar un método que permita solucionar problemas de programación lineal, una aplicación muy importante de las desigualdades lineales.

Ahora resuelva el problema 33.

Ejercicio 10.5

En los problemas del 1 al 12 haga la gráfica de cada desigualdad.

1. $x \geq 0$
2. $y \geq 0$
3. $x \geq 4$
4. $y \leq 2$
5. $2x + y \geq 6$
6. $3x + 2y \leq 6$
7. $x^2 + y^2 > 1$
8. $x^2 + y^2 \leq 9$
9. $y \leq x^2 - 1$
10. $y > x^2 + 2$
11. $xy \geq 4$
12. $xy \leq 1$

En los problemas del 13 al 30 haga la gráfica de cada sistema de desigualdades.

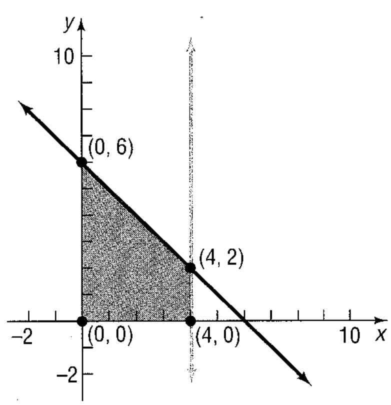
13. $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ 2x + y \geq 4 \end{cases}$
14. $\begin{cases} 3x - y \geq 6 \\ x + 2y \leq 2 \end{cases}$
15. $\begin{cases} 2x - y \leq 4 \\ 3x + 2y \geq -6 \end{cases}$
16. $\begin{cases} 4x - 5y \leq 0 \\ 2x - y \geq 2 \end{cases}$
17. $\begin{cases} 2x - 3y \leq 0 \\ 3x + 2y \leq 6 \end{cases}$
18. $\begin{cases} 4x - y \geq 2 \\ x + 2y \geq 2 \end{cases}$
19. $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ x + y \geq 3 \end{cases}$
20. $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 9 \\ x + y \leq 3 \end{cases}$
21. $\begin{cases} y \geq x^2 - 4 \\ y \leq x - 2 \end{cases}$
22. $\begin{cases} y^2 \leq x \\ y \geq x \end{cases}$
23. $\begin{cases} xy \geq 4 \\ y \geq x^2 + 1 \end{cases}$
24. $\begin{cases} y + x^2 \leq 1 \\ y \geq x^2 - 1 \end{cases}$
25. $\begin{cases} x - 2y \leq 6 \\ 2x - 4y \geq 0 \end{cases}$
26. $\begin{cases} x + 4y \leq 8 \\ x + 4y \geq 4 \end{cases}$
27. $\begin{cases} 2x + y \geq -2 \\ 2x + y \geq 2 \end{cases}$
28. $\begin{cases} x - 4y \leq 4 \\ x - 4y \geq 0 \end{cases}$
29. $\begin{cases} 2x + 3y \geq 6 \\ 2x + 3y \leq 0 \end{cases}$
30. $\begin{cases} 2x + y \geq 0 \\ 2x + y \geq 2 \end{cases}$

En los problemas del 31 al 40 haga la gráfica de cada sistema de desigualdades lineales. Indique si la gráfica está acotada o no, y señale los vértices.

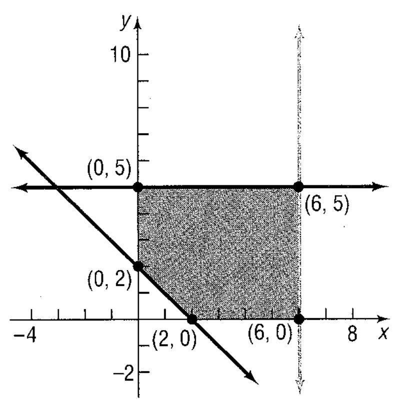
31. $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 6 \\ x + 2y \leq 6 \end{cases}$
32. $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 4 \\ 2x + 3y \geq 6 \end{cases}$
33. $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 2 \\ 2x + y \geq 4 \end{cases}$
34. $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + y \leq 6 \\ 2x + y \leq 2 \end{cases}$
35. $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 2 \\ 2x + 3y \leq 12 \\ 3x + y \leq 12 \end{cases}$
36. $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 2 \\ x + y \leq 10 \\ 2x + y \leq 3 \end{cases}$
37. $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 2 \\ x + y \leq 8 \\ 2x + y \leq 10 \end{cases}$
38. $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 2 \\ x + y \leq 8 \\ x + 2y \geq 1 \end{cases}$
39. $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \geq 1 \\ x + 2y \leq 10 \end{cases}$
40. $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \geq 1 \\ x + 2y \leq 10 \\ x + y \geq 2 \\ x + y \leq 8 \end{cases}$

En los problemas del 41 al 44 escriba un sistema de desigualdades lineales que tenga la gráfica dada.

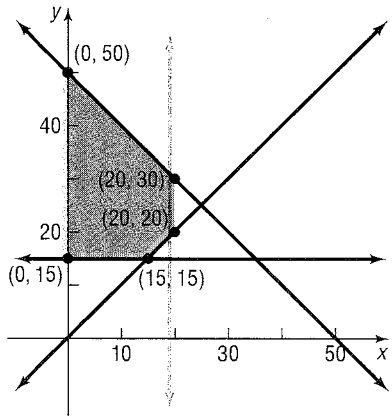
41.



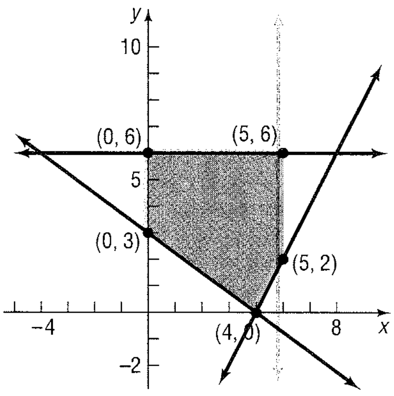
42.



43.



44.



45. *Planeación financiera.* Una pareja retirada puede invertir hasta \$50,000.00. Como asesor financiero, usted recomienda que deben colocar al menos \$35,000.00 en bonos gubernamentales que rinden un 7% y, cuando mucho, \$10,000.00 en bonos empresariales que rinden el 10 por ciento.

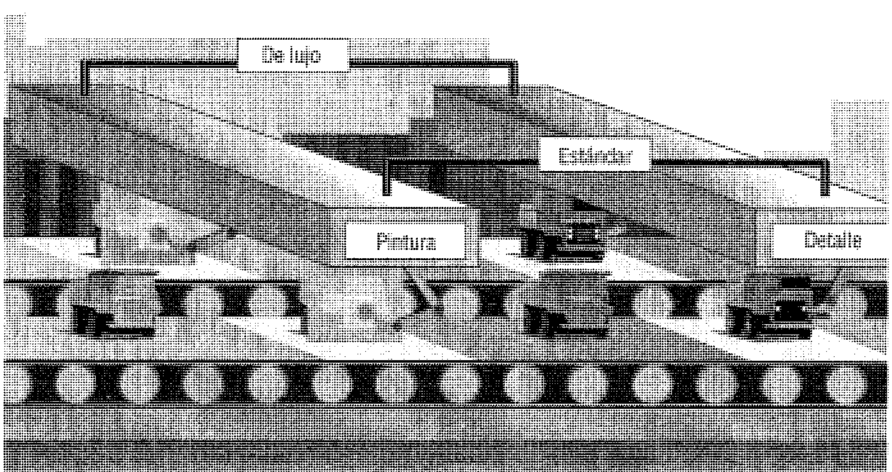
(a) Utilice x para denotar la cantidad de dinero invertido en bonos del gobierno y y para la cantidad invertida en bonos empresariales; escriba un sistema de desigualdades lineales que describa las cantidades posibles de cada inversión.

(b) Haga la gráfica del sistema y señale los vértices.

46. *Fabricación de camiones.* Un fabricante de camiones de juguete manufactura de dos tipos: un modelo estándar y otro de lujo. Cada modelo estándar requiere 2 horas para pintura y 3 horas para trabajo de detalle; cada modelo de lujo requiere 3 horas para pintura y 4 horas para trabajo de detalle. La compañía contrata dos pintores y tres trabajadores de detalle, y cada uno trabaja 40 horas a la semana.

(a) Utilice x para denotar la cantidad de camiones de modelo estándar y y para la cantidad de modelos de lujo; escriba un sistema de desigualdades lineales que describa las cantidades posibles de cada modelo que pueden fabricarse en una semana.

(b) Haga la gráfica del sistema y señale los vértices.



47. *Mezcla de café.* Una tienda especializada en café dispone de 75 libras de café tipo A y 120 libras de café tipo B, las cuales se mezclarán en paquetes de 1 libra de la manera siguiente: Una mezcla económica, con 4 onzas de café tipo A y 12 onzas de café tipo B, y una mezcla superior, con 8 onzas de café tipo A y 8 onzas de café tipo B.

(a) Utilice x para denotar la cantidad de paquetes de la mezcla económica y y para la cantidad de paquetes de la mezcla superior; escriba un sistema de desigualdades lineales que describa la cantidad posible de paquetes de cada tipo de mezcla.

(b) Haga la gráfica del sistema y señale los vértices.

48. *Mezcla de nueces* Una tienda especializada tiene 90 libras de nueces y 120 libras de cacahuates, las cuales se mezclarán en paquetes de 12 onzas como sigue: un paquete de bajo precio con 8 onzas de cacahuates y 4 de nueces, y un paquete de calidad, con 6 onzas de cacahuates y 6 de nueces.

(a) Utilice x para denotar la cantidad de paquetes de bajo precio y y para la cantidad de paquetes de calidad. Escriba un sistema de desigualdades lineales que describa la cantidad posible de cada tipo de paquete.

(b) Haga la gráfica del sistema y señale los vértices.

49. *Transporte de artículos* Un camión pequeño puede transportar no más de 1600 libras o 150 pies cúbicos. Una impresora pesa 20 libras y ocupa 3 pies cúbicos de espacio. Un horno de microondas pesa 30 libras y ocupa 2 pies cúbicos.

(a) Utilice x para representar la cantidad de hornos de microondas y y para la cantidad de impresoras; escriba un sistema de desigualdades lineales que describa la cantidad de hornos e impresoras que puede transportar el camión.

(b) Haga la gráfica del sistema y señale los vértices.

Programación lineal

Desde el punto de vista histórico, la programación lineal surgió como una técnica para resolver problemas relacionados con la distribución de artículos y materiales para la Fuerza Aérea de Estados Unidos durante la Segunda Guerra Mundial. Hoy en día, las técnicas de programación lineal se utilizan para resolver una amplia gama de problemas, como la optimización de la distribución de los vuelos en las líneas aéreas y el establecimiento de redes telefónicas. Aunque la mayor parte de los problemas prácticos de programación lineal utilizan sistemas de varios cientos de desigualdades lineales con varios cientos de variables, nos limitaremos al análisis de problemas con sólo dos variables, ya que podemos resolver tales problemas con técnicas de graficación.*

Comenzaremos con el ejemplo 11 de la sección anterior.

Una pareja retirada puede invertir hasta \$25,000.00. Como asesor financiero, usted recomienda que deben colocar al menos \$15,000.00 en bonos del gobierno que rinden el 6% y un máximo de \$5000.00 en bonos empresariales que rinden el 9%. ¿Cuánto dinero deben colocar en cada inversión de modo que se maximice el ingreso?

Este es un ejemplo típico de un *problema de programación lineal.* El problema requiere la maximización de cierta expresión lineal, el ingreso. Si I representa el ingreso, x la cantidad invertida en bonos del gobierno y y la cantidad invertida en bonos empresariales, entonces

$$I = 0.06x + 0.09y$$

Esta expresión lineal es la **función objetivo.** Además, el problema exige que el ingreso máximo se alcance bajo ciertas condiciones o **restricciones,** cada una de las cuales es una desigualdad lineal que involucra a las variables. (*Véase* el ejemplo 11 de la sección 10.5.) El problema de programación lineal del ejemplo 1 se puede enunciar de nuevo como

Maximizar $\quad I = 0.06x + 0.09y$

sujeta a las condiciones

*El **método simplex** es una forma de resolver problemas de programación lineal con muchas desigualdades y variables. Fue desarrollado por George Dantzig en 1946 y es particularmente adecuado para usarlo en computadoras. En 1984 Narendra Karmarkar, de los laboratorios Bell, descubrió una forma para resolver problemas de programación lineal de gran tamaño que mejora el método simplex.

$$x \geq 0, \qquad y \geq 0$$
$$x + y \leq 25{,}000$$
$$x \geq 15{,}000$$
$$y \leq 5000$$

En general, todo problema de programación lineal tiene dos componentes:

1. Una función objetivo, lineal, que debe maximizarse o minimizarse.
2. Una colección de desigualdades lineales que deben satisfacerse en forma simultánea.

Problema de programación lineal

Un **problema de programación lineal** en dos variables x, y consiste en maximizar (o minimizar) una función objetivo lineal

$z = Ax + By,$ A y B son números reales, que no se anulan en forma simultánea

sujeta a ciertas condiciones, o restricciones, que pueden expresarse como desigualdades lineales en x y y.

Para maximizar (o minimizar) la cantidad $z = Ax + By$, debemos identificar los puntos (x,y) que hacen a la expresión para z lo más grande (o lo más pequeña) posible. Pero no todos los puntos (x,y) son elegibles; sólo se pueden utilizar aquellos que además satisfacen cada desigualdad lineal (restricción). Cada punto (x,y) que satisface el sistema de desigualdades lineales (las restricciones) es un **punto factible.** Así, en un problema de programación lineal, buscamos el punto (o puntos) factible que maximiza (o minimiza) la función objetivo.

Observemos de nuevo el problema de programación lineal del ejemplo 1.

Consideremos el problema de programación lineal:

Maximizar $\quad I = 0.06x + 0.09y$

sujeta a las condiciones

$$x \geq 0, \qquad y \geq 0$$
$$x + y \leq 25{,}000$$
$$x \geq 15{,}000$$
$$y \leq 5000$$

Haga la gráfica de las restricciones. Después haga la gráfica de la función objetivo para $I = 0$, 0.9, 1.35, 1.65,y 1.8.

La figura 21 muestra la gráfica de las restricciones. Sobre esta gráfica superponemos la de la función objetivo para los valores dados de I.

Para $I = 0$, la función objetivo es la recta $0 = 0.06x + 0.09y$.

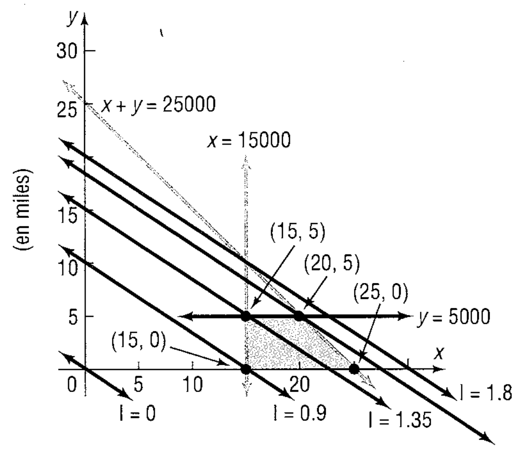
Para $I = 0.9$, la función objetivo es la recta $0.9 = 0.06x + 0.09y$.

Para $I = 1.35$, la función objetivo es la recta $1.35 = 0.06x + 0.09y$.

Para $I = 1.65$, la función objetivo es la recta $1.65 = 0.06x + 0.09y$.

Para $I = 1.8$, la función objetivo es la recta $1.8 = 0.06x + 0.09y$.

FIGURA 21



Una **solución** de un problema de programación lineal consta del punto (o puntos) factible que maximiza (o minimiza) la función objetivo, además del valor correspondiente de la función objetivo. Una condición para que un problema de programación lineal en dos variables tenga una solución es que la gráfica de los puntos factibles esté acotada. (Consulte la página 669.)

Si ninguno de los puntos factibles maximiza (o minimiza) la función objetivo, o si no existen puntos factibles, entonces el problema de programación lineal no tiene solución.

Considere el problema de programación lineal enunciado en el ejemplo 2 y observe de nuevo la figura 21. Los puntos factibles son los que están en la región sombreada. Por ejemplo, (20,3) es un punto factible, al igual que (15,5), (20,5), (18,4), etc. Para determinar la solución del problema, debemos encontrar un punto factible (x,y) que haga $I = 0.06x + 0.09y$ tan grande como sea posible. Observe que cuando I aumenta su valor de $I = 0$ a $I=0.9$ a $I = 1.35$ a $I = 1.65$ a $I = 1.8$, obtenemos una colección de rectas paralelas. Además, observe que el máximo valor de I que se puede obtener con los puntos factibles presentes es $I = 1.65$, que corresponde a la recta $1.65 = 0.06x + 0.09y$. Cualquier valor mayor de I produce una recta que no pasa por ningún punto factible. Por último, observe que el punto factible que produce $I = 1.65$ es el punto (20,5), un vértice. Estas observaciones son la base del siguiente resultado, que enunciamos sin demostración.

Teorema
localización de la solución de un problema de programación lineal

Si un problema de programación lineal tiene una solución, ésta se localiza en un vértice de la gráfica de los puntos factibles.

Si un problema de programación lineal tiene varias soluciones, al menos una de ellas está en un vértice de la gráfica de los puntos factibles.

En cualquier caso, el valor correspondiente de la función objetivo es único.

En este libro no consideraremos problemas de programación lineal sin solución. Como resultado, podemos resumir el procedimiento para resolver un problema de programación lineal como sigue:

Procedimiento para resolver un problema de programación lineal

PASO 1: Escribir una expresión para la cantidad por maximizar (o minimizar). Esta expresión es la función objetivo.
PASO 2: Escribir todas las restricciones como un sistema de desigualdades lineales y hacer la gráfica del sistema.
PASO 3: Enlistar los vértices de la gráfica de los puntos factibles.
PASO 4: Enlistar los valores correspondientes de una función objetivo en cada vértice. El mayor (o menor) de estos es la solución.

EJEMPLO 3 *Solución de un problema de programación lineal*

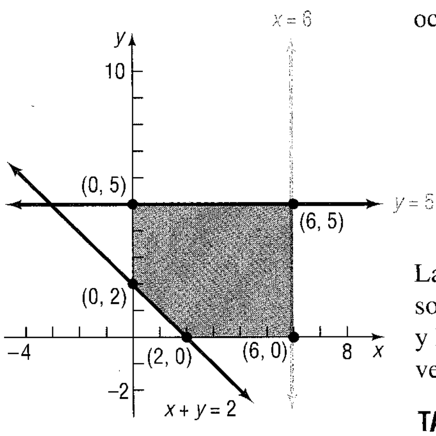
Minimizar la expresión

$$z = 2x + 3y$$

sujeta a las restricciones

$$y \leq 5, \quad x \leq 6, \quad x + y \geq 2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

FIGURA 22



Solución La función objetivo es $z = 2x + 3y$. Buscamos el valor mínimo de z que puede ocurrir, si x y y son soluciones del sistema de desigualdades lineales

$$\begin{cases} y \leq 5 \\ x \leq 6 \\ x + y \geq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La figura 22 muestra la gráfica de este sistema (los puntos factibles) como la región sombreada. También hemos indicado los vértices. La tabla 2 enumera los vértices y los valores correspondientes de la función objetivo. A partir de esa tabla podemos ver que el valor mínimo de z es 4, y que ocurre en el punto (2,0).

TABLA 2

ESQUINA	VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO
(x, y)	$z = 2x + 3y$
(0, 2)	$z = 2(0) + 3(2) = 6$
(0, 5)	$z = 2(0) + 3(5) = 15$
(6, 5)	$z = 2(6) + 3(5) = 27$
(6, 0)	$z = 2(6) + 3(0) = 12$
(2, 0)	$z = 2(2) + 3(0) = 4$

Ahora resuelva los problemas 3 y 9.

EJEMPLO 4 *Maximización de la ganancia*

Al final de cada mes, después de surtir los pedidos de sus clientes regulares, a una compañía de café le sobra cierta cantidad de café puro de Colombia y de café especial. La práctica de la compañía ha sido empaquetar una mezcla de los dos cafés en paquetes de una libra de la manera siguiente: una mezcla de menor calidad con 4 onzas de café de Colombia y 12 onzas de café especial, y otra mezcla de mayor calidad con 8 onzas de café de Colombia y 8 onzas de café especial. Así logra una ganancia de \$0.30 por paquete de mezcla de menor calidad, y una ganancia de \$0.40 por paquete de mezcla de mayor calidad. Este mes sobraron 120 libras de café especial y 100 de café de Colombia. ¿Cuántos paquetes de cada mezcla hay que preparar para lograr la ganancia máxima? Suponga que se venden todos los paquetes preparados.

Solución Comenzamos asignando símbolos a las dos variables:

x = Cantidad de paquetes de la mezcla de menor calidad
y = Cantidad de paquetes de la mezcla de mayor calidad

Si P denota la ganancia, entonces

$$P = \$0.30x + \$0.40y$$

Esta expresión es la función objetivo. Queremos maximizar P sujeta a ciertas restricciones sobre x y y. Como x y y representan cantidades de paquetes, los únicos valores para x y y que tienen sentido son los enteros no negativos. Así, tenemos las dos restricciones

$$x \geq 0, \qquad y \geq 0$$

También sabemos la cantidad de café disponible. Por ejemplo, la cantidad total de café de Colombia utilizado en las dos mezclas no puede exceder las 100 libras, o 1600 onzas. Como utilizamos 4 onzas en cada paquete de menor calidad y 8 onzas en cada paquete de mayor calidad, esto produce la restricción

$$4x + 8y \leq 1600$$

De manera análoga, la existencia de 120 libras, o 1920 onzas, de café especial conduce a la restricción

$$12x + 8y \leq 1920$$

Podemos enunciar el problema de programación lineal como

$$\text{Maximizar} \quad P = 0.3x + 0.4y$$

sujeta a las restricciones

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 4x + 8y \leq 1600, \quad 12x + 8y \leq 1920$$

La figura 23 muestra la gráfica de las restricciones (los puntos factibles). Enlistamos los vértices y evaluamos la función objetivo en cada una. En la tabla 3 podemos ver que la ganancia máxima, \$84.00, se logra con 40 paquetes de la mezcla de menor calidad y 180 paquetes de la mezcla de mayor calidad.

FIGURA 23

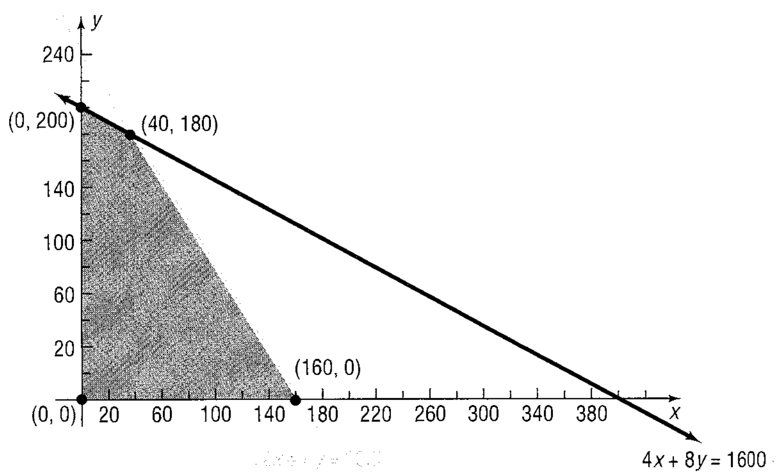


TABLA 3

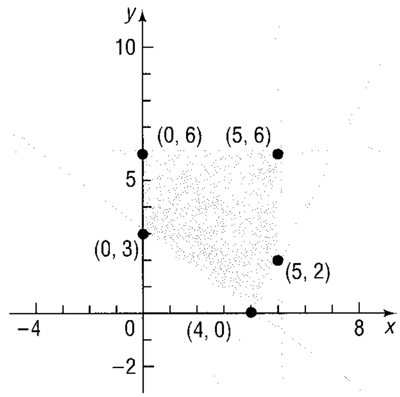
ESQUINA	VALOR DE LA GANANCIA
(x, y)	$P = 0.3x + 0.4y$
$(0, 0)$	$P = 0$
$(0, 200)$	$P = 0.3(0) + 0.4(200) = \$80$
$(40, 180)$	$P = 0.3(40) + 0.4(180) = \$84$
$(160, 0)$	$P = 0.3(160) + 0.4(0) = \$48$

Ahora resuelva el problema 17.

Ejercicio 10.6

En los problemas del 1 al 6 determine los valores máximo y mínimo de la función objetivo dada.

La figura ilustra la gráfica de los puntos factibles de un problema de programación lineal.



1. $z = x + y$ **2.** $z = 2x + 3y$ **3.** $z = x + 10y$

4. $z = 10x + y$ **5.** $z = 5x + 7y$ **6.** $z = 7x + 5y$

En los problemas del 7 al 16 resuelva cada problema de programación lineal.

7. Maximice $z = 2x + y$ sujeta a $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 6, \quad x + y \geq 1$

8. Maximice $z = x + 3y$ sujeta a $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \geq 3, \quad x \leq 5, \quad y \leq 7$

9. Minimice $z = 2x + 5y$ sujeta a $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \geq 2, \quad x \leq 5, \quad y \leq 3$

10. Minimice $z = 3x + 4y$ sujeta a $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 2x + 3y \geq 6, \quad x + y \leq 8$

11. Maximice $z = 3x + 5y$ sujeta a $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \geq 2, \quad 2x + 3y \leq 12, \quad 3x + 2y \leq 12$

12. Maximice $z = 5x + 3y$ sujeta a $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \geq 2, \quad x + y \leq 8, \quad 2x + y \leq 10$

13. Minimice $z = 5x + 4y$ sujeta a $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \geq 2, \quad 2x + 3y \leq 12, \quad 3x + y \leq 12$

14. Minimice $z = 2x + 3y$ sujeta a $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \geq 3, \quad x + y \leq 9, \quad x + 3y \geq 6$

15. Maximice $z = 5x + 2y$ sujeta a $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 10, \quad 2x + y \geq 10, \quad x + 2y \geq 10$

16. Maximice $z = 2x + 4y$ sujeta a $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 2x + y \geq 4, \quad x + y \leq 9$

17. Un fabricante de esquíes produce dos tipos: descenso y campo traviesa. Utilice la tabla siguiente para determinar la cantidad de esquíes de cada tipo que deben producirse para obtener una ganancia máxima. ¿Cuál es la ganancia máxima? ¿Cuál sería la ganancia máxima si el tiempo disponible para la fabricación aumentara a 48 horas?

	DESCENSO	CAMPO TRAVIESA	TIEMPO MÁXIMO DISPONIBLE
Tiempo de fabricación por esquí	2 horas	1 hora	40 horas
Tiempo de acabado por esquí	1 hora	1 hora	32 horas
Ganancia por esquí	$70	$50	

18. Un agricultor tiene 70 acres de tierra disponibles para plantar soya o trigo. El costo de preparación del suelo, los días necesarios y la ganancia esperada por acre plantado para cada tipo de cosecha aparecen en la tabla siguiente:

	SOYA	TRIGO
Costo de preparación por acre	$60	$30
Días de trabajo necesarios por acre	3	4
Ganancias por acre	$180	$100

El agricultor no puede gastar más de $1800.00 en costos de preparación ni más de 120 días de trabajo en total. ¿Cuántos acres de cada cosecha debe plantar para maximizar la ganancia? ¿Cuál es la ganancia máxima? ¿Cuál sería la ganancia máxima si el agricultor estuviera dispuesto a gastar hasta $2400.00 en la preparación del terreno?

19. *Administración de una granja.* Una granja pequeña tiene 100 acres de tierra disponibles para la siembra de maíz y soya. La tabla siguiente muestra el costo de cultivo por acre, el costo de la mano de obra por acre, y la ganancia esperada por acre. La columna de la derecha muestra la cantidad de dinero disponible para cada uno de estos gastos. Determine el número de acres de cada cosecha que deben plantarse para maximizar la ganancia.

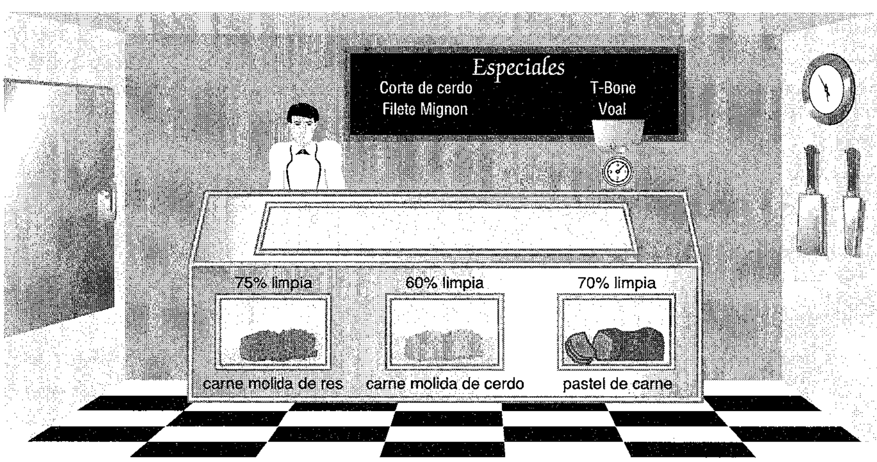
	SOYA	MAÍZ	DINERO DISPONIBLE
Costo de cultivo por acre	\$40	\$60	\$1800
Costo de mano de obra por acre	\$60	\$60	\$2400
Ganancia por acre	\$200	\$250	

20. *Requisitos de una dieta.* Cierta dieta exige al menos 60 unidades de carbohidratos, 45 de proteína y 30 de grasa por día. Cada onza del Complemento A proporciona 5 unidades de carbohidratos, 3 de proteína y 4 de grasa. Cada onza del Complemento B proporciona 2 unidades de carbohidratos, 2 de proteína y 1 unidad de grasa. Si el Complemento A cuesta \$1.50 la onza y el Complemento B \$1.00 la onza, ¿cuántas onzas de cada complemento hay que consumir diariamente para minimizar el costo de la dieta?

21. *Planeación de la producción.* En una fábrica, la máquina 1 produce clavos de 8 pulgadas a razón de 60 unidades por hora, y clavos de 6 pulgadas a razón de 70 unidades por hora. La máquina 2 produce clavos de 8 pulgadas a razón de 40 unidades por hora y clavos de 6 pulgadas a razón de 20 unidades por hora. El costo de operación de la máquina 1 es de \$50.00 la hora, mientras que el costo de operación de la máquina 2 es de \$30.00 la hora. El plan de producción exige que se produzcan al menos 240 unidades de clavos de 8 pulgadas y 140 unidades de clavos de 6 pulgadas cada 10 horas. ¿Cuál combinación de máquinas produce el menor costo de operación?

22. *Administración de una granja.* El propietario de una granja de árboles frutales contrata una cuadrilla de trabajadores para podar al menos 25 de sus 50 árboles. Se necesita una hora para podar cada árbol joven, y una hora y media para cada árbol viejo. La cuadrilla se contrata para trabajar por lo menos 30 horas y cobra \$15.00 por cada árbol joven y \$20.00 por cada árbol viejo. Para minimizar sus costos, ¿de cuántos árboles de cada tipo hay que podar? ¿Cuál será el costo?

23. *Administración de una carnicería.* Una carnicería combina carne molida de res y de cerdo en paquetes para pastel de carne. La carne de res es 75% limpia (75% carne, 25% grasa) y cuesta a la carnicería \$0.75 la libra. La carne de cerdo es 60% limpia y cuesta a la carnicería \$0.45 la libra. El pastel de carne debe ser al menos 70% limpio. Si la carnicería quiere utilizar al menos 50 libras del cerdo disponible, pero no más de 200 libras de la carne de res disponible, ¿cuánta carne molida de res debe mezclarse con la de cerdo para minimizar el costo?



24. *Ingreso por inversión.* Un asesor en inversiones recibe las instrucciones de una cliente para invertir hasta \$20,000.00, una parte en un bono que produce el 9% anual y otra parte en bonos del gobierno, que producen el 7% por año. La cliente desea invertir al menos \$8000.00 en los bonos gubernamentales y no más de \$12,000.00 en los otros.

(a) ¿Qué cantidad recomendaría el asesor se coloque en cada tipo de inversión, de modo que se maximice el ingreso, si la cliente insiste en que la cantidad invertida en bonos del gobierno debe ser mayor o igual a la de los otros bonos?

(b) ¿Qué cantidad recomendaría el asesor se coloque en cada tipo de inversión, de modo que se maximice el ingreso, si la cliente insiste en que la cantidad invertida en bonos del gobierno debe ser menor que la de los otros bonos?

25. *Maximización de la ganancia en patines para hielo.* Una fábrica produce dos tipos de patines para hielo: para carrera y para patinaje artístico. Los primeros requieren 6 horas de trabajo en el departamento de producción y una hora en acabado, mientras que los segundos requieren 4 horas de trabajo en producción y dos horas en acabado. El departamento de producción dispone de un máximo de 120 horas de trabajo al día, y el departamento de acabado no dispone de más de 40 horas de trabajo. Si la ganancia en cada par de patines de carrera es de \$10.00 y en cada par del otro tipo es de \$12.00, ¿cuántos patines de cada tipo deben fabricarse diariamente para maximizar la ganancia? (Suponga que se venden todos los patines fabricados.)

26 *Planeación financiera.* Una pareja de jubilados dispone de hasta \$50,000.00 para invertir en bonos de rendimiento fijo. Su asesor financiero les recomienda dos tipos de inversión: un bono AAA que rinde el 8% anual, y un certificado de depósito que rinde un 4% al año. Después de un análisis cuidadoso de las alternativas, la pareja decide invertir cuando mucho \$20,000.00 en el bono AAA y al menos \$15,000.00 en el certificado. También indican al asesor financiero que invierta en el certificado al menos tanto dinero como en el bono. ¿Cómo debe proceder el asesor para maximizar la ganancia en esta inversión?

27. *Diseño de un producto.* Un empresario encarga a su equipo de diseño que produzca al menos seis muestras de un nuevo tipo de sujetador que desea introducir al mercado. El costo de producción de cada sujetador metálico es de \$9.00 y el costo de un sujetador de plástico es de \$4.00. Él quiere al menos dos ejemplares de cada versión del sujetador, y debe disponer de todas las muestras dentro de 24 horas a partir de este momento. Cada muestra metálica tarda 4 horas en producción, y una muestra de plástico tarda 2 horas. Para minimizar el costo de las muestras, ¿cuántos sujetadores de cada tipo debe ordenar el empresario? ¿Cuál será el costo de las muestras?

28. *Nutrición animal.* Amadeus, el perro de Tomás, gusta de dos tipos de comida enlatada para perros. Una lata de "Gourmet Dog" cuesta 40 centavos, tiene 20 unidades de un complejo vitamínico y 75 calorías. Una lata de "Chow Hound" cuesta 32 centavos, tiene 35 unidades de vitaminas y 50 calorías. Tomás quiere que Amadeus tenga al menos 1175 unidades de vitamina y 2375 calorías al mes. Si tiene espacio para almacenar sólo 60 latas al mismo tiempo, ¿cuántas latas de cada tipo debe comprar Tomás cada mes para minimizar su costo?

29. *Ganancia de una aerolínea.* Una aerolínea tiene dos tipos de servicio: primera clase y turismo. La experiencia de la administración indica que cada avión debe tener al menos 8, pero no más de 16, asientos de primera clase y al menos 80, pero no más de 120, asientos de turismo.

(a) Si la administración decide que la proporción de asientos de primera clase y turismo no debe ser mayor que 1:12, ¿con cuántos asientos de cada tipo debe configurar sus aviones para maximizar la ganancia?

(b) Si la administración decide que la proporción de asientos de primera clase y turismo no debe ser mayor que 1:8, ¿con cuántos asientos de cada tipo debe configurar sus aviones para maximizar la ganancia?

(c) Si usted fuese el administrador, ¿qué haría?

{*Sugerencia:* Suponga que la aerolínea cobra \$$C$ por cada asiento en clase turista y \$$F$ por un asiento de primera clase; $C > 0$, $F > 0$.}

30. *Minimización de costos.* En una granja especializada en pollo se agregan cuatro tipos de vitamina a la comida usual de los pollos. El dueño quiere que la comida complementada contenga al menos 50 unidades de vitamina I, 90 de vitamina II, 60 de vitamina III y 100 de vitamina IV por cada 100 onzas de comida. Hay dos complementos disponibles: el complemento A, que contiene 5 unidades de vitamina I, 25 de vitamina II, 10 de vitamina III y 35 de vitamina IV por onza; y el complemento B, que contiene 25 unidades de vitamina I, 10 de vitamina II, 10 de vitamina III y 20 de vitamina IV por onza. Si el complemento A cuesta \$0.06 la onza y el complemento B \$0.08 la onza, ¿qué cantidad de cada complemento debe comprarse para agregarla a cada 100 onzas de comida y mantener mínimo el costo total, pero conservando las especificaciones de contenido vitamínico estipuladas?

31. Explique con sus propias palabras lo que es un problema de programación lineal y cómo se puede resolver.

Repaso del capítulo

Conceptos Fundamentales

Sistemas de ecuaciones

Los sistemas que no tienen solución son inconsistentes. Los que tienen solución son consistentes.

Los sistemas consistentes tienen una única solución o una infinidad de soluciones.

Problema de programación lineal

Maximizar (o minimizar) una función objetivo lineal, $z = Ax + By$, sujeta a ciertas condiciones, o restricciones, que pueden expresarse con desigualdades lineales en términos de x y y.

Punto factible

El punto (x,y) que satisface las restricciones de un problema de programación lineal.

Localización de la solución

Si un problema de programación lineal tiene una solución, ésta se localiza en un vértice de la gráfica de los puntos factibles.

Si un problema de programación lineal tiene varias soluciones, al menos una de ellas se localiza en un vértice de la gráfica de puntos factibles.

En cualquiera de estos casos, el valor correspondiente de la función objetivo es único.

CÓMO HACER PARA

Resolver un sistema de ecuaciones lineales mediante el método de sustitución

Resolver un sistema de ecuaciones lineales mediante el método de eliminación

Resolver un sistema de ecuaciones lineales mediante matrices

Resolver un sistema de ecuaciones lineales mediante determinantes

Resolver un sistema de ecuaciones no lineales

Hacer la gráfica de un sistema de desigualdades

Determinar los vértices de la gráfica de un sistema de desigualdades lineales

Resolver problemas de programación lineal

COMPLETE EN LOS ESPACIOS

1. Si un sistema de ecuaciones no tiene solución, se dice que es ___________.
2. Un arreglo de números rectangular m por n es una ___________.
3. La regla de Cramer utiliza ___________ para resolver un sistema de ecuaciones lineales.
4. La matriz utilizada para representar un sistema de ecuaciones lineales es una matriz ___________ .
5. La gráfica de una desigualdad lineal es una ___________.
6. Un problema de programación lineal pide maximizar (o minimizar) una expresión lineal, llamada ___________ ___________.
7. Todo punto que satisface las restricciones de un problema de programación lineal es un ___________ ___________.

CIERTO O FALSO

C F 1. Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas siempre tiene al menos una solución.

C F 2. La matriz aumentada de un sistema de dos ecuaciones con tres variables tiene dos renglones y cuatro columnas.

C F 3. Un determinante 3 por 3 nunca puede ser igual a 0.

C F 4. Un sistema de ecuaciones consistente tiene una solución exacta.

C F 5. La gráfica de una desigualdad lineal es un semiplano.

C F 6. En algunos casos, la gráfica de un sistema de desigualdades lineales es acotada.

C F 7. Si un problema de programación lineal tiene una solución, ésta se localiza en un vértice de la gráfica de los puntos factibles.

EJERCICIOS DE REPASO

En los problemas del 1 al 20, resuelva cada sistema de ecuaciones mediante el método de sustitución o el de eliminación. Si el sistema no tiene solución, indique que es inconsistente.

1. $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 5x + 2y = 8 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 7x - y = 3 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} 3x - 4y = 4 \\ x - 3y = \frac{1}{2} \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 5x - 4y = -\frac{13}{2} \end{cases}$

5. $\begin{cases} x - 2y - 4 = 0 \\ 3x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$
6. $\begin{cases} x - 3y + 5 = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$
7. $\begin{cases} y = 2x - 5 \\ x = 3y + 4 \end{cases}$
8. $\begin{cases} x = 5y + 2 \\ y = 5x + 2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x - y + 4 = 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}y + \frac{2}{5} = 0 \end{cases}$
10. $\begin{cases} x + \frac{1}{4}y = 2 \\ y + 4x + 2 = 0 \end{cases}$
11. $\begin{cases} x - 2y - 8 = 0 \\ 2x + 2y - 10 = 0 \end{cases}$
12. $\begin{cases} x - 3y + \frac{7}{2} = 0 \\ \frac{1}{2}x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} y - 2x = 11 \\ 2y - 3x = 18 \end{cases}$
14. $\begin{cases} 3x - 4y - 12 = 0 \\ 5x + 2y + 6 = 0 \end{cases}$
15. $\begin{cases} 2x + 3y - 13 = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$
16. $\begin{cases} 4x + 5y = 21 \\ 5x + 6y = 42 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ x - \frac{2}{3}y = 12 \end{cases}$
18. $\begin{cases} 2x + 5y = 10 \\ 4x + 10y = 15 \end{cases}$
19. $\begin{cases} x + 2y - z = 6 \\ 2x - y + 3z = -13 \\ 3x - 2y + 3z = -16 \end{cases}$
20. $\begin{cases} x + 5y - z = 2 \\ 2x + y + z = 7 \\ x - y + 2z = 11 \end{cases}$

En los problemas del 21 al 30 resuelva cada sistema de ecuaciones utilizando matrices. Si el sistema no tiene soluciones, indique que es inconsistente.

21. $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 10x + 10y = 5 \end{cases}$
22. $\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ x - y = -\frac{1}{2} \end{cases}$
23. $\begin{cases} 5x + 6y - 3z = 6 \\ 4x - 7y - 2z = -3 \\ 3x + y - 7z = 1 \end{cases}$
24. $\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 4x - y - 3z = 1 \\ 8x + y - z = 5 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x - 2z = 1 \\ 2x + 3y = -3 \\ 4x - 3y - 4z = 3 \end{cases}$
26. $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - 2y + z = -1 \\ 6x + 4y + 3z = 5 \end{cases}$
27. $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y - 5z - 6 = 0 \\ 2x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$
28. $\begin{cases} 4x - 3y + 5z = 0 \\ 2x + 4y - 3z = 0 \\ 6x + 2y + z = 0 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x - y - z - t = 1 \\ 2x + y + z + 2t = 3 \\ x - 2y - 2z - 3t = 0 \\ 3x - 4y + z + 5t = -3 \end{cases}$
30. $\begin{cases} x - 3y + 3z - t = 4 \\ x + 2y - z = -3 \\ x + 3z + 2t = 3 \\ x + y + 5z = 6 \end{cases}$

En los problemas del 31 al 36 encuentre el valor de cada determinante.

31. $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$
32. $\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$
33. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$
34. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$
35. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix}$
36. $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

En los problemas del 37 al 42 utilice la regla de Cramer, si es aplicable, para resolver cada sistema.

37. $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$
38. $\begin{cases} x - 3y = -5 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$
39. $\begin{cases} 2x + 3y - 13 = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$
40. $\begin{cases} 3x - 4y - 12 = 0 \\ 5x + 2y + 6 = 0 \end{cases}$

41. $\begin{cases} x + 2y - z = 6 \\ 2x - y + 3z = -13 \\ 3x - 2y + 3z = -16 \end{cases}$
42. $\begin{cases} x - y + z = 8 \\ 2x + 3y - z = -2 \\ 3x - y - 9z = 9 \end{cases}$

En los problemas del 43 al 52 resuelva cada sistema de ecuaciones.

43. $\begin{cases} 2x + y + 3 = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$
44. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ 2x - y^2 = -8 \end{cases}$
45. $\begin{cases} 2xy + y^2 = 10 \\ 3y^2 - xy = 2 \end{cases}$
46. $\begin{cases} 3x^2 - y^2 = 1 \\ 7x^2 - 2y^2 - 5 = 0 \end{cases}$

47. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 64 \\ x^2 = 3y \end{cases}$
48. $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$
49. $\begin{cases} 3x^2 + 4xy + 5y^2 = 8 \\ x^2 + 3xy + 2y^2 = 0 \end{cases}$
50. $\begin{cases} 3x^2 + 2xy - 2y^2 = 6 \\ xy - 2y^2 + 4 = 0 \end{cases}$

51. $\begin{cases} x^2 - 3x + y^2 + y = -2 \\ \dfrac{x^2 - x}{y} + y + 1 = 0 \end{cases}$
52. $\begin{cases} x^2 + x + y^2 = y + 2 \\ x + 1 = \dfrac{2 - y}{x} \end{cases}$

En los problemas del 53 al 58 haga la gráfica de cada sistema de desigualdades. Indique si la gráfica es acotada o no, y señale los vértices.

53. $\begin{cases} -2x + y \leq 2 \\ x + y \geq 2 \end{cases}$

54. $\begin{cases} x - 2y \leq 6 \\ 2x + y \geq 2 \end{cases}$

55. $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 4 \\ 2x + 3y \leq 6 \end{cases}$

56. $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + y \geq 6 \\ 2x + y \geq 2 \end{cases}$

57. $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 8 \\ x + 2y \geq 2 \end{cases}$

58. $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + y \leq 9 \\ 2x + 3y \geq 6 \end{cases}$

En los problemas del 59 al 62 haga la gráfica de cada sistema de desigualdades.

59. $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ x + y \geq 2 \end{cases}$

60. $\begin{cases} y^2 \leq x - 1 \\ x - y \leq 3 \end{cases}$

61. $\begin{cases} y \leq x^2 \\ xy \leq 4 \end{cases}$

62. $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$

En los problemas del 63 al 68 resuelva cada problema de programación lineal.

63. Maximice $z = 3x + 4y$ sujeto a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $3x + 2y \geq 6$, $x + y \leq 8$

64. Maximice $z = 2x + 4y$ sujeto a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 6$, $x \geq 2$

65. Minimice $z = 3x + 5y$ sujeto a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \geq 1$, $3x + 2y \leq 12$, $x + 3y \leq 12$

66. Minimice $z = 3x + y$ sujeto a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \leq 8$, $y \leq 6$, $2x + y \geq 4$

67. Maximice $z = 5x + 4y$ sujeto a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + 2y \geq 2$, $3x + 4y \leq 12$, $y \geq x$

68. Maximice $z = 4x + 5y$ sujeto a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + 3y \geq 6$, $x \geq y$, $2x + y \leq 12$

69. Determine A de modo que el sistema de ecuaciones lineales tenga una infinidad de soluciones.

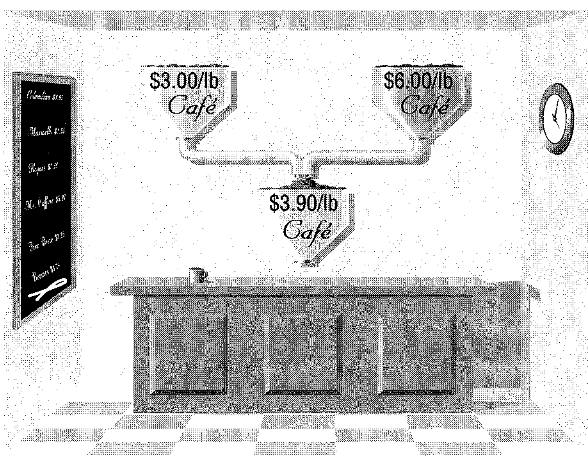
$$\begin{cases} 2x + 5y = 5 \\ 4x + 10y = A \end{cases}$$

70. Determine A de modo que el sistema de ecuaciones lineales tenga una infinidad de soluciones.

71. *Ajuste de curvas.* Determine la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos (0, 1), (1, 0), y (−2, 1).

72. *Ajuste de curvas.* Determine la ecuación general del círculo que pasa por los tres puntos (0, 1), (1, 0), y (−2, 1). [*Nota*: La ecuación general de un círculo es $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$.]

73. *Mezcla de café.* Un distribuidor de café mezcla un nuevo café que costará $3.90 por libra. El café será una mezcla de un tipo de café de $3.00 por libra y de otro de $6.00 por libra. ¿Cuánta cantidad de cada café debe usar para obtener la mezcla deseada? [*Sugerencia:* Suponga que el peso del café mezclado es de 100 libras.]



74. *Agricultura.* En una granja de 1000 acres se siembra maíz y soya. El costo por acre para cultivar maíz es de \$65.00 y para la soya es de \$45.00. Si el presupuesto disponible es de \$54,325.00 y hay que utilizar todo el terreno, ¿cuántos acres se deben asignar a cada cultivo?

75. *Pedidos de galletas.* Una compañía fabrica tres tipos de galletas: avena con pasas, chispas de chocolate y saladas, empaquetadas en cajas pequeñas, medianas y grandes. La caja pequeña contiene una docena de galletas de avena con pasas y una docena de chispas de chocolate; la caja mediana contiene 2 docenas de galletas de avena con pasas, una docena de chispas de chocolate y una docena de galletas saladas; la caja grande contiene 2 docenas del tipo avena con pasas, 2 docenas de chispas de chocolate y 3 docenas de saladas. Si usted necesita exactamente 15 docenas de galletas de avena con pasas, 10 de chispas de chocolate y 11 saladas, ¿cuántas cajas de cada tamaño debe comprar?

76. *Mezcla de nueces.* Una tienda especializada tiene 72 libras de nueces y 120 libras de cacahuates, que se van a mezclar en paquetes de 12 onzas de la manera siguiente: un paquete de menor precio con 8 onzas de cacahuates y 4 de nueces, y un paquete de calidad con 6 onzas de cacahuates y 6 de nueces.
   (a) Utilice x para denotar la cantidad de paquetes de menor precio y y para la cantidad de paquetes de calidad. Escriba un sistema de desigualdades lineales que describan la cantidad posible de cada tipo de paquete.
   (b) Haga la gráfica del sistema y señale los vértices.

77. Un lote rectangular pequeño tiene un perímetro de 68 pies. Si su diagonal mide 26 pies, ¿cuáles son sus dimensiones?

78. El área de una ventana rectangular es de 4 pies cuadrados. Si la diagonal mide $2\sqrt{2}$ pies, ¿cuáles son las dimensiones de la ventana?

79. *Geometría.* Cierto triángulo rectángulo tiene un perímetro de 14 pulgadas. Si la hipotenusa mide 6 pulgadas, ¿cuánto miden los catetos?

80. *Geometría.* Cierto triángulo isósceles tiene un perímetro de 18 pulgadas. Si la altura mide 6 pulgadas, ¿cuánto mide la base?

81. ¿Cuántos metros de cerca se necesitan para encerrar 5000 pies cuadrados mediante dos cuadrados cuyos lados están en la proporción 1:2?

82. *Mezcla de ácidos.* Un laboratorio químico tiene tres recipientes de ácido clorhídrico, HCl. Un recipiente tiene una solución concentrada al 10% de HCl, el segundo tiene una concentración del 25% y el tercero 40% de HCl. ¿Cuántos litros de cada recipiente hay que mezclar para obtener 100 litros de una solución concentrada al 30% de HCl? Construya una tabla con algunas de las combinaciones posibles.

83. *Cálculo de participación.* Catalina, Miguel, Daniel y Alejandra acordaron arreglar el jardín de su casa por \$45.00 y dividirlo entre ellos. Al terminar, su padre dispuso que Miguel debía recibir el doble que Catalina, que Catalina y Alejandra merecen la misma cantidad y Daniel la mitad de lo obtenido por Catalina. ¿Cuánto dinero recibió cada uno?

84. *Rapidez de la propulsión a chorro.* En un vuelo entre el aeropuerto Midway (Chicago) y Fort Lauderdale, Florida, un Boeing 737 mantiene una velocidad de 475 millas por hora. Si el viaje de Chicago a Fort Lauderdale tarda 2 horas con 30 minutos y el vuelo de retorno tarda 2 horas con 50 minutos, ¿cuál es la rapidez de la propulsión a chorro? (Suponga que la rapidez de la propulsión permanece constante en las diversas altitudes del plano.)

85. *Trabajos de razón constante.* Si Catalina y Miguel trabajan juntos durante 1 hora y 20 minutos terminarán cierta labor. Si Miguel y Daniel trabajan juntos durante 1 hora y 36 minutos, pueden terminar el mismo trabajo. Si Daniel y Catalina trabajan juntos pueden concluir en 2 horas y 40 minutos. ¿Cuánto tiempo tardaría cada uno en realizar el trabajo solo?

86. *Maximización de la ganancia en figurines.* Una fábrica produce dos tipos de figuras de cerámica: una bailarina y una sirena, cada una de las cuales requiere tres procesos: moldeo, pintura y vidriado. La mano de obra disponible diariamente para moldeo no es mayor que 90 horas de trabajo, para la pintura no es mayor que 120 horas y para el vidriado no más de 60 horas. La bailarina requiere 3 horas de trabajo para el moldeo, 6 horas para la pintura y 2 para el vidriado. La sirena requiere 3 horas de trabajo para el moldeo, 4 horas para la pintura y 3 para el vidriado. Si la ganancia por cada figura es de \$25.00 en las bailarinas y de \$30.00 en las sirenas, ¿cuántas figuras de cada tipo hay que producir diariamente para maximizar la ganancia? Si la gerencia decide producir el número de cada figura que maximice la ganancia, determine cuál de los procesos tiene un exceso de horas de trabajo asignadas.

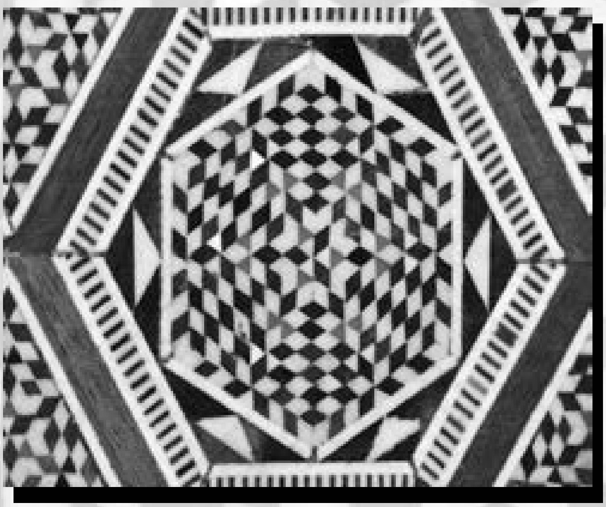
87. Una fábrica produce motores a gasolina y a diesel. Cada semana se deben entregar al menos 20 motores de gasolina y 15 motores diesel. Sin embargo, debido a limitaciones físicas, la fábrica no puede producir más de 60 motores a gasolina ni más de 40 motores a diesel. Por último, para evitar la escasez, hay que producir cuando menos 50 motores. Si el costo de producción de un motor a gasolina es de \$450.00 y el de un motor diesel es de \$550.00, ¿cuántos motores hay que producir por semana para minimizar el costo? ¿Cuál es la capacidad de exceso de la fábrica, es decir, cuántos motores de cada tipo se están produciendo aparte del número que la fábrica está obligada a entregar?

88. Describa cuatro formas de resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables. ¿Qué método prefiere usted? ¿Por qué?

TEMA 6

CAPÍTULO 11

Sucesiones; inducción; métodos de conteo; probabilidad



Panorama Creación de un diseño para el piso

Un piso de mosaico de cerámica está diseñado en forma de trapecio con 20 pies de ancho en la base y 10 pies de ancho en la base superior. Los mosaicos, de 12 por 12 pulgadas, serán colocados de modo que cada fila sucesiva tenga un mosaico menos que la anterior. ¿Cuántos mosaicos se necesitarán? [ejemplo 7 de la sección 11.2.]

Este capítulo introduce temas que se tratan con mayor detalle en los cursos de *Matemáticas finitas* o *Matemáticas discretas*. Aplicaciones de estos temas se encuentran en los campos de ciencias de la computación, ingeniería, economía y negocios, las ciencias sociales y las ciencias físicas y biológicas.

El capítulo puede ser dividido en cuatro partes independientes:

Las secciones 11.1, 11.2 y 11.3, tratan acerca de las sucesiones, las cuales son funciones cuyo dominio es el conjunto de los números naturales. Las sucesiones forman la base de las *funciones definidas de manera recursiva* y *de procedimientos recursivos* utilizados en la programación de computadoras.

La sección 11.4, inducción matemática, nos permitirá conocer una técnica para demostrar teoremas que involucran a los números naturales.

La sección 11.5, el teorema del binomio, introduce una fórmula para la expansión de $(x + a)^n$, donde n es cualquier número natural.

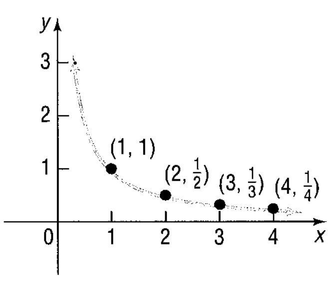
Las secciones 11.6, 11.7 y 11.8; donde las dos primeras tienen que ver con técnicas y fórmulas para contar el número de objetos en un conjunto, una parte de la rama de las matemáticas llamada *combinatoria*. Estas fórmulas son usadas en ciencias de la computación para analizar algoritmos y funciones recursivas y para estudiar pilas y colas. También son usadas para determinar *probabilidades*, esto es, la posibilidad de que ocurra cierto resultado en un experimento aleatorio.

11.1 Sucesiones

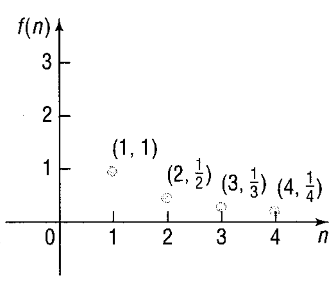
Sucesiones Una **sucesión** es una función cuyo dominio es el conjunto de los números enteros positivos.

Puesto que una sucesión es una función, tendrá una gráfica. En la figura 1(a), reconocerá la gráfica de la función $f(x) = 1/x$, $x > 0$. Si todos los puntos de esta gráfica fueran eliminados excepto aquellos cuya coordenada x, o abscisa, sea un entero positivo —esto es, si todos los puntos son eliminados excepto $(1, 1)$, $(2, \frac{1}{2})$, $(3, \frac{1}{3})$, y así sucesivamente—, los puntos que quedarían serían la gráfica de la sucesión $f(n) = 1/n$, como se muestra en la figura 1(b).

FIGURA 1



(a) $f(x) = \frac{1}{x}, x > 0$



(b) $f(n) = \frac{1}{n}$

Por lo común, una sucesión es representada enlistando sus valores ordenadamente. Por ejemplo, la sucesión cuya gráfica aparece en la figura 1(b) puede ser representada como

$$f(1), f(2), f(3), f(4), \ldots \quad \text{o} \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

La lista nunca termina, como lo indican los puntos suspensivos. Los números en esta lista ordenada son llamados **términos** de la sucesión.

Al tratar con sucesiones, por lo regular usamos letras con subíndice, por ejemplo, a_1 para representar al primer término, a_2 para el segundo término, a_3 para el tercer término, y así sucesivamente. De esta manera, para la sucesión $f(n) = 1/n$, escribimos

$$\begin{aligned} a_1 &= f(1) = 1 \\ a_2 &= f(2) = \frac{1}{2} \\ a_3 &= f(3) = \frac{1}{3} \\ a_4 &= f(4) = \frac{1}{4} \\ &\vdots \\ a_n &= f(n) = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

En otras palabras, por lo regular no usamos la notación tradicional de funciones $f(n)$ para escribir sucesiones. Para esta sucesión en particular, tenemos una regla para el n-ésimo término, a saber, $a_n = 1/n$, de modo que es fácil encontrar cualquier término de la sucesión.

Cuando se conoce una fórmula para el n-ésimo término, en lugar de escribir los términos de la sucesión, normalmente representamos a toda la sucesión colocando llaves alrededor de la fórmula para el n-ésimo término. Por ejemplo, la sucesión cuyo n-ésimo término es $b_n = (\frac{1}{2})^n$ puede ser representada como

$$\{b_n\} = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

o por

$$b_1 = \frac{1}{2}$$
$$b_2 = \frac{1}{4}$$
$$b_3 = \frac{1}{8}$$
$$\vdots$$
$$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$\vdots$$

EJEMPLO 1 *Escritura de los primeros términos de una sucesión*

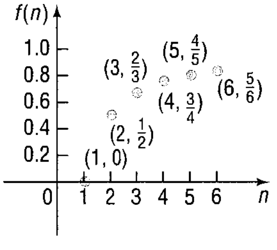
Escribir los primeros seis términos de la sucesión siguiente y trazar su gráfica.

$$\{a_n\} = \left\{\frac{n-1}{n}\right\}$$

Solución

$$a_1 = 0$$
$$a_2 = \frac{1}{2}$$
$$a_3 = \frac{2}{3}$$
$$a_4 = \frac{3}{4}$$
$$a_5 = \frac{4}{5}$$
$$a_6 = \frac{5}{6}$$

FIGURA 2



Véase la figura 2.

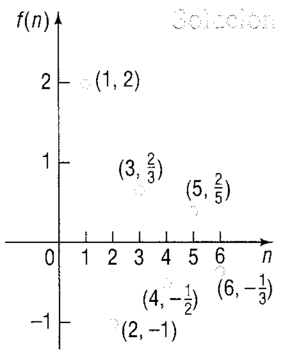
Verificación: Escribir un programa que genere los primeros seis términos de la sucesión $\{(n-1)/n\}$. Escribir un segundo programa que trace la gráfica de esta sucesión y compararla con lo que se ve en la figura 2.

EJEMPLO 2 *Escritura de los primeros términos de una sucesión*

Escribir los primeros seis términos de la sucesión siguiente y trazar su gráfica.

$$\{b_n\} = \left\{(-1)^{n-1}\left(\frac{2}{n}\right)\right\}$$

FIGURA 3



Solución

$$b_1 = 2$$
$$b_2 = -1$$
$$b_3 = \frac{2}{3}$$
$$b_4 = -\frac{1}{2}$$
$$b_5 = \frac{2}{5}$$
$$b_6 = -\frac{1}{3}$$

Véase la figura 3.

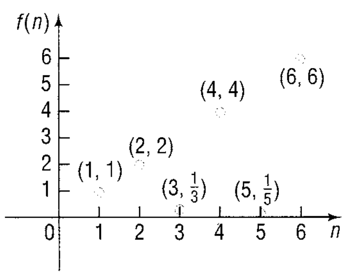
EJEMPLO 3 *Escritura de los primeros términos de una sucesión*

Escribir los primeros seis términos de la sucesión siguiente y trazar su gráfica.

$$\{c_n\} = \left\{\begin{matrix} n & \text{si } n \text{ es par} \\ 1/n & \text{si } n \text{ es impar} \end{matrix}\right\}$$

Solución

FIGURA 4



$$c_1 = 1$$
$$c_2 = 2$$
$$c_3 = \frac{1}{3}$$
$$c_4 = 4$$
$$c_5 = \frac{1}{5}$$
$$c_6 = 6$$

Véase la figura 4.

Ahora resuelva los problemas 3 y 5.

Algunas veces una sucesión se indica por un patrón observado en los primeros términos, lo que hace posible inferir la forma del n-ésimo término. En el ejemplo siguiente, se da un número suficiente de términos de modo que sugiera una elección natural para el n-ésimo término.

EJEMPLO 4 *Determinación de una sucesión a partir de un patrón*

(a) $e, \frac{e^2}{2}, \frac{e^3}{3}, \frac{e^4}{4}, \ldots \qquad a_n = \frac{e^n}{n}$

(b) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots \qquad b_n = \frac{1}{3^{n-1}}$

(c) $1, 3, 5, 7, \ldots$ $\qquad c_n = 2n - 1$

(d) $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$ $\qquad d_n = n^2$

(e) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ $\qquad e_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}\right)$

En la sucesión $\{e_n\}$ del ejemplo 4(c), obsérvese que los signos de los términos **alternan.** Cuando ocurre esto, usamos factores tales como $(-1)^{n+1}$, que es igual a 1 si n es impar e igual a -1 si n es par, o bien $(-1)^n$, que es igual a -1 si n es impar e igual a 1 si n es par.

Ahora resuelva el problema 13.

El símbolo de factorial

Símbolo de factorial, *n*!

Si $n \geq 0$ es un entero, el **símbolo de factorial *n*!** se define como sigue:

$$0! = 1 \qquad 1! = 1$$

$$n! = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \qquad \text{si } n \geq 2$$

Por ejemplo, $2! = 2 \cdot 1 = 2$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, y así sucesivamente. La tabla 1 enlista los valores de $n!$ para $0 \leq n \leq 6$.

TABLA 1

n	0	1	2	3	4	5	6
$n!$	1	1	2	6	24	120	720

Ya que

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

podemos usar la fórmula

$$n! = n(n-1)!$$

para encontrar factoriales sucesivos. Por ejemplo, ya que $6! = 720$, tenemos

$$7! = 7 \cdot 6! = 7(720) = 5040$$

y

$$8! = 8 \cdot 7! = 8(5040) = 40{,}320$$

Comentario: Su calculadora puede tener una tecla para el factorial. Úsela para ver qué tan rápido aumenta el valor del factorial. Encuentre el valor de 69! ¿Qué sucede cuando trata de encontrar 70!? En realidad, 70! es mayor que 10^{100} (un *googol*), el número más grande que la mayoría de las calculadoras puede mostrar.

Fórmulas recursivas

Una segunda forma de definir una sucesión es asignando un valor al primer término (o primeros términos), y especificando el n-ésimo término por una fórmula o ecuación que involucre uno o más de los términos que le preceden. Las sucesiones que están definidas de esta manera se dice que están definidas **recursivamente,** y la regla o fórmula es llamada **fórmula recursiva.**

EJEMPLO 5 *Escritura de los términos de una sucesión definida de manera recursiva*

Escribir los primeros cinco términos de la sucesión siguiente definida recursivamente.

$$s_1 = 1, \qquad s_n = 4s_{n-1}$$

Solución El primer término es $s_1 = 1$. Para obtener el segundo término, usamos $n = 2$ en la fórmula para obtener $s_2 = 4s_1 = 4 \cdot 1 = 4$. Para obtener el tercer término, usamos $n = 3$ en la fórmula para obtener $s_3 = 4s_2 = 4 \cdot 4 = 16$. Para obtener un término nuevo se requiere que conozcamos el valor del término precedente. Los primeros cinco términos son

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= 4 \cdot 1 = 4 \\ s_3 &= 4 \cdot 4 = 16 \\ s_4 &= 4 \cdot 16 = 64 \\ s_5 &= 4 \cdot 64 = 256 \end{aligned}$$

EJEMPLO 6 *Escritura de los términos de una sucesión definida recursivamente*

Escribir los primeros cinco términos de la sucesión siguiente definida de manera recursiva,

$$u_1 = 1, \qquad u_2 = 1, \qquad u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$$

Solución Se nos dan los primeros dos términos. Para obtener el tercer término necesitamos conocer cada uno de los dos términos anteriores. Así,

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 \\ u_2 &= 1 \\ u_3 &= u_1 + u_2 = 2 \\ u_4 &= u_2 + u_3 = 1 + 2 = 3 \\ u_5 &= u_3 + u_4 = 2 + 3 = 5 \end{aligned}$$

La sucesión definida en el ejemplo 6 es llamada **sucesión de Fibonacci,** y los términos de esta sucesión son llamados **números de Fibonacci**. Estos números aparecen en una amplia variedad de aplicaciones (*véanse* los problemas 55 y 56).

EJEMPLO 7 *Escritura de los términos de una sucesión definida recursivamente*

Escribir los primeros cinco términos de la sucesión siguiente definida de manera recursiva.

$$f_1 = 1, \qquad f_{n+1} = (n + 1)f_n$$

Solución Aquí

$$
\begin{aligned}
f_1 &= 1 \\
f_2 &= 2f_1 = 2 \cdot 1 = 2 \\
f_3 &= 3f_2 = 3 \cdot 2 = 6 \\
f_4 &= 4f_3 = 4 \cdot 6 = 24 \\
f_5 &= 5f_4 = 5 \cdot 24 = 120
\end{aligned}
$$

Debe reconocer el n-ésimo término de la sucesión del ejemplo 7 como $n!$

Ahora resuelva los problemas 21 y 29.

Suma de los primeros n términos de una sucesión; notación de sumatoria

Con frecuencia es importante poder determinar la suma de los primeros n términos de una sucesión $\{a_n\}$, es decir,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdot \cdot \cdot + a_n \tag{1}$$

Sin embargo, en lugar de escribir todos los términos, introducimos una forma más concisa de expresar esta suma, llamada **notación de sumatoria.** Usando la notación de sumatoria, escribimos la suma (1) como

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdot \cdot \cdot + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

El símbolo $\sum$ (una versión estilizada de la letra griega sigma) sólo significa la instrucción para sumar, o añadir, los términos. El entero k es llamado **índice** de la suma; indica dónde iniciar la suma y dónde terminarla. Por lo tanto, la expresión

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \tag{2}$$

es una instrucción para sumar los términos a_k de la sucesión $\{a_n\}$ desde $k = 1$ hasta $k = n$. La expresión (2) la leemos como "la suma de a_k desde $k = 1$ hasta $k = n$."

EJEMPLO 8 *Ampliación de la notación de sumatoria*

Escribir cada suma

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!$

Solución (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdot \cdot \cdot + \frac{1}{n}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! = 1! + 2! + \cdot \cdot \cdot + n!$

Expresar cada suma usando la notación de sumatoria.

(a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ (b) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$

(a) La suma $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ tiene n términos, cada uno de la forma k^2, inicia en $k = 1$ y termina en $k = n$. De este modo,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

(b) La suma

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

tiene n términos, cada uno de la forma $1/2^{k-1}$, inicia en $k = 1$ y termina en $k = n$. Así,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$$

El índice de la sumatoria no siempre necesita empezar en 1 ni terminar en n; por ejemplo,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

En lugar de k pueden ser utilizadas otras letras como índice. Por ejemplo,

$$\sum_{j=1}^{n} j! \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} i!$$

cada una representa la misma suma que la dada en el ejemplo 8(b).

Ahora resuelva los problemas 37 y 47.

A continuación enlistamos algunas propiedades de las sucesiones usando notación de sumatoria.

Teorema
Propiedades de las sucesiones

Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son dos sucesiones y c es un número real, entonces

1. $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$

2. $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

3. $\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$

4. $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{j} a_k + \sum_{k=j+1}^{n} a_k$, cuando $1 < j < n$

Aunque no demostraremos estas propiedades, las demostraciones están basadas en las propiedades de los números reales.

Ejercicio 11.1

En los problemas 1 al 12, escriba los primeros cinco términos de cada sucesión.

1. $\{n\}$ **2.** $\{n^2 + 1\}$ **3.** $\left\{\dfrac{n}{n+2}\right\}$ **4.** $\left\{\dfrac{2n+1}{2n}\right\}$

5. $\{(-1)^{n+1}n^2\}$ **6.** $\left\{(-1)^{n-1}\left(\dfrac{n}{2n-1}\right)\right\}$ **7.** $\left\{\dfrac{2^n}{3^n+1}\right\}$ **8.** $\left\{\left(\dfrac{4}{3}\right)^n\right\}$

9. $\left\{\dfrac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}\right\}$ **10.** $\left\{\dfrac{3^n}{n}\right\}$ **11.** $\left\{\dfrac{n}{e^n}\right\}$ **12.** $\left\{\dfrac{n^2}{2^n}\right\}$

En los problemas del 13 al 20 el patrón dado continúa. Escriba el enésimo término de cada sucesión sugerida por el patrón.

13. $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots$ **14.** $\dfrac{1}{1\cdot 2}, \dfrac{1}{2\cdot 3}, \dfrac{1}{3\cdot 4}, \dfrac{1}{4\cdot 5}, \ldots$ **15.** $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \ldots$

16. $\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{9}, \dfrac{8}{27}, \dfrac{16}{81}, \ldots$ **17.** $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ **18.** $1, \dfrac{1}{2}, 3, \dfrac{1}{4}, 5, \dfrac{1}{6}, 7, \dfrac{1}{8}, \ldots$

19. $1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots$ **20.** $2, -4, 6, -8, 10, \ldots$

En los problemas del 21 al 34 se define una sucesión de manera recursiva. Escriba los primeros cinco términos.

21. $a_1 = 2;\ a_{n+1} = 3 + a_n$

22. $a_1 = 3;\ a_{n+1} = 4 - a_n$

23. $a_1 = -2;\ a_{n+1} = n + a_n$

24. $a_1 = 1;\ a_{n+1} = n - a_n$

25. $a_1 = 5;\ a_{n+1} = 2a_n$

26. $a_1 = 2;\ a_{n+1} = -a_n$

27. $a_1 = 3;\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n}$

28. $a_1 = -2;\ a_{n+1} = n + 3a_n$

29. $a_1 = 1;\ a_2 = 2;\ a_{n+2} = a_n a_{n+1}$

30. $a_1 = -1;\ a_2 = 1;\ a_{n+2} = a_{n+1} + na_n$

31. $a_1 = A;\ a_{n+1} = a_n + d$

32. $a_1 = A;\ a_{n+1} = ra_n,\ r \neq 0$

33. $a_1 = \sqrt{2};\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$

34. $a_1 = \sqrt{2};\ a_{n+1} = \sqrt{a_n/2}$

En los problemas del 35 al 44 escriba en forma desarrollada cada suma.

35. $\sum_{k=1}^{n} (k+2)$ **36.** $\sum_{k=1}^{n} (2k+1)$ **37.** $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{2}$ **38.** $\sum_{k=1}^{n} (k+1)^2$

39. $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{3^k}$ **40.** $\sum_{k=0}^{n} \left(\dfrac{3}{2}\right)^k$ **41.** $\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{3^{k+1}}$ **42.** $\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)$

43. $\sum_{k=2}^{n} (-1)^k \ln k$ **44.** $\sum_{k=3}^{n} (-1)^{k+1} 2^k$

En los problemas del 45 al 54 exprese cada suma usando la notación de sumatoria.

45. $1 + 2 + 3 + \cdots + n$

46. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$

47. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} + \cdots + \dfrac{n}{n+1}$

48. $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1)$

49. $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27} + \cdots + (-1)^n\left(\dfrac{1}{3^n}\right)$

50. $\dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{9} + \dfrac{8}{27} - \cdots + (-1)^{n+1}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

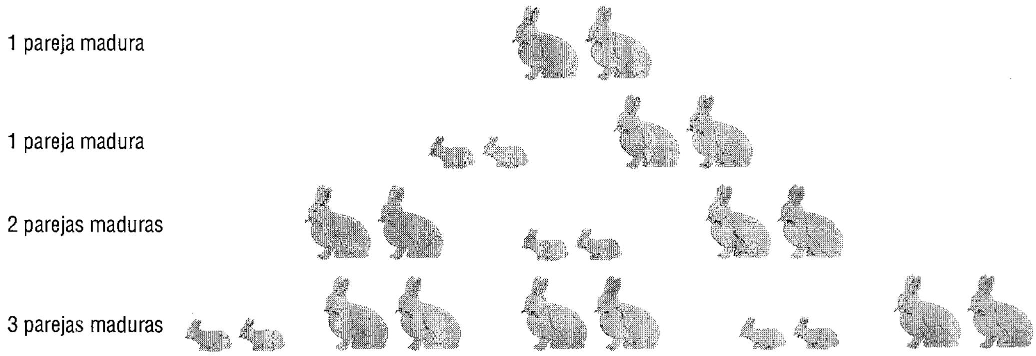
51. $3 + \dfrac{3^2}{2} + \dfrac{3^3}{3} + \cdots + \dfrac{3^n}{n}$

52. $\dfrac{1}{e} + \dfrac{2}{e^2} + \dfrac{3}{e^3} + \cdots + \dfrac{n}{e^n}$

53. $a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + (a + nd)$

54. $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$

55. *Crecimiento de una colonia de conejos.* Una colonia de conejos empieza con una pareja de conejos maduros, la cual procreará una pareja de descendientes (un macho y una hembra) cada mes. Suponga que todos los conejos maduran en 1 mes y procrean una pareja de descendientes (un macho y una hembra) después de 2 meses. Si ningún conejo muere, ¿cuántas parejas de conejos maduros habrá dentro de 7 meses? [*Sugerencia:* Una sucesión de Fibonacci modela esta colonia. ¿Advierte por qué?]



56. *Sucesión de Fibonacci.* Defina con

$$u_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$$

al n-ésimo término de una sucesión.

(a) Demuestre que $u_1 = 1$ y $u_2 = 1$. (b) Demuestre que $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
(c) Llegue a la conclusión de que $\{u_n\}$ es una sucesión de Fibonacci.

En los problemas 57 y 58, usamos el hecho de que en lenguajes de programación es posible tener una función, o una subrutina, que pueda llamarse a sí misma.

57. *Ejercicio de programación.* Escriba un programa que acepte como entrada números enteros e imprima el número y su factorial. Utilice una función definida de manera recursiva; esto es, una función que se llame a sí misma.

58. *Ejercicio de programación.* Escriba un programa que acepte como entrada un entero positivo N y resulte el N-ésimo número de Fibonacci. Use una subrutina definida de manera recursiva.

59. Divida el siguiente arreglo triangular (llamado triángulo de Pascal) usando líneas diagonales como se muestra. Encuentre la suma de los números en cada uno de estos renglones diagonales. ¿Reconoce esta sucesión?

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

60. Investigue varias aplicaciones que lleven a una sucesión de Fibonacci. Escriba un ensayo acerca de dichas aplicaciones.

11.2 Sucesiones aritméticas

Cuando la diferencia entre términos consecutivos de una sucesión siempre es el mismo número, la sucesión es llamada **aritmética.** Así, una sucesión aritmética* puede ser definida de manera recursiva como $a_1 = a$, $a_{n+1} - a_n = d$, o como

Sucesión artimética

$$a_1 = a, \qquad a_{n+1} = a_n + d \tag{1}$$

donde $a = a_1$ y d son números reales. El número a es el primer término, y el número d es llamado **diferencia común.**

Así, los términos de una sucesión aritmética con primer término d y diferencia común d siguen el patrón

$$a, \quad a + d, \quad a + 2d, \quad a + 3d, \quad \ldots$$

EJEMPLO 1 *Determinar si una sucesión es aritmética*

La sucesión

$$4, 7, 10, 13, \ldots$$

es aritmética ya que la diferencia entre términos sucesivos es 3. El primer término es 4, y la diferencia común es 3.

EJEMPLO 2 *Determinar si una sucesión es aritmética*

Demostrar que la sucesión siguiente es aritmética. Encuentre el primer término y la diferencia común.

$$\{s_n\} = \{3n + 5\}$$

Solución El primer término es $s_1 = 3 \cdot 1 + 5 = 8$. El $(n + 1)$ésimo y el n-ésimo términos de la sucesión $\{s_n\}$ son

$$s_{n+1} = 3(n + 1) + 5 = 3n + 8 \quad \text{y} \quad s_n = 3n + 5$$

Su diferencia es

$$s_{n+1} - s_n = (3n + 8) - (3n + 5) = 8 - 5 = 3$$

Así, la diferencia de dos términos sucesivos no depende de n; la diferencia común es 3, y la sucesión es aritmética.

EJEMPLO 3 *Determinar si una sucesión es aritmética*

Demostrar que la sucesión siguiente es aritmética. Encuentre el primer término y la diferencia común.

$$\{t_n\} = \{4 - n\}$$

Solución El primer término es $t_1 = 4 - 1 = 3$. Los términos $(n + 1)$ y n-ésimo son

$$t_{n+1} = 4 - (n + 1) = 3 - n \quad \text{y} \quad t_n = 4 - n$$

*Algunas veces llamada **progresión aritmética.**

Su diferencia es

$$t_{n+1} - t_n = (3 - n) - (4 - n) = 3 - 4 = -1$$

La diferencia de dos términos sucesivos no depende de n; siempre es igual al mismo número, -1. De aquí que $\{t_n\}$ sea una sucesión aritmética cuya diferencia común es -1.

Ahora resuelva el problema 3.

Suponga que a es el primer término de una sucesión aritmética cuya diferencia común es d. Buscamos una fórmula para el n-ésimo término, a_n. Para ver el patrón, escribimos los primeros términos:

$$\begin{aligned}
a_1 &= a + 0 \cdot d \\
a_2 &= a + d = a + 1 \cdot d \\
a_3 &= a_2 + d = (a + d) + d = a + 2 \cdot d \\
a_4 &= a_3 + d = (a + 2 \cdot d) + d = a + 3 \cdot d \\
a_5 &= a_4 + d = (a + 3 \cdot d) + d = a + 4 \cdot d \\
&\vdots \\
a_n &= a_{n-1} + d = [a + (n - 2)d] + d = a + (n - 1)d
\end{aligned}$$

Esto nos conduce al enunciado siguiente:

Para una sucesión aritmética $\{a_n\}$ cuyo primer término es a y cuya diferencia es d, el n-ésimo término está determinado por la fórmula

n-ésimo término de una sucesión aritmética

$$a_n = a + (n - 1)d \qquad (2)$$

Encuentre el 13 término de la sucesión aritmética 2, 6, 10, 14, 18, ...

El primer término de esta sucesión aritmética es $a = 2$, y la diferencia común es 4. Por la fórmula (2), el n-ésimo término es

$$a_n = 2 + (n - 1)4$$

De aquí que el decimotercer término sea

$$a_{13} = 2 + 12 \cdot 4 = 50$$

Exploración: Escribir un programa que encuentre el decimotercer término de la sucesión dada en el ejemplo 4. Úsela para encontrar el vigésimo y el quincuagésimo términos.

El octavo término de una sucesión aritmética es 75 y el vigésimo es 39. Encuentre el primer término y la diferencia común. Dé una fórmula recursiva para la sucesión.

Por la ecuación (2), sabemos que

$$\begin{cases} a_8 = a + 7d = 75 \\ a_{20} = a + 19d = 39 \end{cases}$$

Este es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que puede resolverse por eliminación. Restando la segunda ecuación de la primera, obtenemos

$$\begin{aligned} -12d &= 36 \\ d &= -3 \end{aligned}$$

Con $d = -3$, encontramos $a = 75 - 7d = 75 - 7(-3) = 96$. Una fórmula recursiva para esta sucesión es

$$a_1 = 96, \qquad a_{n+1} = a_n - 3$$

Con base en la fórmula (2), una fórmula para el n-ésimo término de la sucesión $\{a_n\}$ del ejemplo 5 es

$$a_n = a + (n - 1)d = 96 + (n - 1)(-3) = 99 - 3n$$

Ahora resuelva los problemas 19 y 25.

Suma de los primeros *n* términos de una sucesión aritmética

El enunciado siguiente nos da una fórmula para encontrar la suma de los primeros n términos de una sucesión aritmética.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión aritmética con primer término a y diferencia común d. La suma S_n de los primeros n términos de $\{a_n\}$ es

Suma de n-términos de una sucesión aritmética

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d] = \frac{n}{2}(a + a_n) \tag{3}$$

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ &= a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + [a + (n - 1)d] \\ &= (a + a + \cdots + a) + [d + 2d + \cdots + (n - 1)d] \\ &= na + d[1 + 2 + \cdots + (n - 1)] \\ &= na + d\left[\frac{(n - 1)n}{2}\right] \\ &= na + \frac{n}{2}(n - 1)d \\ &= \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d] \\ &= \frac{n}{2}[a + a + (n - 1)d] \\ &= \frac{n}{2}(a + a_n) \end{aligned}$$

La fórmula (3) proporciona dos maneras de encontrar la suma de los primeros n términos de una sucesión aritmética. Observe que una involucra al primer término y la diferencia común, mientras que la otra involucra al primero y al n-ésimo término. Use la que resulte más sencilla, según el caso.

EJEMPLO 6 *Determinación de la suma de n términos en una sucesión aritmética*

Encontrar la suma S_n de los primeros n términos de la sucesión $\{3n + 5\}$; esto es, encontrar

$$8 + 11 + 14 + \cdots + (3n + 5)$$

Solución La sucesión $\{3n + 5\}$ es una sucesión aritmética con primer término $a = 8$ y n-ésimo término $(3n + 5)$. Para encontrar la suma S_n usamos la fórmula (3):

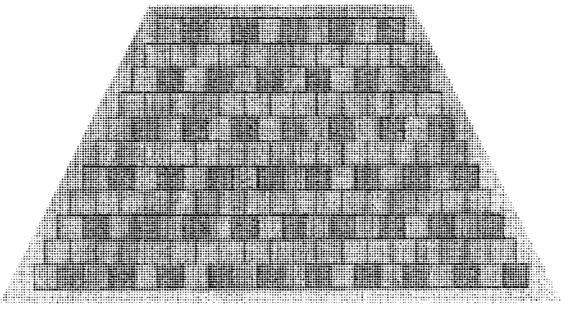
$$S_n = \frac{n}{2}(a + a_n) = \frac{n}{2}[8 + (3n + 5)] = \frac{n}{2}(3n + 13)$$

Ahora resuelva el problema 33.

EJEMPLO 7 *Creación de un diseño para el piso*

Un piso de mosaico de cerámica está diseñado en forma de trapecio, con 20 pies de ancho en la base y 10 pies de ancho en la parte superior. *Véase* la figura 5. Los mosaicos, de 12 por 12 pulgadas, serán colocados de modo que cada fila sucesiva tenga un mosaico menos que la anterior. ¿Cuántos mosaicos se necesitarán?

FIGURA 5



Solución La fila inferior requiere de 20 mosaicos y la fila superior de 10. Ya que cada fila sucesiva requiere de un mosaico menos, el número total de mosaicos necesarios es

$$S = 20 + 19 + 18 + \cdots + 11 + 10$$

Esta es la suma de una sucesión aritmética; la diferencia común es -1. El número de términos sumados es $n = 11$, con el primer término $a = 20$ y el último $a_{11} = 10$. La suma S es

$$S = \frac{n}{2}(a + a_{11}) = \frac{11}{2}(20 + 10) = 165$$

Así, se necesitarán 165 mosaicos.

11.2

Ejercicio 11.2

En los problemas del 1 al 10 se da una sucesión aritmética. Encuentre la diferencia común y escriba los primeros cuatro términos.

1. $\{n + 4\}$ **2.** $\{n - 5\}$ **3.** $\{2n - 5\}$ **4.** $\{3n + 1\}$ **5.** $\{6 - 2n\}$

6. $\{4 - 2n\}$ **7.** $\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}n\right\}$ **8.** $\left\{\frac{2}{3} + \frac{n}{4}\right\}$ **9.** $\{\ln 3^n\}$ **10.** $\{e^{\ln n}\}$

En los problemas del 11 al 18, encuentre el enésimo término de la sucesión aritmética cuyo término inicial a *y diferencia común* d *están dados. ¿Cuál es el quinto término?*

11. $a = 2; d = 3$

12. $a = -2; d = 4$

13. $a = 5;\ d = -3$

14. $a = 6; d = -2$

15. $a = 0; d = \frac{1}{2}$

16. $a = 1;\ d = -\frac{1}{3}$

17. $a = \sqrt{2}; d = \sqrt{2}$

18. $a = 0; d = \pi$

En los problemas del 19 al 24 encuentre el término indicado en cada sucesión aritmética.

19. Duodécimo término de $2, 4, 6, \ldots$

20. Octavo término de $-1, 1, 3, \ldots$

21. Décimo término de $1, -2, -5, \ldots$

22. Noveno término de $5, 0, -5, \ldots$

23. Octavo término de $a, a + b, a + 2b, \ldots$

24. Séptimo término de $2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}, 6\sqrt{5}, \ldots$

En los problemas del 25 al 32, encuentre el primer término y la diferencia común de la sucesión aritmética descrita. Dé una fórmula recursiva para la sucesión.

25. El octavo término es 8, el vigésimo 44.

26. El cuarto término es -5, el vigésimo 35.

27. El noveno término es -5, el decimoquinto 31.

28. El octavo término es 4, el decimoctavo -96

29. El decimoquinto término es 0, el cuadragésimo -50

30. El quinto término es -2, el decimotercero 30.

31. El decimocuarto término es -1, el decimoctavo -9.

32. El duodécimo término es 4, el decimoctavo 28.

En los problemas del 33 al 40 encuentre la suma.

33. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$

34. $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n$

35. $7 + 12 + 17 + \cdots + (2 + 5n)$

36. $-1 + 3 + 7 + \cdots + (4n - 5)$

37. $2 + 4 + 6 + \cdots + 70$

38. $1 + 3 + 5 + \cdots + 59$

39. $5 + 9 + 13 + \cdots + 49$

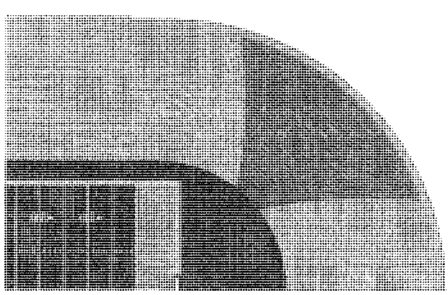
40. $2 + 5 + 8 + \cdots + 41$

41. Encuentre x de modo que $x + 3$, $2x + 1$, y $5x + 2$ sean términos consecutivos de una sucesión aritmética.

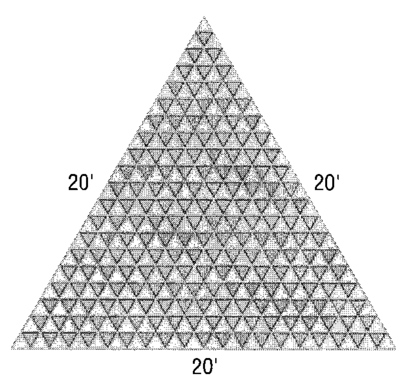
42. Encuentre x de modo que $2x$, $3x + 2$, y $5x + 3$ sean términos consecutivos de una sucesión aritmética.

43. *Teatro Drury Lane.* El teatro Drury Lane tiene 25 butacas en la primera fila y 30 filas en total. Cada fila sucesiva tiene una butaca adicional. ¿Cuántas butacas hay en total en dicho teatro?

44. *Estadio de fútbol.* La sección de una esquina en un estadio de fútbol tiene 15 asientos en la primera fila y 40 filas en total. Cada fila sucesiva tiene dos asientos adicionales. ¿Cuántos asientos hay en esa sección?



45. *Creación de un mosaico.* Un piso de mosaicos está diseñado en forma de triángulo equilátero de 20 pies por lado. Cada mosaico tiene la forma de un triángulo equilátero de 12 pulgadas por lado. Los mosaicos se alternan en color como se muestra en la ilustración. ¿Cuántos mosaicos de cada color se necesitarán para llevar a cabo el proyecto?



46. *Construcción de una escalera de ladrillos.* Se va a construir una escalera de ladrillos de 30 escalones. El escalón inferior requiere de 100 ladrillos y cada escalón sucesivo necesita dos menos que el inmediato anterior.

(a) ¿Cuántos ladrillos se necesitan para el escalón superior?
(b) ¿Cuántos para construir la escalera?

47. Construya una sucesión aritmética. Désela a un compañero y pregúntele por su vigésimo término.

Sucesiones geométricas; series geométricas

Cuando la razón de dos términos sucesivos de una sucesión siempre es el mismo número diferente de cero, la sucesión es llamada **geométrica.** Así, una sucesión geométrica* puede ser definida de manera recursiva como $a_1 = a$, $a_{n+1} / a_n = r$, o como

Sucesiones geométricas

$$a_1 = a, \qquad a_{n+1} = ra_n \tag{1}$$

donde $a_1 = a$ y $r \neq 0$ son números reales. El número a es el primer término, y el número r diferente de cero es llamado **razón común.**

De modo que los términos de una sucesión geométrica con primer término a y razón común r siguen el patrón

$$a, \ ar, \ ar^2, \ ar^3, \ \ldots$$

EJEMPLO 1 *Determinar si una sucesión es geométrica*

La sucesión

$$2, 6, 18, 54, 162, \ldots$$

es geométrica ya que la razón de términos sucesivos es 3. El primer término es 2 y la razón común 3.

EJEMPLO 2 *Determinar si una sucesión es geométrica*

Demostrar que la siguiente sucesión es geométrica. Encontrar el primer término y la razón común.

$$\{s_n\} = 2^{-n}$$

Solución El primer término es $s_1 = 2^{-1} = \frac{1}{2}$. Los términos $(n + 1)$ y n de la sucesión $\{s_n\}$ son

$$s_{n+1} = 2^{-(n+1)} \quad \text{y} \quad s_n = 2^{-n}$$

Su razón es

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{2^{-(n+1)}}{2^{-n}} = 2^{-n-1+n} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

Ya que la razón de términos sucesivos es un número diferente de cero independiente de n, la sucesión $\{s_n\}$ es geométrica con razón común $\frac{1}{2}$.

*Algunas veces llamada **progresión matemática.**

EJEMPLO 3 *Determinar si una sucesión es geométrica*

Demostrar que la sucesión siguiente es geométrica. Encontrar el primer término y la razón común.

$$\{t_n\} = \{4^n\}$$

Solución El primer término es $t_1 = 4^1 = 4$. Los términos $(n + 1)$ y n son

$$t_{n+1} = 4^{n+1} \quad \text{y} \quad t_n = 4^n$$

Su razón es

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{4^{n+1}}{4^n} = 4$$

Así, $\{t_n\}$ es una sucesión geométrica con razón común 4.

Ahora resuelva el problema 3.

Suponga que a es el primer término de una sucesión geométrica con razón común $r \neq 0$. Buscamos una fórmula para el n-ésimo término a_n. Para ver el patrón escribimos los primeros términos:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 \cdot a = ar^0 \\
a_2 &= ra = ar^1 \\
a_3 &= ra_2 = r(ar) = ar^2 \\
a_4 &= ra_3 = r(ar^2) = ar^3 \\
a_5 &= ra_4 = r(ar^3) = ar^4 \\
&\vdots \\
a_n &= ra_{n-1} = r(ar^{n-2}) = ar^{n-1}
\end{aligned}$$

Esto nos conduce al enunciado siguiente:

Teorema Para una sucesión geométrica $\{a_n\}$ cuyo primer término es a y cuya razón común es r, el n-ésimo término está determinado por la fórmula

n-ésimo término de una sucesión geométrica

$$a_n = ar^{n-1}, \qquad r \neq 0 \tag{2}$$

EJEMPLO 4 *Determinación de un término particular en una sucesión geométrica*

Determinar el noveno término de la sucesión geométrica $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \ldots$.

Solución El primer término de esta sucesión geométrica es $a = 2$, y la razón común es $\frac{1}{3}$. (Usar $\frac{2}{3}/2 = \frac{1}{3}$, o $\frac{2}{9}/\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, o cualesquiera dos términos sucesivos.) Por la fórmula (2), el n-ésimo término es

$$a_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

De aquí que el noveno término sea

$$a_9 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^8 = \frac{2}{3^8} = \frac{2}{6561} \approx 0.0003$$

Exploración: Escriba un programa que encuentre el noveno término de la sucesión dada en el ejemplo 4. Úselo para encontrar el vigésimo y el quincuagésimo términos.

Ahora resuelva los problemas 25 y 33.

Suma de los primeros n términos de una sucesión geométrica

El enunciado siguiente nos da una fórmula para encontrar la suma de los primeros n términos de una sucesión geométrica.

Teorema Sea $\{a_n\}$ una sucesión geométrica con primer término a y razón común r. La suma S_n de los primeros n términos de $\{a_n\}$ es

Suma de los primeros n términos de una sucesión geométrica

$$S_n = a\frac{1 - r^n}{1 - r}, \qquad r \neq 0, 1 \tag{3}$$

Demostración

$$S_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1} \tag{4}$$

Multiplicar cada lado por r para obtener

$$rS_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^n \tag{5}$$

Ahora, restar (5) de (4). El resultado es

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$
$$(1 - r)S_n = a(1 - r^n)$$

Como $r \neq 1$, podemos resolver para S_n:

$$S_n = a\frac{1 - r^n}{1 - r}$$

EJEMPLO 5 *Determinación de la suma de n términos en una sucesión geométrica*

Encontrar la suma S_n de los primeros n términos de la sucesión $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$; esto es, encontrar

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Solución La sucesión $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ es una sucesión geométrica con $a = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1}{2}$. La suma S_n que buscamos es la suma de los primeros n términos de la sucesión, de modo que usamos la fórmula (3) para obtener

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Ahora resuelva el problema 39.

Series geométricas

Serie geométrica infinita

Una suma infinita de la forma

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

con primer término a y razón común r, es llamada **serie geométrica infinita** y se denota por

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$$

Con base en la fórmula (3), la suma S_n de los primeros n términos de una serie geométrica es

$$S_n = a\frac{1-r^n}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r} \qquad (6)$$

Si esta suma finita S_n se aproxima a un número L cuando $n \to \infty$, entonces llamamos a L **la suma de la serie geométrica infinita,** y escribimos

$$L = \sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$$

Teorema Si $|r| < 1$, la suma de la serie geométrica $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$ es

Suma de una serie geométrica infinita

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = \frac{a}{1-r}} \qquad (7)$$

Prueba intuitiva Ya que $|r| < 1$, se deduce que $|r^n|$ se aproxima a 0 cuando $n \to \infty$. Entonces, con base en la fórmula (6), la suma S_n se aproxima a $a/(1-r)$ cuando $n \to \infty$.

EJEMPLO 6 *Determinación de la suma de una serie geométrica*

Encontrar la suma de la serie geométrica $2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \cdots$.

Solución El primer término es $a = 2$ y la razón común es

$$r = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Ya que $|r| < 1$, usamos la fórmula (7) para encontrar que

$$2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \cdots = \frac{2}{1-\frac{2}{3}} = 6$$

Ahora resuelva el problema 45.

EJEMPLO 7 *Decimales que se repiten*

Demostrar que el decimal repetido 0.999... es igual a 1.

Solución

$$0.999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots$$

Así, 0.999... es una serie geométrica con primer término $\frac{9}{10}$ y razón común $\frac{1}{10}$. De aquí que,

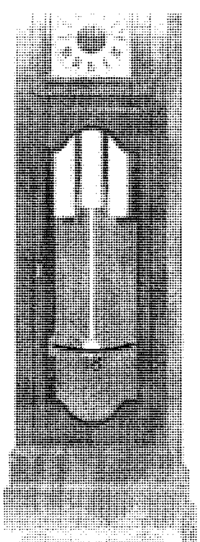
$$0.999\ldots = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1$$

EJEMPLO 8 *Péndulo*

Un péndulo oscila describiendo inicialmente un arco de 18 pulgadas. En cada oscilación sucesiva, la longitud del arco es 0.98 de la longitud anterior

(a) ¿Cuál es la longitud del arco después de 10 oscilaciones?
(b) ¿En que oscilación la longitud del arco es por primera vez menor de 12 pulgadas?
(c) Después de 15 oscilaciones, ¿cuál es la longitud total que ha oscilado el péndulo?
(d) Cuando se detiene, ¿cuál es la longitud total que ha oscilado el péndulo?

Solución



(a) La longitud de la primera oscilación mide 18 pulgadas. La de la segunda oscilación es de 0.98(18) pulgadas; la longitud de la tercera oscilación es de $0.98(0.98)(18) = 0.98^2(18)$ pulgadas. La longitud de arco de la décima oscilación es

$$(0.98)^9(18) = 15.007 \text{ pulgadas}$$

(b) La longitud de arco de la enésima oscilación es $(0.98)^{n-1}(18)$. Para que esto sea exactamente 12 pulgadas se necesita

$$(0.98)^{n-1}(18) = 12$$
$$(0.98)^{n-1} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$
$$n - 1 = \log_{0.98}\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$n = 1 + \frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{\ln 0.98} = 1 + 20.07 = 21.07$$

La longitud del arco excede las 12 pulgadas en la vigésimo primera oscilación, y la primera oscilación menor de 12 pulgadas es la vigésimo segunda.

(c) Después de 15 oscilaciones, el péndulo habrá oscilado la longitud total siguiente L:

$$L = \underset{1o.}{18} + \underset{2o.}{0.98(18)} + \underset{3o.}{(0.98)^2(18)} + \underset{4o.}{(0.98)^3(18)} + \cdots + \underset{15o.}{(0.98)^{14}(18)}$$

Esta es la suma de una sucesión geométrica. La razón común es 0.98; el primer término es 18. La suma tiene 15 términos, de modo que

$$L = 18\,\frac{1 - 0.98^{15}}{1 - 0.98} = 18(13.07) = 235.29 \text{ pulgadas}$$

Después de 15 oscilaciones el péndulo habrá oscilado una longitud de 235.29 pulgadas.

(d) Cuando el péndulo se detenga habrá oscilado la siguiente longitud total T:

$$T = 18 + 0.98(18) + (0.98)^2(18) + (0.98)^3(18) + \cdots$$

Esta es la suma de una serie geométrica. La razón común es $r = 0.98$; el primer término es $a = 18$. La suma es

$$T = \frac{a}{1 - r} = \frac{18}{1 - 0.98} = 900$$

Cuando finalmente se detiene, el péndulo ha oscilado un total de 900 pulgadas.

DATO HISTÓRICO

■ Las sucesiones se cuentan entre los temas más antiguos de investigación matemática, han sido estudiadas durante más de 3500 años. Sin embargo, después de los pasos iniciales, se lograron pocos avances hasta alrededor del año 1600.

Las sucesiones aritméticas y geométricas aparecen en el papiro de Rhind, un texto matemático que contiene 85 problemas copiados alrededor de 1650 a. C., por el escriba egipcio Ahmes de un trabajo anterior (*véase* problema histórico 1). Fibonacci (1220 d. C.) escribió acerca de problemas semejantes a los del papiro de Rhind, lo cual nos lleva a sospechar que Fibonacci pudo haber dispuesto de material valioso que ahora está perdido. Este material habría estado basado en la tradición no euclidiana griega de Herón (alrededor de 75 d. C.) y Diofanto (alrededor de 250 d. C.). Un problema, nuevamente modificado un poco, sobrevive hasta nuestros días en el acertijo popular "Cuando iba a San Ives ..." (*Véase* el problema histórico 2.)

El papiro de Rhind indica que los egipcios sabían cómo sumar los términos de una sucesión aritmética y de una geométrica, igual que los babilonios. La regla para sumar una sucesión geométrica se encuentra en los *Elementos* de Euclides (libro IX, 35, 36) donde, al igual que toda el álgebra de Euclides, se presenta en forma geométrica.

Las investigaciones de otras clases de sucesiones empezaron en el siglo XVI, cuando el álgebra estaba lo suficientemente desarrollada como para manejar problemas más complicados. El desarrollo del cálculo en el siglo XVII añadió una herramienta muy poderosa, en especial para encontrar la suma de series infinitas; y la materia sigue floreciendo hoy en día. ■

PROBLEMAS HISTÓRICOS

■ 1. *Problema de una sucesión aritmética del papiro de Rhind (por claridad, el planteamiento ha sido modificado ligeramente)* Un ciento de piezas de pan es dividido entre cinco personas de modo que las cantidades distribuidas formen una sucesión aritmética. Las primeras dos personas, juntas, reciben un séptimo de lo que reciben las otras tres. ¿Cuánto recibe cada una? [*Respuesta parcial*: La primera persona recibe $1\frac{2}{3}$ de piezas de pan.]

2. La siguiente es una rima antigua para niños que se parece a uno de los problemas del papiro de Rhind:

   Cuando iba a San Ives
   Encontré a un hombre con siete esposas
   Cada esposa llevaba siete costales
   Cada costal tenía siete gatos
   Cada gato tenía siete gatitos
   Gatitos, gatos, costales y esposas
   ¿Cuántos iban a San Ives?

   (a) Si suponemos que el narrador y el criador de gatos se encuentran recorriendo direcciones opuestas, ¿cuál es la respuesta?
   (b) ¿Cuántos gatitos son transportados?
   (c) Gatitos, gatos, costales, esposas; ¿cuántos son? [*Sugerencia*: Es más fácil, si se incluye al hombre, encontrar la suma con la fórmula y luego restarle un 1 al resultado.] ■

Ejercicio 11.3

En los problemas del 1 al 10 se da una sucesión geométrica. Encuentre la razón y escriba los cuatro primeros términos.

1. $\{3^n\}$
2. $\{(-5)^n\}$
3. $\left\{-3\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$
4. $\left\{\left(\frac{5}{2}\right)^n\right\}$
5. $\left\{\frac{2^{n-1}}{4}\right\}$
6. $\left\{\frac{3^n}{9}\right\}$
7. $\{2^{n/3}\}$
8. $\{3^{2n}\}$
9. $\left\{\frac{3^{n-1}}{2^n}\right\}$
10. $\left\{\frac{2^n}{3^{n-1}}\right\}$

En los problemas del 11 al 24, determine si la sucesión dada es aritmética, geométrica o de ninguno de los dos tipos. Si la sucesión es aritmética, encuentre la diferencia común; si es geométrica, encuentre la razón común.

11. $\{n+2\}$
12. $\{2n-5\}$
13. $\{4n^2\}$
14. $\{5n^2+1\}$
15. $\left\{3-\frac{2}{3}n\right\}$
16. $\left\{8-\frac{3}{4}n\right\}$
17. $1, 3, 6, 10, \ldots$
18. $2, 4, 6, 8, \ldots$
19. $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$
20. $\left\{\left(\frac{5}{4}\right)^n\right\}$
21. $-1, -2, -4, -8, \ldots$
22. $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$
23. $\{3^{n/2}\}$
24. $\{(-1)^n\}$

En los problemas del 25 al 32, encuentre el quinto y el n-ésimo términos de la sucesión geométrica cuyo término inicial a *y razón común* r *están dados.*

25. $a = 2;\ r = 3$
26. $a = -2;\ r = 4$
27. $a = 5;\ r = -1$
28. $a = 6;\ r = -2$
29. $a = 0;\ r = \frac{1}{2}$
30. $a = 1;\ r = -\frac{1}{3}$
31. $a = \sqrt{2};\ r = \sqrt{2}$
32. $a = 0;\ r = 1/\pi$

En los problemas del 33 al 38 encuentre el término indicado de cada sucesión geométrica.

33. Séptimo término de $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$
34. Octavo término de $1, 3, 9, \ldots$
35. Noveno término de $1, -1, 1, \ldots$
36. Décimo término de $-1, 2, -4, \ldots$
37. Octavo término de $0.4, 0.04, 0.004, \ldots$
38. Séptimo término de $0.1, 1.0, 10.0, \ldots$

En los problemas del 39 al 44 encuentre la suma.

39. $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{2^2}{4}+\frac{2^3}{4}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{4}$
40. $\frac{3}{9}+\frac{3^2}{9}+\frac{3^3}{9}+\cdots+\frac{3^n}{9}$
41. $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k$
42. $\sum_{k=1}^{n} 4\cdot 3^{k-1}$
43. $-1-2-4-8-\cdots-(2^{n-1})$
44. $2+\frac{6}{5}+\frac{18}{25}+\cdots+2\left(\frac{3}{5}\right)^n$

En los problemas del 45 al 54 encuentre la suma de cada serie geométrica.

45. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots$
46. $2+\frac{4}{3}+\frac{8}{9}+\cdots$
47. $8+4+2+\cdots$
48. $6+2+\frac{2}{3}+\cdots$
49. $2-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}-\frac{1}{32}+\cdots$
50. $1-\frac{3}{4}+\frac{9}{16}-\frac{27}{64}+\cdots$

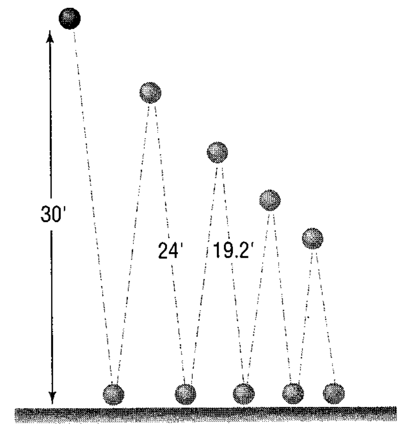
51. $\sum_{k=1}^{\infty} 5\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$ **52.** $\sum_{k=1}^{\infty} 8\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ **53.** $\sum_{k=1}^{\infty} 6\left(-\frac{2}{3}\right)^{k-1}$ **54.** $\sum_{k=1}^{\infty} 4\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

55. Encuentre x de modo que x, $x + 2$, y $x + 3$ sean los términos de una sucesión geométrica.

56. Encuentre x de modo que $x - 1$, x, y $x + 2$ sean los términos de una sucesión geométrica.

57. *Oscilación de un péndulo.* En el inicio, un péndulo oscila a lo largo de un arco de 2 pies. En cada oscilación sucesiva, la longitud del arco es 0.9 de la longitud anterior.

(a) ¿Cuál es la longitud del arco después de 10 oscilaciones?
(b) ¿En qué oscilación la longitud del arco es por primera vez menor que 1 pie?
(c) Después de 15 oscilaciones, ¿cuál es la longitud total que ha oscilado el péndulo?
(d) Cuando se detiene, ¿cuál es la longitud total que ha oscilado el péndulo?



58. *Rebote de una pelota.* Se deja caer una pelota desde una altura de 30 pies. Cada vez que la pelota golpea contra el piso rebota a 0.8 de la altura anterior.

(a) ¿Cuál es la altura a la que rebota la pelota después de que pega por tercera ocasión en el piso?
(b) ¿Cuál es la altura después del n-ésimo rebote?
(c) ¿Cuántas veces necesita pegar en el piso la pelota antes de que su altura sea menor de 6 pulgadas?
(d) ¿Cuál es la distancia total recorrida por la pelota antes de dejar de rebotar?

59. *Aumento de salario.* Suponga que acaba de ser contratado con un salario anual de $18,000.00 y espera recibir aumentos anuales del 5%. ¿Cuál será su salario al inicio del quinto año?

60. *Depreciación de equipo.* Una pieza nueva cuesta $15,000.00. Cada año, para fines de impuestos, una compañía deprecia este valor en 15%. ¿Cuál es el valor que se le da al equipo después de 5 años?

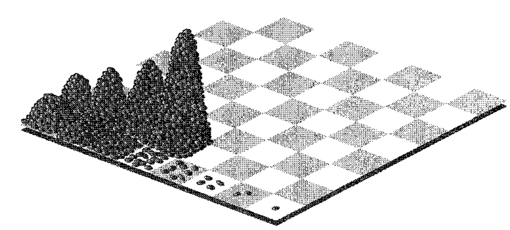
61. *Pensamiento crítico.* Usted acaba de firmar un contrato de 7 años con una liga de fútbol profesional y recibirá un salario inicial de $2,000,000.00 anuales. La administración le propone las siguientes alternativas con respecto a su salario durante los siete años.

(1) Un bono de $100,000.00 cada año.
(2) Un aumento anual del 4.5% por año iniciando después del primer año.
(3) Un aumento anual de $95,000.00 por año iniciando después del primer año.

¿Cuál alternativa proporciona más dinero en el periodo de 7 años? ¿Cuál proporciona menos? ¿Cuál elegiría? ¿Por qué?

62. *La promesa de un hombre rico.* Un hombre rico promete darle a usted $1000.00 el primero de septiembre de 1998. Cada día después le dará $\frac{9}{10}$ de lo que le dio el día anterior. ¿Cuál es la fecha en la que la cantidad que reciba será menor que 1 centavo? Cuando esto suceda, ¿cuánto habrá recibido?

63. *Granos de trigo en un tablero de ajedrez.* En un relato antiguo, a un plebeyo que acababa de salvar la vida del rey éste le preguntó lo que quería de recompensa. Siendo un hombre juicioso, el hombre dijo: "Mi deseo es simple, señor. Coloque un grano de trigo en el primer cuadro de un tablero de ajedrez, dos granos en el segundo cuadro, cuatro granos en el tercer cuadro, y continúe sucesivamente hasta que haya terminado con todos los cuadros del tablero. Eso es todo lo que deseo." Calcule el número total de granos necesarios para satisfacer la petición anterior y vea por qué, siendo en apariencia simple, no puede ser cumplida. (Un tablero de ajedrez consiste de $8 \times 8 = 64$ cuadros.)



64. ¿Puede una sucesión ser al mismo tiempo aritmética y geométrica? Dé razones para su respuesta.

65. Construya una sucesión geométrica. Désela a un compañero y pregúntele por su vigésimo término.

66. Construya dos series geométricas infinitas, una que tenga una suma y otra que no la tenga. Désela a un compañero y pídale que encuentre la suma de cada serie.

67. Si $x < 1$, entonces $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = 1/(1 - x)$. Construya una tabla de valores usando $x = 0.1$, $x = 0.25$, $x = 0.5$, $x = 0.75$, y $x = 0.9$ para calcular $1/(1 - x)$. Luego determine cuántos términos son necesarios en el desarrollo $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$ antes de que se aproxime a $1/(1 - x)$ redondeada a dos decimales. Por ejemplo, si $x = 0.1$, entonces $1/(1 - x) = 10/9 = 1.111 \ldots$. El desarrollo requiere de tres términos.

68. ¿Cuál de las siguientes alternativas, *A* o *B*, tiene como resultado más dinero?

A: Recibir \$1000 el día 1, \$999 el día 2, \$998 el día 3, en un proceso que finaliza al cabo de 1000 días.

B: Recibir \$1 el día 1, \$2 el día 2, \$4 el día 3, durante 19 días

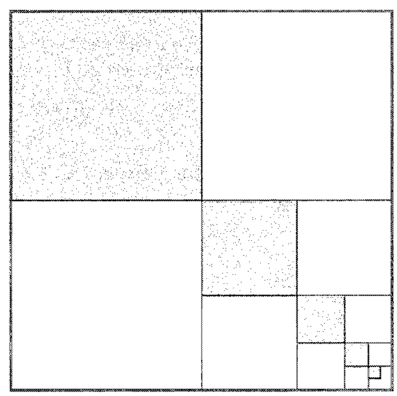
69. Usted está en una entrevista de trabajo y recibe dos ofertas:

A: \$20,000 iniciales con aumentos garantizados del 6% anual durante 5 años.

B: \$22,000 iniciales con aumentos garantizados del 3% anual durante 5 años.

Si su meta es ganar tanto dinero como sea posible después de 5 años, ¿cuál es la mejor oferta? ¿Cuál es mejor si su meta es ganar tanto dinero como sea posible durante la duración del contrato (cinco años)?

70. Observe la figura de la derecha. ¿Eventualmente, qué fracción del cuadrado estará sombreada si el proceso de sombreado que se indica continúa de manera indefinida?



Inducción matemática

La *inducción matemática* es un método para demostrar que enunciados que involucran a los números naturales son verdaderos para todos los números naturales.* Por ejemplo, el enunciado "$2n$ siempre es un entero par", puede demostrarse que es verdadero para todos los números naturales usando inducción matemática. También, el enunciado "la suma de los primeros n enteros impares positivos es igual a n^2", esto es,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2 \tag{1}$$

puede demostrarse para todos los números naturales n usando inducción matemática.

Antes de empezar a estudiar el método de inducción matemática tratemos de adquirir un sentido de su potencialidad. Con este fin, usemos el enunciado de la ecuación (1) repitiéndolo para varios valores de $n = 1, 2, 3, \ldots$:

*Recuerde del capítulo 1 que los números naturales son 1, 2, 3, 4, ... En otras palabras, los términos *números naturales* y *enteros positivos* son sinónimos.

$n = 1$ La suma del primer entero positivo impar es 1^2; $1 = 1^2$.

$n = 2$ La suma de los primeros 2 enteros positivos impares es 2^2; $1 + 3 = 4 = 2^2$.

$n = 3$ La suma de los primeros 3 enteros positivos impares es 3^2; $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$.

$n = 4$ La suma de los primeros 4 enteros positivos impares es 4^2; $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$.

Aunque a partir de este patrón podríamos conjeturar que el enunciado (1) es verdadero para cualquier elección de n, ¿podemos estar seguros de que no falla para alguna elección de n? El método de demostración por inducción matemática, en realidad, demostrará que el enunciado es verdadero para toda n.

Teorema principio de inducción matemática

Suponga que se satisfacen las dos condiciones siguientes para un enunciado acerca de los números naturales:

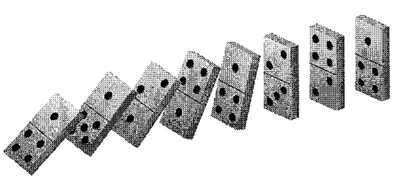
CONDICIÓN I: El enunciado es cierto para el número natural 1.

CONDICIÓN II: Si el enunciado es verdadero para algún número natural k, también es verdadero para el siguiente número natural $k + 1$.

Entonces el enunciado es verdadero para todos los números naturales. ■

No demostraremos este principio. Sin embargo, podemos proporcionar una interpretación física que nos ayudará a ver por qué funciona. Piense en un conjunto de números naturales que cumplen el enunciado como un conjunto infinito de fichas de dominó (*véase* la figura 6).

FIGURA 6



Ahora, suponga que establecemos estos dos hechos:

1. Se hace caer la primera ficha.
2. Si una de las fichas de dominó cae, digamos la k-ésima, entonces también caerá la siguiente, la ficha $(k + 1)$.

¿Es seguro concluir que *todas* las fichas caerán? La respuesta es sí, ya que, si la primera cae (condición I), entonces la segunda caerá (por la condición II); y si la segunda cae, también lo hará la tercera (por la condición II); y así sucesivamente.

Ahora demostraremos algunos enunciados acerca de los números naturales usando inducción matemática.

EJEMPLO 1 *Uso de la inducción matemática*

Demostrar que el enunciado siguiente es verdadero para todos los números naturales n:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2 \tag{2}$$

Solución Primero necesitamos demostrar que el enunciado (2) se cumple para $n = 1$. Como $1 = 1^2$, el enunciado (2) es cierto para $n = 1$. Así, la condición I se satisface.

Ahora necesitamos demostrar que se cumple la condición II. Suponga que sabemos que para algún número k

$$1 + 3 + \cdots + (2k - 1) = k^2 \tag{3}$$

Deseamos demostrar que, con base en la ecuación (3), el enunciado (2) se cumple para $k + 1$. Así, examinamos la suma de los primeros $k + 1$ enteros positivos impares para determinar si es igual a $(k + 1)^2$:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) &= \underbrace{[1 + 3 + \cdots + (2k - 1)]}_{= k^2 \text{ por ecuación (3)}} + (2k + 1) \\ &= k^2 + (2k + 1) \\ &= k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2 \end{aligned}$$

Las condiciones I y II se satisfacen; así, por el principio de inducción matemática, el enunciado (2) es cierto para todos los números naturales. ■

EJEMPLO 2 *Uso de la inducción matemática*

Demostrar que el enunciado siguiente es verdadero para todos los números naturales n:

$$2^n > n$$

Solución Primero, demostramos que el enunciado $2^n > n$ es cierto para $n = 1$. Como $2^1 = 2 > 1$, la desigualdad es verdadera para $n = 1$. Así, se cumple la condición I.

Luego supongamos, para algún número natural k, que $2^k > k$. Deseamos demostrar que la fórmula se cumple para $k + 1$; esto es, deseamos demostrar que $2^{k+1} > k + 1$. Ahora,

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Sabemos que} \\ 2^k > k.}}{>} 2 \cdot k = k + k \underset{\substack{\uparrow \\ k \geq 1}}{\geq} k + 1$$

Así, si $2^k > k$, entonces $2^{k+1} > k + 1$, de modo que se satisface la condición II del principio de inducción matemática. De aquí que $2^n > n$ resulta verdadera para todos los números naturales n. ■

EJEMPLO 3 *Uso de la inducción matemática*

Demostrar que la fórmula siguiente es verdadera para todos los números naturales n:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2} \tag{4}$$

Solución Primero, demostramos que la fórmula (4) es verdadera para $n = 1$. Como

$$\frac{1(1 + 1)}{2} = \frac{1(2)}{2} = 1$$

Se cumple la condición I del principio de inducción matemática.

Ahora suponemos que se cumple la fórmula (4) para alguna k, y determinamos si entonces se cumple la fórmula para $k + 1$. Así, supongamos que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k + 1)}{2} \quad \text{para alguna } k \tag{5}$$

Ahora, necesitamos demostrar que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{(k + 1)(k + 1 + 1)}{2} = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}$$

Esto lo hacemos como sigue

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1) = \underbrace{[1 + 2 + 3 + \cdots + k]}_{= \frac{k(k + 1)}{2} \text{ por ecuación (5)}} + (k + 1)$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$
$$= \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2}$$
$$= \frac{k^2 + 3k + 2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Así, se cumple la condición II. Como consecuencia de esto, la fórmula (4) resulta verdadera para todos los números naturales.

Ahora resuelva el problema 1.

EJEMPLO 4 *Uso de la inducción matemática*

Demostrar que $3^n - 1$ es divisible entre 2 para todos los números naturales n.

Solución Primero, demostramos que el enunciado es verdadero para $n = 1$. Como $3^1 - 1 = 3 - 1 = 2$ es divisible entre 2, el enunciado es verdadero para $n = 1$. Así, se satisface la condición I.

Ahora, suponemos que el enunciado se cumple para alguna k, y determinamos si se cumple para $k + 1$. Así, suponemos que $3^k - 1$ es divisible entre 2 para alguna k. Necesitamos demostrar que $3^{k+1} - 1$ es divisible entre 2. Luego,

$$3^{k+1} - 1 = 3^{k+1} - 3^k + 3^k - 1$$
$$= 3^k(3-1) + (3^k - 1) = 3^k \cdot 2 + (3^k - 1)$$

Ya que $3^k \cdot 2$ es divisible entre 2 y $3^k - 1$ es divisible entre 2, se deduce que $3^k \cdot 2 + (3^k - 1) = 3^{k+1} - 1$ es divisible entre 2. Así, también se satisface la condición II. En consecuencia, el enunciado "$3^n - 1$ es divisible entre 2" es verdadero para todos los números naturales n.

Advertencia: La conclusión de que un enunciado que involucra a los números naturales es verdadero para todos los números naturales, se obtiene sólo después de que *ambas* condiciones, I y II, del principio de inducción matemática han sido satisfechas. El problema 27 del ejercicio que viene a continuación muestra un enunciado para el que sólo se cumple la condición I, pero que no es cierto para todos los números naturales. El problema 28 muestra un enunciado para el que sólo se cumple la condición II, pero que *no* es verdadero para cualquier número natural.

Ejercicio 11.4

En los problemas del 1 al 26, utilice el principio de inducción matemática para demostrar que el enunciado dado es verdadero para todos los números naturales.

1. $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$

2. $1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) = n(2n - 1)$

3. $3 + 4 + 5 + \cdots + (n + 2) = \frac{1}{2}n(n + 5)$

4. $3 + 5 + 7 + \cdots + (2n + 1) = n(n + 2)$

5. $2 + 5 + 8 + \cdots + (3n - 1) = \frac{1}{2}n(3n + 1)$

6. $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{1}{2}n(3n - 1)$

7. $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

8. $1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} = \frac{1}{2}(3^n - 1)$

9. $1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{n-1} = \frac{1}{3}(4^n - 1)$

10. $1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^{n-1} = \frac{1}{4}(5^n - 1)$

11. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

12. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$

13. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

14. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

15. $4 + 3 + 2 + \cdots + (5 - n) = \frac{1}{2}n(9 - n)$

16. $-2 - 3 - 4 - \cdots - (n + 1) = -\frac{1}{2}n(n + 3)$

17. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n + 1) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2)$

18. $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \cdots + (2n - 1)(2n) = \frac{1}{3}n(n + 1)(4n - 1)$

19. $n^2 + n$ es divisible entre 2.

20. $n^3 + 2n$ es divisible entre 3.

21. $n^2 - n + 2$ es divisible entre 2.

22. $n(n + 1)(n + 2)$ es divisible entre 6.

23. Si $x > 1$, entonces $x^n > 1$.

24. Si $0 < x < 1$, entonces $0 < x^n < 1$.

25. $a - b$ es factor de $a^n - b^n$. [*Sugerencia:* $a^{k+1} - b^{k+1} = a(a^k - b^k) + b^k(a - b)$]

26. $a + b$ es un factor de $a^{2n+1} + b^{2n+1}$.

27. Demuestre que el enunciado "$n^2 - n + 41$ es un número primo", es verdadero para $n = 1$, pero no para $n = 41$.

28. Demuestre que la fórmula

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n^2 + n + 2$$

cumple la condición II del principio de inducción matemática. Esto es, demuestre que si la fórmula es verdadera para algún k, también lo es para $k + 1$. Luego demuestre que la fórmula es falsa para $n = 1$ (o para cualquier otra elección de n).

29. Utilice inducción matemática para demostrar que si $r \neq 1$ entonces

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = a\frac{1 - r^n}{1 - r}$$

30. Utilice inducción matemática para demostrar que

$$a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + [a + (n - 1)d] = na + d\frac{n(n - 1)}{2}$$

31. *Geometría.* Utilice inducción matemática para demostrar que la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados es igual a $(n - 2) \cdot 180°$.

32. *El principio ampliado de inducción matemática.* El principio ampliado de inducción matemática establece que si se cumplen las condiciones I y II, esto es,

(I) Un enunciado es cierto para algún número natural j.

(II) Si el enunciado es verdadero para algún número natural $k > j$, entonces también es cierto para el siguiente número natural $k + 1$.

Entonces, el enunciado es verdadero para *todos* los números naturales $\geq j$.

Utilice el principio ampliado de inducción matemática para demostrar que el número de diagonales en un polígono convexo de n lados es $\frac{1}{2}n(n - 3)$. [*Sugerencia:* Empiece demostrando que el enunciado es cierto cuando $n = 4$ (condición I).]

33. ¿Cómo explicaría a un compañero el principio de inducción matemática?

Teorema del binomio

El *teorema del binomio** es una fórmula para el desarrollo de $(x + a)^n$ para cualquier entero positivo. Si $n = 1, 2, 3,$ y 4, el desarrollo de $(x + a)^n$ puede calcularse directamente:

$(x + a)^1 = x + a$	2 términos, empezando con x^1 y terminando con a^1
$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$	3 términos, empezando con x^2 y terminando con a^2
$(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$	4 términos, empezando con x^3 y terminando con a^3
$(x + a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$	5 términos, empezando con x^4 y terminando con a^4

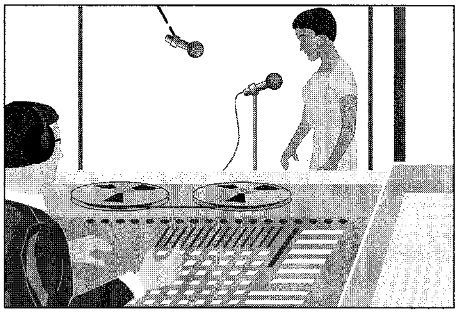
MISIÓN POSIBLE

Capítulo 11

OBTENGA EL MAYOR PROVECHO DE UN CONTRATO

Usted y su orquesta acaban de firmar un contrato de grabación con el estudio de grabación reconocido nacionalmente, NASBURG TENS. Ellos le han prometido $200,000.00 al año durante seis años, más una posibilidad de entre las cuatro siguientes:

(a) Un bono de $10,000.00 por año.
(b) Un aumento anual del 4.5% anual (iniciando después del primer año).
(c) Un aumento anual del 6% anual (iniciando después del segundo año).
(d) Un aumento anual de $9,500.00 anuales (iniciando después del primer año).



El día de hoy usted tiene que comunicarles su decisión acerca de cuál posibilidad ha elegido. Su agente se encuentra fuera de la ciudad y fuera del alcance de su teléfono celular, de modo que usted tendrá que hacer los cálculos matemáticos.

1. Para cada alternativa, encuentre cual será su pago por año durante los seis años. Redondee al entero más cercano.
2. Identifique cuáles posibilidades son ejemplos de sucesiones aritméticas o geométricas.
3. Calcule para cada caso cuánto le pagará el estudio en total durante los seis años. ¿Tiene fórmulas que le reduzcan este trabajo?
4. ¿Cuál posibilidad le rendirá más en total? ¿Hay alguna consideración o circunstancia que pueda resultar más conveniente aunque ustedes reciban menos dinero? ¿Hay ventajas en el hecho de que se les pague más al inicio del contrato? ¿Cuáles son?

Observe que cada desarrollo de $(x + a)^n$ empieza con x^n y termina con a^n; y que conforme se lee de izquierda a derecha, las potencias de x van disminuyendo mientras que las de a aumentan. Además, el número de términos que aparecen es igual a $n + 1$. También observe que el grado de cada monomio en este desarrollo es igual a n. Por ejemplo, en $(x + a)^3$, cada monomio (x^3, $3ax^2$, $3a^2x$, a^3) es de grado 3. En consecuencia, podríamos conjeturar que el desarrollo de $(x + a)^n$ sería de este estilo:

$$(x + a)^n = x^n + \_\_ax^{n-1} + \_\_a^2x^{n-2} + \cdots + \_\_a^{n-1}x + a^n$$

donde los espacios en blanco representan números que deben ser buscados. Este es, en realidad, el caso, como veremos dentro de poco.

Primero, necesitamos introducir un símbolo.

El Símbolo $\binom{n}{j}$

Definimos el símbolo $\binom{n}{j}$, que se lee "n tomados de j en j", como sigue:

Símbolo $\binom{n}{j}$

Si j y n son enteros con $0 \leq j \leq n$, el símbolo $\binom{n}{j}$ se define como

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \tag{1}$$

Comentario: En una calculadora, el símbolo $\binom{n}{j}$ puede estar denotado por la tecla $\boxed{\text{nCr}}$ o por la tecla $\boxed{\text{COMB}}$.

EJEMPLO 1 *Evaluación de $\binom{n}{j}$*

Encontrar:

(a) $\binom{3}{1}$ (b) $\binom{4}{2}$ (c) $\binom{8}{7}$ (d) $\binom{65}{15}$

Solución

(a) $\binom{3}{1} = \frac{3\,!}{1!(3-1)!} = \frac{3!}{1!2!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1(2 \cdot 1)} = \frac{6}{2} = 3$

(b) $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2 \cdot 1)(2 \cdot 1)} = \frac{24}{4} = 6$

(c) $\binom{8}{7} = \frac{8!}{7!(8-7)!} = \frac{8!}{7!1!} \underset{8! = 8 \cdot 7!}{=} \frac{8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!} \cdot 1!} = \frac{8}{1} = 8$

(d) Usamos una calculadora.

Teclear: $\boxed{65}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{nCr}}$ $\boxed{15}$ $\boxed{=}$

Teclear: $\boxed{65}$ $\boxed{15}$ $\boxed{2.073747\ ^{14}}$

Así, $\binom{65}{15} = 2.073747 \times 10^{14}$.

Ahora resuelva el problema 1.

Dos fórmulas útiles que involucran al símbolo $\binom{n}{j}$ son

$$\boxed{\binom{n}{0} = 1 \quad \text{y} \quad \binom{n}{n} = 1}$$

Demostración

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{0!n!} = \frac{1}{1} = 1$$

En el problema 41, al final de esta sección, se le pide demostrar que $\binom{n}{n} = 1$

Suponga que acomodamos los diferentes valores del símbolo $\binom{n}{j}$ en forma triangular, como se muestra a continuación en la figura 7:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}$$

Este es el llamado **triángulo de Pascal,** en honor de Blas Pascal (1623–1662), un matemático francés.

FIGURA 7
Triángulo de Pascal.

$$\begin{array}{l|ccccccccccc}
n=0 \to & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1 \to & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2 \to & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3 \to & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4 \to & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n=5 \to & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

$j=0$, $j=1$, $j=2$, $j=3$, $j=4$, $j=5$

El triángulo de Pascal tiene números uno en los extremos. Para obtener cualquier otra entrada, sólo sume las dos entradas más cercanas del renglón inmediato superior. Los triángulos sombreados en la figura 7 sirven para ilustrar esta característica del triángulo de Pascal. Con base en esto, el renglón correspondiente a $n = 6$ se encontró como sigue:

$$\begin{array}{lccccccccccccc} n=5 \rightarrow & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\ n=6 \rightarrow & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \end{array}$$

Más adelante probaremos que esta suma siempre funciona (*véase* el teorema en la página 718).

Aunque el triángulo de Pascal proporciona una representación interesante y organizada del símbolo $\binom{n}{j}$, en la práctica no es tan útil. Por ejemplo, si quisiéramos conocer el valor de $\binom{12}{5}$, necesitaríamos escribir doce renglones del triángulo antes de ver la respuesta. En lugar de eso, resulta mucho más fácil usar la definición (1).

El teorema del binomio

Ahora ya estamos preparados para establecer el **teorema del binomio;** el cual se demuestra al final de esta sección.

Teorema

Teorema del binomio

Sean x y a números reales. Para cualquier entero positivo, tenemos

$$\begin{aligned}(x+a)^n &= \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}ax^{n-1} + \cdots + \binom{n}{j}a^jx^{n-j} + \cdots + \binom{n}{n}a^n \\ &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}a^j \qquad (2)\end{aligned}$$

Ahora sabemos por qué necesitábamos introducir el símbolo $\binom{n}{j}$; estos símbolos son los coeficientes numéricos que aparecen en el desarrollo de $(x + a)^n$. Por eso, el símbolo $\binom{n}{j}$ es llamado **coeficiente binomial.**

EJEMPLO 2 *Desarrollo de un binomio*

Usar el teorema del binomio para desarrollar $(x + 2)^5$.

Solución En el teorema del binomio, sea $a = 2$ y $n = 5$. Entonces

$$(x+2)^5 \underset{\uparrow}{=} \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}2x^4 + \binom{5}{2}2^2x^3 + \binom{5}{3}2^3x^2 + \binom{5}{4}2^4x + \binom{5}{5}2^5$$

Usar la ecuación (2).

$$\underset{\uparrow}{=} 1 \cdot x^5 + 5 \cdot 2x^4 + 10 \cdot 4x^3 + 10 \cdot 8x^2 + 5 \cdot 16x + 1 \cdot 32$$

Usar el renglón $n = 5$ del triángulo de Pascal o la fórmula (1) para $\binom{n}{j}$.

$$= x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$$

EJEMPLO 3 *Desarrollo de un binomio*

Desarrollar $(2y - 3)^4$ úsando el teorema del binomio.

Solución Primero, reescribimos la expresión $(2y - 3)^4$ como $[2y + (-3)]^4$. Luego usamos el teorema del binomio con $n = 4$, $x = 2y$, y $a = -3$:

$$[2y + (-3)]^4 = \binom{4}{0}(2y)^4 + \binom{4}{1}(-3)(2y)^3 + \binom{4}{2}(-3)^2(2y)^2 + \binom{4}{3}(-3)^3(2y) + \binom{4}{4}(-3)^4$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Usar el renglón } n=4 \text{ del triángulo de Pascal o la fórmula (1) para } \binom{n}{j}}}{}\; 1 \cdot 16y^4 + 4(-3)8y^3 + 6 \cdot 9 \cdot 4y^2 + 4(-27)2y + 1 \cdot 81$$

$$= 16y^4 - 96y^3 + 216y^2 - 216y + 81$$

Observe que en este desarrollo los signos se alternan debido a que $a = -3 < 0$.

Ahora resuelva el problema 17.

EJEMPLO 4 *Determinación de un coeficiente particular en el desarrollo de un binomio*

Encontrar el coeficiente de y^8 en el desarrollo de $(2y + 3)^{10}$.

Solución Escribimos el desarrollo usando el teorema del binomio:

$$(2y + 3)^{10} = \binom{10}{0}(2y)^{10} + \binom{10}{1}(2y)^9(3)^1 + \binom{10}{2}(2y)^8(3)^2 + \binom{10}{3}(2y)^7(3)^3 + \binom{10}{4}(2y)^6(3)^4 + \cdots + \binom{10}{9}(2y)(3)^9 + \binom{10}{10}(3)^{10}$$

Del tercer término en la expresión, el coeficiente de y^8 es

$$\binom{10}{2}(2)^8(3)^2 = \frac{10!}{2!8!} \cdot 2^8 \cdot 9 = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{2 \cdot \cancel{8!}} \cdot 2^8 \cdot 9 = 103{,}680$$

Como lo demuestra esta solución, podemos usar el teorema del binomio para escribir un término particular en un desarrollo sin tener que escribir todo el desarrollo. Con base en el desarrollo de $(x + a)^n$, el término con x^j es

$$\boxed{\binom{n}{n-j}a^{n-j}x^j \qquad (3)}$$

Por ejemplo, podemos resolver el ejemplo 4 usando la fórmula (3) con $n = 10$, $a = 3$, $x = 2y$, y $j = 8$. Entonces el término con y^8 es

$$\binom{10}{10-8}3^{10-8}(2y)^8 = \binom{10}{2} \cdot 3^2 \cdot 2^8 \cdot y^8 = \frac{10!}{2!8!} \cdot 9 \cdot 2^8y^8$$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{2!8!} \cdot 9 \cdot 2^8y^8 = 103{,}680y^8$$

EJEMPLO 5 *Determinación de un término particular en el desarrollo de un binomio*

Determinar el sexto término en el desarrollo de $(x + 2)^9$.

Solución A Desarrollamos usando el teorema del binomio hasta llegar al sexto término:

$$(x+2)^9 = \binom{9}{0}x^9 + \binom{9}{1}x^8 \cdot 2 + \binom{9}{2}x^7 \cdot 2^2 + \binom{9}{3}x^6 \cdot 2^3 + \binom{9}{4}x^5 \cdot 2^4 + \binom{9}{5}x^4 \cdot 2^5 + \cdots$$

El sexto término es

$$\binom{9}{5}x^4 \cdot 2^5 = \frac{9!}{5!4!} \cdot x^4 \cdot 32 = 4032x^4$$

Solución B El sexto término en la expresión de $(x+2)^9$, que tiene diez términos en total, contiene a x^4. (¿Advierte por qué?) Así, por la fórmula (3), el sexto término es

$$\binom{9}{9-4}2^{9-4}x^4 = \binom{9}{5}2^5x^4 = \frac{9!}{5!4!} \cdot 32x^4 = 4032x^4$$

Ahora resuelva los problemas 25 y 31.

A continuación demostramos que la característica de "sumar en triángulo" del triángulo de Pascal ilustrada en la figura 7 siempre funciona.

Teorema Si n y j son enteros con $1 \leq j \leq n$, entonces

$$\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} = \binom{n+1}{j} \tag{4}$$

Demostración

$$\begin{aligned}
\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} &= \frac{n!}{(j-1)![n-(j-1)]!} + \frac{n!}{j!(n-j)!} \\
&= \frac{n!}{(j-1)!(n-j+1)!} + \frac{n!}{j!(n-j)!} \\
&= \frac{jn!}{j(j-1)!(n-j+1)!} + \frac{(n-j+1)n!}{j!(n-j+1)(n-j)!} \\
&= \frac{jn!}{j!(n-j+1)!} + \frac{(n-j+1)n!}{j!(n-j+1)!} \\
&= \frac{jn! + (n-j+1)n!}{j!(n-j+1)!} \\
&= \frac{n!(j+n-j+1)}{j!(n-j+1)!} \\
&= \frac{n!(n+1)}{j!(n-j+1)!} = \frac{(n+1)!}{j![(n+1)-j]!} = \binom{n+1}{j}
\end{aligned}$$

Multiplicar el primer término por j/j y el segundo por $(n-j+1)/(n-j+1)$.

Ahora los denominadores son iguales.

Demostración del teorema del binomio Usamos inducción matemática para demostrar el teorema del binomio. Primero, demostramos que la fórmula (2) es verdadera para $n = 1$:

$$(x+a)^1 = x + a = \binom{1}{0}x^1 + \binom{1}{1}a^1$$

Ahora suponemos que la fórmula (2) es verdadera para alguna k. Esto es, suponemos que

$$(x+a)^k = \binom{k}{0}x^k + \binom{k}{1}ax^{k-1} + \cdots + \binom{k}{j-1}a^{j-1}x^{k-j+1} + \binom{k}{j}a^jx^{k-j} + \cdots + \binom{k}{k}a^k \tag{5}$$

Ahora calculemos $(x+a)^{k+1}$:

$$\begin{aligned}(x+a)^{k+1} &= (x+a)(x+a)^k = x(x+a)^k + a\,(x+a)^k\\
&\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Usar la ecuación (5).}}}{=} x\left[\binom{k}{0}x^k + \binom{k}{1}ax^{k-1} + \cdots + \binom{k}{j-1}a^{j-1}x^{k-j+1} + \binom{k}{j}a^jx^{k-j} + \cdots + \binom{k}{k}a^k\right]\\
&\quad + a\left[\binom{k}{0}x^k + \binom{k}{1}ax^{k-1} + \cdots + \binom{k}{j-1}a^{j-1}x^{k-j+1} + \binom{k}{j}a^jx^{k-j} + \cdots + \binom{k}{k-1}a^{k-1}x + \binom{k}{k}a^k\right]\\
&= \binom{k}{0}x^{k+1} + \binom{k}{1}ax^k + \cdots + \binom{k}{j-1}a^{j-1}x^{k-j+2} + \binom{k}{j}a^jx^{k-j+1} + \cdots + \binom{k}{k}a^kx\\
&\quad + \binom{k}{0}ax^k + \binom{k}{1}a^2x^{k-1} + \cdots + \binom{k}{j-1}a^jx^{k-j+1} + \binom{k}{j}a^{j+1}x^{k-j} + \cdots + \binom{k}{k-1}a^kx + \binom{k}{k}a^{k+1}\\
&= \binom{k}{0}x^{k+1} + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{0}\right]ax^k + \cdots + \left[\binom{k}{j} + \binom{k}{j-1}\right]a^jx^{k-j+1} + \cdots + \left[\binom{k}{k} + \binom{k}{k-1}\right]a^kx + \binom{k}{k}a^{k+1}\end{aligned}$$

Ya que

$$\binom{k}{0} = 1 = \binom{k+1}{0},\quad \binom{k}{1} + \binom{k}{0} \underset{\substack{\uparrow\\(4)}}{=} \binom{k+1}{1},\quad \ldots,$$

$$\binom{k}{j} + \binom{k}{j-1} \underset{\substack{\uparrow\\(4)}}{=} \binom{k+1}{j},\quad \ldots,\quad \binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k+1}$$

tenemos

$$(x+a)^{k+1} = \binom{k+1}{0}x^{k+1} + \binom{k+1}{1}ax^k + \cdots + \binom{k+1}{j}a^jx^{k-j+1} + \cdots + \binom{k+1}{k+1}a^{k+1}$$

Así, se satisfacen las condiciones I y II del principio de inducción matemática y, por lo tanto, la fórmula (2) resulta ser verdadera para toda n. ▪

Dato Histórico

■ El caso $n = 2$ del teorema del binomio, $(a+b)^2$, era ya conocido por Euclides 300 a. C., pero la ley general parece haber sido descubierta por el matemático y astrónomo persa Omar Khayam (1044?–1123?), quien también es conocido como el autor del *Rubaiyat*, una colección de poemas de cuatro líneas que contienen observaciones sobre la condición humana. Omar Khayam no estableció el teorema de manera explícita, pero afirmaba tener un método para extraer raíces tercera, cuarta, quinta, y así sucesivamente. Un poco de estudio demuestra que se debe conocer el teorema del binomio para crear tal método.

La parte principal del teorema del binomio es la fórmula para los coeficientes numéricos y, como vimos, estos pueden ser escritos en una forma triangular simétrica. El triángulo de Pascal apareció primero en los libros de Yang Hui (alrededor del año 1270) y Chu Shihchie (1303). El nombre de Pascal fue asociado con el triángulo a causa de la gran cantidad de aplicaciones en que lo usó él, en especial en conteo y probabilidad. Al fundamentar sus enunciados, Pascal se convirtió en uno de los primeros usuarios de la inducción matemática.

Mucha gente trabajó en la demostración del teorema del binomio, que finalmente fue completada para toda n (incluyendo números complejos) por Niels Abel (1802–1829). ■

Ejercicio 11.5

En los problemas del 1 al 12 evalúe cada expresión.

1. $\binom{5}{3}$ 2. $\binom{7}{3}$ 3. $\binom{7}{5}$ 4. $\binom{9}{7}$ 5. $\binom{50}{49}$ 6. $\binom{100}{98}$

7. $\binom{1000}{1000}$ 8. $\binom{1000}{0}$ 9. $\binom{55}{23}$ 10. $\binom{60}{20}$ 11. $\binom{47}{25}$ 12. $\binom{37}{19}$

En los problemas del 13 al 24 desarrolle cada expresión usando el teorema del binomio.

13. $(x+1)^5$ 14. $(x-1)^5$ 15. $(x-2)^6$ 16. $(x+3)^4$

17. $(3x+1)^4$ 18. $(2x+3)^5$ 19. $(x^2+y^2)^5$ 20. $(x^2-y^2)^6$

21. $(\sqrt{x}+\sqrt{2})^6$ 22. $(\sqrt{x}-\sqrt{3})^4$ 23. $(ax+by)^5$ 24. $(ax-by)^4$

En los problemas del 25 al 38 utilice el teorema del binomio para encontrar el coeficiente o término indicado.

25. El coeficiente de x^6 en el desarrollo de $(x+3)^{10}$
26. El coeficiente de x^3 en el desarrollo de $(x-3)^{10}$
27. El coeficiente de x^7 en el desarrollo de $(2x-1)^{12}$
28. El coeficiente de x^3 en el desarrollo de $(2x+1)^{12}$
29. El coeficiente de x^7 en el desarrollo de $(2x+3)^9$
30. El coeficiente de x^2 en el desarrollo de $(2x-3)^9$
31. El quinto término en $(x+3)^7$
32. El tercer término en $(x-3)^7$
33. El tercer término en $(3x-2)^9$
34. El sexto término en $(3x+2)^8$
35. El coeficiente de x^0 en el desarrollo de $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^{12}$
36. El coeficiente de x^0 en el desarrollo de $\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^9$
37. El coeficiente de x^4 en el desarrollo de $\left(x-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^{10}$
38. El coeficiente de x^2 en $\left(\sqrt{x}+\dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)^8$
39. Utilice el teorema del binomio para encontrar el valor numérico de $(1.001)^5$ redondeado a cinco decimales. [*Sugerencia:* $(1.001)^5=(1+10^{-3})^5$]
40. Utilice el teorema del binomio para encontrar el valor numérico de $(0.998)^6$ redondeado a cinco decimales.
41. Demuestre que $\binom{n}{n}=1$.

42. Demuestre que, si n y j son enteros con $0 \leq j \leq n$, entonces

$$\binom{n}{j} = \binom{n}{n-j}$$

Por lo tanto, concluya que el triángulo de Pascal es simétrico con respecto a una línea vertical dibujada desde la entrada superior.

43. Si n es un entero positivo, demuestre que

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

[*Sugerencia:* $2^n = (1 + 1)^n$; ahora use el teorema del binomio.]

44. Si n es un entero positivo, demuestre que

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$$

45. $\binom{5}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^5 + \binom{5}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right) + \binom{5}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \binom{5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \binom{5}{4}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^4 + \binom{5}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^5 = ?$

46. La *fórmula de Stirling* para aproximar $n!$ cuando n es grande está dada por

$$n! \approx \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1 + \frac{1}{12n - 1}\right)$$

Calcule 12!, 20! y 25!. Luego utilice la fórmula de Stirling para aproximar 12!, 20! y 25!.

11.6 Conjuntos y métodos de conteo

Conjunto

Un **conjunto** es una colección bien definida de objetos distintos. Los objetos de un conjunto son llamados **elementos.** Por **bien definida,** queremos dar a entender que existe una regla para determinar si un objeto dado es elemento de un conjunto. Si un conjunto no tiene elementos es llamado **conjunto vacío,** o **conjunto nulo,** y se denota por el símbolo $\varnothing$.

Ya que los elementos de un conjunto son distintos, nunca los repetimos (en el mismo conjunto). Así, nunca debemos escribir $\{1, 2, 3, 2\}$; la lista correcta es $\{1, 2, 3\}$. Además, ya que un conjunto es una colección, el orden en que los elementos son enlistados no es importante. Por eso, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 2\}$, $\{2, 1, 3\}$, etc., representan todos al mismo conjunto.

EJEMPLO 1 *Escritura de elementos de un conjunto*

Escribir el conjunto que consiste de los resultados posibles de dos lanzamientos de una moneda. Usar A para "águila" y S para "sol".*

Solución Al lanzar una moneda dos veces, podemos obtener águila las dos veces, AA; o águila la primera vez y sol la segunda, AS; o sol la primera vez y águila la segunda, SA; o sol las dos veces, SS. Ya que no existen otras posibilidades, el conjunto de resultados es

$$\{AA, AS, SA, SS\}$$

Si dos conjuntos A y B tienen precisamente los mismos elementos, entonces decimos que A y B son **iguales** y escribimos $A = B$.

Si cada elemento de un conjunto A también es un elemento de un conjunto B, entonces decimos que A es un **subconjunto** de B y escribimos $A \subseteq B$.

Si $A \subseteq B$ y $A \neq B$, entonces decimos que A es un **subconjunto propio** de B y escribimos $A \subset B$.

*Decir "águila o sol" en México equivale a decir "cara o cruz" en otras regiones de Hispanoamérica [N. del T.]

Así, cuando $A \subseteq B$, todo elemento en el conjunto A también está en el conjunto B, pero B puede o no tener elementos adicionales. Si $A \subset B$, todo elemento en A también está en B, y B tiene al menos un elemento que no está en A.

Por último, convenimos en que el conjunto vacío es un subconjunto de todo conjunto; esto es,

$$\varnothing \subseteq A \qquad \text{para cualquier conjunto } A$$

EJEMPLO 2 *Determinación de todos los subconjuntos de un conjunto*

Escribir todos los subconjuntos del conjunto $\{a, b, c\}$.

Solución Para organizar nuestro trabajo escribimos primero todos los subconjuntos que tienen cero elementos, luego aquellos con un elemento, después los que contienen dos elementos y, por último, los de tres elementos. Esto nos dará todos los subconjuntos. ¿Advierte por qué?

0 ELEMENTOS	1 ELEMENTO	2 ELEMENTOS	3 ELEMENTOS
$\varnothing$	$\{a\}, \{b\}, \{c\}$	$\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}$	$\{a, b, c\}$

Ahora resuelva el problema 21.

Intersección; unión

Si A y B son conjuntos, la **intersección** de A con B, denotada $A \cap B$, es el conjunto que consiste de los elementos pertenecientes a A y a B. La **unión** de A con B, denotada $A \cup B$, es el conjunto que consiste de los elementos pertenecientes a A, a B o a ambos.

EJEMPLO 3 *Determinación de la intersección y la unión de conjuntos*

Sean $A = \{1, 3, 5, 8\}$, $B = \{3, 5, 7\}$, y $C = \{2, 4, 6, 8\}$. Encontrar:

(a) $A \cap B$ (b) $A \cup B$ (c) $B \cap (A \cup C)$

Solución
(a) $A \cap B = \{1, 3, 5, 8\} \cap \{3, 5, 7\} = \{3, 5\}$
(b) $A \cup B = \{1, 3, 5, 8\} \cup \{3, 5, 7\} = \{1, 3, 5, 7, 8\}$
(c) $B \cap (A \cup C) = \{3, 5, 7\} \cap [\{1, 3, 5, 8\} \cup \{2, 4, 6, 8\}]$
$= \{3, 5, 7\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\} = \{3, 5\}$

Ahora resuelva el problema 5.

Por lo común, al trabajar con conjuntos designamos un **conjunto universal**, o **universo**, el cual consiste de todos los elementos que deseamos considerar. Una vez designado el conjunto universal, podemos considerar elementos pertenecientes a él que no se encuentren en un conjunto dado.

Complemento

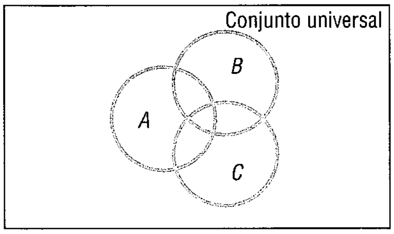
Si A es un conjunto, el **complemento** de A, denotado A', es el conjunto que consiste de todos los elementos que no están en A.

EJEMPLO 4 *Determinación del complemento de un conjunto*

Si el conjunto universal es $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, y si $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, entonces $A' = \{2, 4, 6, 8\}$.

Obsérvese que: $A \cup A' = U$ y $A \cap A' = \varnothing$.

FIGURA 8

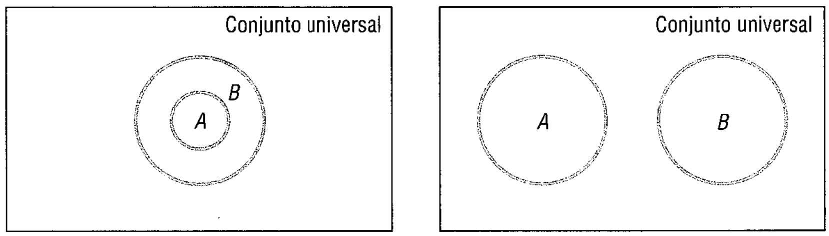


Ahora resuelva el problema 13.

Con frecuencia resulta útil dibujar una ilustración de los conjuntos. Tales ilustraciones, llamadas **diagramas de Venn,** representan a los conjuntos como círculos encerrados en un rectángulo que representa al conjunto universal. Muchas veces tales diagramas nos ayudan a visualizar varias relaciones entre conjuntos. *Véase* la figura 8.

Si sabemos que $A \subseteq B$, podríamos usar el diagrama de Venn de la figura 9(a). Si sabemos que A y B no tienen elementos en común, esto es, si $A \cap B = \varnothing$, podríamos usar el diagrama de Venn de la figura 9(b).

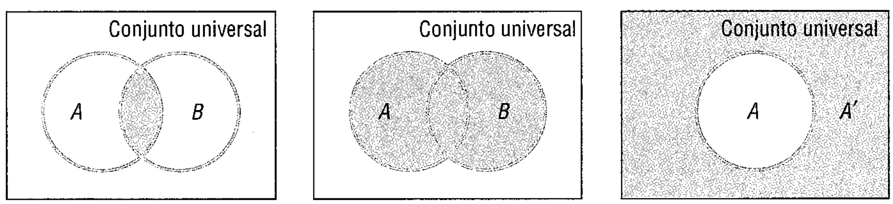
FIGURA 9



(a) $A \subseteq B$ **(b)** $A \cap B = \varnothing$

Las figuras 10(a), 10(b) y 10(c) usan diagramas de Venn para ilustrar las definiciones de intersección, unión y complemento, respectivamente.

FIGURA 10



(a) $A \cap B$ **(b)** $A \cup B$ **(c)** A'

Conteo

Cuando usted cuenta el número de estudiantes en un salón de clase o el número de centavos en su bolsa, lo que realmente hace es lograr la correspondencia uno a uno, entre cada objeto contado, con los números de conteo 1, 2, 3, ..., n, para algún número n. Si un conjunto A se hace corresponder de esta manera con el conjunto $\{1, 2, ..., 25\}$, concluiríamos que en el conjunto A hay 25 elementos. Usamos la notación $n(A) = 25$ para indicar que hay 25 elementos en el conjunto A.

Ya que el conjunto vacío no tiene elementos, escribimos

$$n(\varnothing) = 0$$

Si el número de elementos en un conjunto es un entero no negativo, decimos que el conjunto es **finito.** De otra forma es **infinito.** Aquí dedicaremos nuestro estudio sólo a conjuntos finitos.

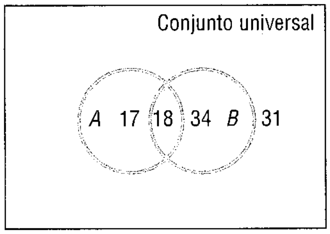
Del ejemplo 2 podemos ver que un conjunto con 3 elementos tiene $2^3 = 8$ subconjuntos. En realidad, se puede demostrar que un conjunto con n elementos tiene exactamente 2^n elementos. Este hecho tiene una aplicación importante en las computadoras que estudiaremos al final de esta sección.

EJEMPLO 5 *Análisis de la información de una encuesta*

En una encuesta aplicada a 100 estudiantes de universidad se registró que 35 estaban inscritos en Álgebra, 52 en Introducción a ciencias de la computación y 18 en ambos cursos. ¿Cuántos de los encuestados no estaban registrados en ninguno de estos cursos?

Solución Primero, hacemos A = Conjunto de estudiantes en Álgebra,
B = Conjunto de estudiantes en Introducción a ciencias de la computación

FIGURA 11



Entonces la información nos dice que

$$n(A) = 35 \qquad n(B) = 52 \qquad n(A \cap B) = 18$$

Observe la figura 11, ¿advierte cómo fueron determinadas las entradas numéricas? Con base en este diagrama concluimos que $17 + 18 + 34 = 69$ estudiantes estaban registrados en al menos uno de los dos cursos. Ya que la encuesta se aplicó a 100 estudiantes, se deduce que $100 - 69 = 31$ no estaban registrados en ningún curso de los mencionados.

Ahora resuelva el problema 35.

Las conclusiones sacadas del ejemplo 5 nos conducen al planteamiento de una fórmula general de conteo. Si contamos los elementos en cada uno de los conjuntos A y B, contaremos necesariamente dos veces los elementos que están en ambos conjuntos, esto es, aquellos elementos que están en $A \cap B$. Así, para contar correctamente los elementos que están en A o en B, esto es, para encontrar $n(A \cup B)$, necesitamos restar los que están en $A \cap B$ de $n(A) + n(B)$.

Teorema Si A y B son conjuntos finitos, entonces

Fórmula de conteo

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \qquad (1)$$

Un caso especial de la fórmula de conteo (1) ocurre cuando A y B no tienen elementos en común. En este caso, $A \cap B = \varnothing$ de modo que $n(A \cap B) = 0$.

Teorema Si dos conjuntos A y B no tienen elementos en común, entonces

Principio de adición de conteo

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \qquad (2)$$

EJEMPLO 6 *Conteo del número de códigos posibles*

Un código consiste de una letra del alfabeto o de un dígito, pero no de ambos. ¿Cuántos códigos son posibles?

Solución Sean los conjuntos A y B definidos como

$$A = \text{Conjunto de letras del alfabeto}$$
$$B = \text{Conjunto de dígitos } \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$$

Entonces

$$n(A) = 26 \qquad n(B) = 10$$

Ya que las letras y los dígitos son diferentes, $A \cap B = \varnothing$. Por lo tanto, el número de maneras en que una letra o un dígito pueden ser seleccionados es,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 26 + 10 = 36$$

Aplicación a las computadoras

La información almacenada en una computadora puede conceptualizarse como una serie de interruptores, los cuales están encendidos o apagados y denotados por el número 0 (apagado) o el número 1 (encendido). Estos números son los dígitos binarios, o **bits.** Un **registro** tiene cierto número fijo de *bits*. Por ejemplo, el microprocesador Z-80 tiene registros de 8 *bits*; la minicomputadora PDP-11 tiene registros de 16 *bits*, y la computadora IBM-370 tiene registros de 32 *bits*. Así, un registro del Z-80 puede tener una entrada que se vea como: 01111001 (8 *bits*). Deseamos determinar cuántas representaciones diferentes son posibles en un registro dado.

Vayamos por pasos y consideremos primero un registro hipotético de 3 *bits*. Tomamos la solución del ejemplo 2 y acomodamos todos los subconjuntos de $\{a, b, c\}$ como se muestra en la tabla 1. Como lo ilustra la tabla, el número de subconjuntos de un conjunto de 3 elementos es igual al número de representaciones diferentes en un registro de 3 *bits*. Un conjunto con n elementos tiene 2^n elementos; así, un registro de n *bits* tiene 2^n representaciones. De modo que un registro de 8 *bits* puede contener $2^8 = 256$ símbolos diferentes, un registro de 16 *bits* puede contener $2^{16} = 65{,}536$ símbolos diferentes, y un registro de 32 *bits* puede contener $2^{32} \approx 4.3 \times 10^9$ símbolos diferentes.

TABLA 1

a	b	c	SUBCONJUNTO
0	0	0	$\varnothing$
1	0	0	$\{a\}$
0	1	0	$\{b\}$
0	0	1	$\{c\}$
1	1	0	$\{a, b\}$
0	1	1	$\{b, c\}$
1	0	1	$\{a, c\}$
1	1	1	$\{a, b, c\}$

11.6

Ejercicio 11.6

En los problemas del 1 al 10 utilice $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{1, 5, 6, 7\}$, *y* $C = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ *para determinar cada conjunto.*

1. $A \cup B$ **2.** $A \cup C$ **3.** $A \cap B$ **4.** $A \cap C$

5. $(A \cup B) \cap C$ **6.** $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ **7.** $(A \cap B) \cup C$ **8.** $(A \cup B) \cup C$

9. $(A \cup C) \cap (B \cup C)$ **10.** $(A \cap B) \cap C$

En los problemas del 11 al 20 utilice $U =$ *conjunto universal* $= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 3, 4, 5, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 7, 8\}$, *y* $C = \{1, 3, 4, 6\}$, *para determinar cada conjunto.*

11. A' **12.** C' **13.** $(A \cap B)'$ **14.** $(B \cup C)'$

15. $A' \cup B'$ **16.** $B' \cap C'$ **17.** $(A \cap C')'$ **18.** $(B' \cup C)'$

19. $(A \cup B \cup C)'$ **20.** $(A \cap B \cap C)'$

21. Escriba todos los subconjuntos de $\{a, b, c, d\}$.

22. Escriba todos los subconjuntos de $\{a, b, c, d, e\}$.

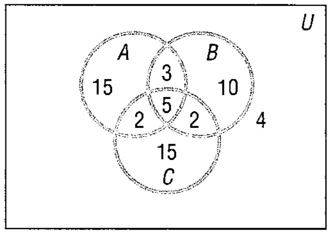
23. Si $n(A) = 15$, $n(B) = 20$, y $n(A \cap B) = 10$, encuentre $n(A \cup B)$.

24. Si $n(A) = 20$, $n(B) = 40$, y $n(A \cup B) = 35$, encuentre $n(A \cap B)$.

25. Si $n(A \cup B) = 50$, $n(A \cap B) = 10$, y $n(B) = 20$, determine $n(A)$.

26. Si $n(A \cup B) = 60$, $n(A \cap B) = 40$, y $n(A) = n(B)$, encuentre $n(A)$.

En los problemas del 27 al 34 use la información dada en la figura para determinar la cantidad de elementos de los conjuntos.



27. ¿Cuántos están en el conjunto A?

28. ¿Cuántos están en el conjunto B?

29. ¿Cuántos están en A o en$B$?

30. ¿Cuántos están en A y B?

31. ¿Cuántos están en A pero no en C?

32. ¿Cuántos no están en A?

33. ¿Cuántos están en A y en B y en C?

34. ¿Cuántos están en A o en B o en C?

35. *Análisis de la información de una encuesta.* En una encuesta de consumidores aplicada a 500 personas, 200 indicaron que comprarían un aparato electrodoméstico en el siguiente mes; 150 indicaron que comprarían un automóvil y 25 dijeron que comprarían un aparato electrodoméstico y un automóvil. ¿Cuántos no comprarán ninguna de las dos cosas? ¿Cuántos comprarán sólo un automóvil?

36. *Análisis de la información de una encuesta.* En una encuesta aplicada a estudiantes, 200 indicaron que asistirían a la Sesión de verano I y 150 indicaron que asistirían a la Sesión de verano II. Si 75 estudiantes planearon asistir a ambas sesiones y 275 indicaron que no asistirían a éstas, ¿cuántos estudiantes participaron en la encuesta?

37. *Análisis de la información de una encuesta.* En una encuesta aplicada a 100 inversionistas del mercado de acciones, los propietarios de estos valores se clasificaron como sigue:

50 en IBM
40 en AT&T
45 en GE
20 en IBM y en AT&T
20 en IBM y GE
15 en AT&T y GE
5 en las tres empresas

(a) ¿Cuántos inversionistas encuestados no tenían acciones de ninguna de las tres compañías?
(b) ¿Cuántos sólo tenían acciones de IBM?
(c) ¿Cuántos sólo tenían acciones de GE?
(d) ¿Cuántos no tenían acciones de IBM ni de GE?
(e) ¿Cuántos tenían acciones de IBM o de AT&T pero no de GE?

38. *Clasificación de tipos de sangre.* La sangre humana está clasificada como Rh+ o Rh−. También está clasificada por tipos: A, si contiene un antígeno A; B, si contiene el antígeno B; AB, si contiene ambos antígenos, y O, si no contiene ningún antígeno. Dibuje un diagrama de Venn que ilustre los distintos tipos de sangre. Con base en esta clasificación, ¿cuántas clases diferentes de sangre hay?

39. Construya un problema diferente de los que aparecen en el texto y que necesite el principio de adición de conteo para resolverse. Déselo a un compañero para que lo resuelva y critique.

40. Investigue cómo se relaciona la noción de conteo con los conjuntos infinitos. Escriba un ensayo de sus hallazgos.

11.7 Permutaciones y combinaciones

El conteo juega un papel importante en diversas áreas, tales como probabilidad, estadística y ciencias de la computación. En esta sección estudiaremos tipos especiales de problemas de conteo y desarrollaremos fórmulas generales para resolverlos.

Empecemos con un ejemplo que demostrará un principio general de conteo.

EJEMPLO 1

Conteo del número de menúes diferentes

El precio fijo de una comida en un restaurante permite las elecciones siguientes:

Aperitivo:	sopa o ensalada
Plato fuerte:	pollo al horno, carne a la parrilla, hígado de ternera o carne asada
Postre:	helado o pastel de queso

¿Cuántas comidas completas pueden ser ordenadas?

Solución Una comida completa requiere de tres decisiones separadas:

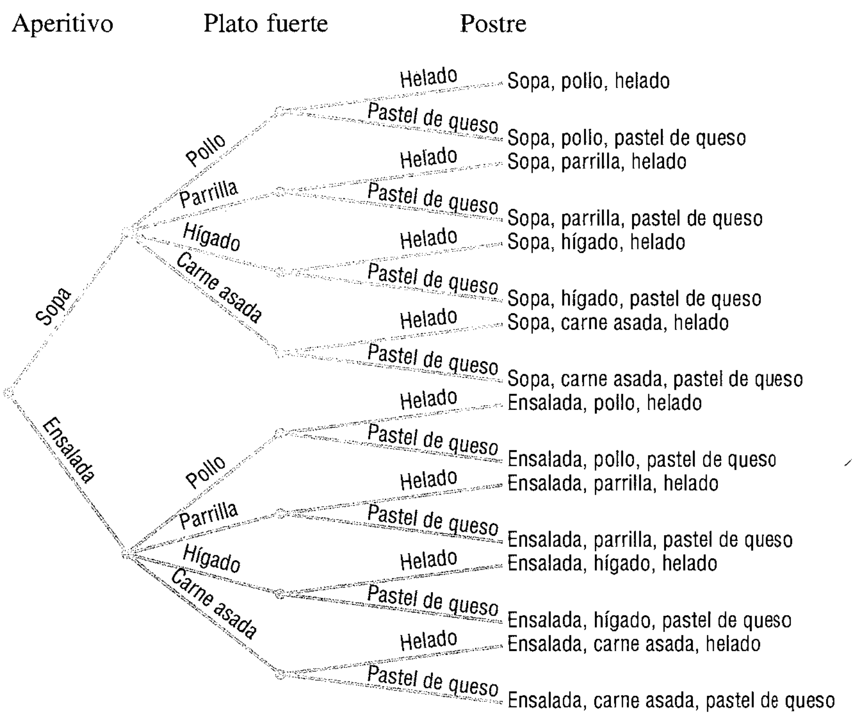
SELECCIÓN DE UN APERITIVO	**SELECCIÓN DE UN PLATO FUERTE**	**SELECCIÓN DE UN POSTRE**
2 posibilidades	4 posibilidades	2 posibilidades

Véase el **diagrama de árbol** en la figura 12. El diagrama nos muestra que por cada selección de un aperitivo hay 4 posibilidades de plato fuerte. Y por cada una de estas $2 \cdot 4 = 8$ posibilidades, hay 2 de postre. Así, en total tenemos

$$2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$$

comidas completas diferentes que pueden ser ordenadas.

FIGURA 12



El ejemplo 1 ilustra un principio general de conteo.

Teorema principio de multiplicación de conteo

Si una tarea consiste de una sucesión de posibilidades en la que hay p oportunidades para la primera posibilidad, q para la segunda, r para la tercera, y así sucesivamente, entonces la tarea de seleccionar puede ser hecha de

$$p \cdot q \cdot r \cdot \ldots$$

formas distintas.

EJEMPLO 2

Conteo de códigos de aeropuertos

La asociación internacional de aerolíneas de transporte (IATA, por sus siglas en inglés) asigna códigos de tres letras para representar las ubicaciones de aeropuertos. Por ejemplo, JFK representa el aeropuerto internacional Kennedy en Nueva York. ¿Cuántos códigos diferentes son posibles?

Solución

La tarea consiste en tomar tres decisiones. Cada selección requiere la elección de una letra del alfabeto (26 posibilidades). Así, por el principio de multiplicación, hay

$$26 \cdot 26 \cdot 26 = 17{,}576$$

códigos diferentes de ubicación de aeropuertos.

En el ejemplo anterior estaba permitido repetir una letra. Ahí un código válido es FLL (aeropuerto internacional de Fort Lauderdale), en el que la letra L aparece dos veces. En el ejemplo siguiente no se permite esto.

EJEMPLO 3

Conteo sin repetición

Suponga que deseamos establecer un código de tres letras usando cualquiera de las 26 del alfabeto, pero requerimos que ninguna letra se use más de una vez. ¿Cuántos códigos diferentes podemos obtener?

Solución

La tarea consiste en hacer tres selecciones. La primera requiere la selección de una de 26 letras. Como ninguna letra puede ser usada más de una vez, la segunda selección requiere elegir de entre 25 letras. La tercera requiere seleccionar de entre 24 letras. (¿Advierte por qué?) Por el principio de multiplicación, hay

$$26 \cdot 25 \cdot 24 = 15{,}600$$

códigos diferentes de tres letras sin letras repetidas.

Ahora resuelva los problemas 25 y 19.

Este ejemplo 3 ilustra un tipo de problema de conteo que se conoce como *permutación*.

Permutación

Una **permutación** es un arreglo ordenado de n objetos distintos sin repetición. El símbolo $P(n, r)$ representa el número de permutaciones de n objetos distintos, tomados r a la vez, donde $r \leq n$.

Líneas arriba, en el ejemplo 3, se pregunta por el número de maneras en que las 26 letras del alfabeto pueden ser dispuestas en grupos de tres sin que se repitan. La respuesta es

$$P(26, 3) = 26 \cdot 25 \cdot 24 = 15{,}600$$

Al tratar de establecer una fórmula para $P(n, r)$, notamos que la tarea de obtener un arreglo ordenado de n objetos en los que sólo $r \leq n$ de ellos son utilizados, sin repetir ninguno, requiere de hacer r selecciones. Para la primera selección hay n posibilidades y para la segunda $n - 1$ posibilidades; para la tercera selección hay $n - 2$ posibilidades; ...; para la r-ésima selección hay $n - (r - 1)$ posibilidades. Por el principio de multiplicación, tenemos

$$
\begin{aligned}
& \qquad\; 1^{\text{a}} \qquad 2^{\text{a}} \qquad\quad 3^{\text{a}} \qquad\qquad\qquad\quad 4^{\text{a}} \\
P(n, r) &= n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \; \ldots \; \cdot [n - (r - 1)] \\
&= n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \; \ldots \; \cdot (n - r + 1)
\end{aligned}
$$

Esta fórmula para $P(n, r)$ puede ser escrita de manera compacta usando la notación de factorial:*

$$
\begin{aligned}
P(n, r) &= n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \; \ldots \; \cdot (n - r + 1) \\
&= n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \; \ldots \; \cdot (n - r + 1) \cdot \frac{(n - r) \cdot \; \ldots \; \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n - r) \cdot \; \ldots \; \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n - r)!}
\end{aligned}
$$

Teorema número de permutaciones de n objetos distintos tomados r a la vez

El número de órdenes diferentes de n objetos usando $r \leq n$ de ellos, en los que

1. los n objetos son distintos,
2. una vez que un objeto es usado no puede ser repetido, y
3. el orden es importante,

está dado por la fórmula

$$
P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!} \tag{1}
$$

EJEMPLO 4

Evaluar: (a) $P(7, 3)$ (b) $P(6, 1)$

Solución Trabajaremos cada problema de dos formas.

(a) $P(7, 3) = \underbrace{7 \cdot 6 \cdot 5}_{\text{3 factores}} = 210$

$$
P(7, 3) = \frac{7!}{(7 - 3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 210
$$

(b) $P(6, 1) = \underbrace{6}_{\text{1 factor}} = 6$

$$
P(6, 1) = \frac{6!}{(6 - 1)!} = \frac{6!}{5!} = \frac{6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 6
$$

Ahora resuelva el problema 1.

*Recuerde que $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2 \cdot 1, \cdots, n! = n(n - 1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

EJEMPLO 5 ¿De cuántas maneras pueden sentarse en fila 5 personas?

Solución Es obvio que las cinco personas son distintas. Una vez que una persona está en la fila no puede ubicarse en otro lugar; y, en la alineación de las personas, el orden es importante. Así, tenemos una permutación de 5 objetos tomados de 5 en 5. Podemos alinear a las cinco personas de

$$P(5, 5) = \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{5 \text{ factores}} = 5! = 120 \text{ formas}$$

Ahora resuelva el problema 31.

Combinaciones

En una permutación el orden es importante; por ejemplo, los arreglos *ABC, CAB, BAC*, ... son considerados órdenes diferentes de las letras *A*, *B* y *C*. Aunque en muchas situaciones el orden no es importante. Por ejemplo, en el juego de póker, el orden en el que las cartas son recibidas no es importante; es la *combinación* de las cartas lo que importa.

Combinación

Una **combinación** es un arreglo, sin importar el orden, de n objetos distintos sin repetición. El símbolo $C(n, r)$ representa el número de combinaciones de n objetos distintos tomando r a la vez, donde $r \leq n$.

EJEMPLO 6 *Enlistado de combinaciones*

Enlistar todas las combinaciones posibles de los 4 objetos *a, b, c, d* tomados 2 a la vez. ¿Cuál es el valor de $C(4, 2)$?

Solución Una combinación de *a, b, c, d* tomando 2 a la vez es

$$ab$$

Se excluye *ba,* ya que el orden no es importante en una combinación. La lista de todas las combinaciones posibles (cerciórese usted mismo) es

$$ab, \quad ac, \quad ad, \quad bc, \quad bd, \quad cd$$

Así,

$$C(4, 2) = 6$$

Podemos encontrar una fórmula para $C(n, r)$ al notar que la única diferencia entre una permutación y una combinación es que en las combinaciones hacemos caso omiso del orden. Así, para determinar $C(n, r)$, sólo necesitamos eliminar de la fórmula de $P(n, r)$ el número de permutaciones que fueron sólo reacomodos del conjunto dado de r objetos. Y esto es fácil de determinar a partir de la fórmula para $P(n, r)$ calculando $P(r, r) = r!$. De modo que, si dividimos $P(n, r)$ entre $r!$, tendremos la fórmula deseada para $C(n, r)$:

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} \underset{\uparrow \atop \text{Usar la fórmula (1)}}{=} \frac{n!/(n-r)!}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Hemos demostrado el enunciado siguiente.

Teorema número de combinaciones de n objetos distintos tomando r a la vez

El número de arreglos diferentes de n objetos usando $r \leq n$ de ellos, en los que

1. los n objetos dos distintos
2. una vez que un objeto es usado no puede repetirse, y
3. el orden no es importante,

está dado por la fórmula

$$\boxed{C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!} \qquad (2)}$$

Con base en la fórmula (2), descubrimos que los símbolos $C(n, r)$ y $\binom{n}{r}$ para los coeficientes binomiales son, en realidad, iguales. Así, el triángulo de Pascal (*véase* la sección 9.5) puede ser utilizado para encontrar el valor de $C(n, r)$. Sin embargo, ya que es más práctico y conveniente, en su lugar usaremos la fórmula (2).

EJEMPLO 7

Uso de la fórmula (2)

Usar la fórmula (2) para determinar el valor de cada expresión.

(a) $C(3, 1)$ (b) $C(6, 3)$ (c) $C(n, n)$ (d) $C(n, 0)$

Solución

(a) $C(3, 1) = \frac{3!}{(3-1)!1!} = \frac{3!}{2!1!} = \frac{3 \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot 1} = 3$

(b) $C(6, 3) = \frac{6!}{(6-3)!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{3! \cdot \cancel{3!}} = \frac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot 4}{\cancel{6}} = 20$

(c) $C(n, n) = \frac{n!}{(n-n)!n!} = \frac{\cancel{n!}}{0!\cancel{n!}} = \frac{1}{1} = 1$

(d) $C(n, 0) = \frac{n!}{(n-0)!0!} = \frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}0!} = \frac{1}{1} = 1$

Ahora resuelva el problema 9.

EJEMPLO 8

Formación de comités

¿Cuántos comités diferentes de 3 personas se pueden formar de un grupo de 7?

Solución

Por supuesto que las 7 personas son distintas. Aunque más importante es la observación de que el orden en que son seleccionadas para formar un comité no es crucial. Así, el problema radica en calcular el número de combinaciones de 7 objetos tomados 3 a la vez:

$$C(7, 3) = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}3!} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5}{\cancel{6}} = 35$$

EJEMPLO 9

Formación de comités

¿De cuántas maneras puede constituirse un comité para que contenga 2 profesores y 3 estudiantes, si hay 6 de los primeros y 10 estudiantes elegibles?

Solución El problema puede dividirse en dos partes: el número de maneras en que los profesores pueden ser elegidos, $C(6, 2)$, y el número de maneras en que los miembros estudiantes pueden ser elegidos, $C(10, 3)$. Por el principio de multiplicación, el comité puede ser formado en

$$C(6, 2) \cdot C(10, 3) = \frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{10!}{7!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}2!} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}3!}$$
$$= \frac{30}{2} \cdot \frac{720}{6} = 1800 \text{ maneras}$$

Ahora resuelva el problema 47.

Permutaciones con repetición

Recuerde que una permutación involucra el conteo de objetos *diferentes*. Una permutación en la que algunos objetos están repetidos es llamada **permutación con repetición.** Algunos libros se refieren a esto como **permutación indistinguible.**

Veamos un ejemplo.

EJEMPLO 10 *Formación de palabras diferentes*

¿Cuántas palabras diferentes pueden construirse usando todas las letras de la palabra REARRANGE?

Solución Cada palabra formada tendrá 9 letras: 3 R, 2 A, 3 E, 1 N y 1 G. Para construir cada palabra necesitamos llenar 9 posiciones con las 9 letras:

$$\underline{}_1 \ \underline{}_2 \ \underline{}_3 \ \underline{}_4 \ \underline{}_5 \ \underline{}_6 \ \underline{}_7 \ \underline{}_8 \ \underline{}_9$$

El proceso de construir una palabra consiste de cinco tareas:

Tarea 1: Seleccionar las posiciones para las 3 letras R.

Tarea 2: Seleccionar las posiciones para las 2 letras A.

Tarea 3: Seleccionar las posiciones para las 2 letras E.

Tarea 4: Seleccionar la posición para la N.

Tarea 5: Seleccionar la posición para la G.

La tarea 1 puede hacerse de $C(9, 3)$ maneras. Entonces quedan 6 posiciones por ser llenadas, de modo que la tarea 2 puede ser hecha de $C(6, 2)$ maneras. Quedan 4 posiciones a ser llenadas, de modo que la tarea 3 puede hacerse de $C(4, 2)$ maneras. Faltan 2 posiciones por llenar, así que la tarea 4 puede hacerse de $C(2, 1)$ maneras. La última posición puede llenarse de $C(1, 1)$ forma. Usando el principio de multiplicación, el número de palabras posibles que pueden ser construidas es

$$C(9, 3) \cdot C(6, 2) \cdot C(4, 2) \cdot C(2, 1) \cdot C(1, 1) = \frac{9!}{3! \cdot \cancel{6!}} \frac{\cancel{6!}}{2! \cdot \cancel{4!}} \frac{\cancel{4!}}{2! \cdot \cancel{2!}} \frac{\cancel{2!}}{1! \cdot \cancel{1!}} \frac{\cancel{1!}}{0! \cdot 1!}$$
$$= \frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!}$$

La forma de la respuesta del ejemplo 10 nos sugiere un planteamiento general. Si las letras en REARRANGE hubieran sido cada una diferentes, habríamos obtenido $P(9, 9) = 9!$ palabras diferentes. Este es el numerador de la respuesta. La presencia de 3 letras R, 2 A y 2 E, reduce el número posible de palabras diferentes, como lo ilustran las entradas en el denominador. Así llegamos al enunciado siguiente:

Teorema permutaciones con repetición

El número de permutaciones de n objetos de los cuales n_1 son de una clase, n_2 de una segunda clase, ..., y n_k son de una k-ésima clase está dado por

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!} \tag{3}$$

donde $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

EJEMPLO 11 *Disposición de banderas*

¿Cuántos arreglos verticales diferentes? hay de 8 banderas, si 4 son blancas, 3 azules y una es roja?

Solución Buscamos el número posible de permutaciones de 8 objetos, de los cuales 4 son de una clase, 3 de una segunda clase y 1 de una tercera clase. Usando la fórmula (3) encontramos que hay

$$\frac{8!}{4! \cdot 3! \cdot 1!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 3! \cdot 1!} = 280 \text{ arreglos distintos}$$

Ahora resuelva el problema 53.

11.7

Ejercicio 11.7

En los problemas del 1 al 8 encuentre el valor de cada permutación.

1. $P(6, 2)$
2. $P(7, 2)$
3. $P(5, 5)$
4. $P(4, 4)$
5. $P(8, 0)$
6. $P(9, 0)$
7. $P(8, 3)$
8. $P(8, 5)$

En los problemas del 9 al 16 utilice la fórmula (2) para encontrar el valor de cada combinación.

9. $C(8, 2)$
10. $C(8, 6)$
11. $C(6, 4)$
12. $C(6, 2)$
13. $C(15, 15)$
14. $C(18, 1)$
15. $C(26, 13)$
16. $C(18, 9)$
17. Enliste todas las permutaciones posibles de 5 objetos a, b, c, d y e, tomados de tres en tres. ¿Cuánto es $P(5, 3)$?
18. Enliste todas las permutaciones posibles de 5 objetos a, b, c, d y e, tomados dos a la vez. ¿Cuánto es $P(5, 2)$?
19. Enliste todas las permutaciones posibles de 4 objetos, 1, 2, 3 y 4, tomados 3 a la vez. ¿Cuánto es $P(4, 3)$?
20. Enliste todas las permutaciones posibles de 6 objetos, 1, 2, 3, 4, 5 y 6, tomados 3 a la vez. ¿Cuánto es $P(6, 3)$?
21. Enliste todas las combinaciones posibles de 5 objetos, a, b, c, d y e, tomados 3 a la vez. ¿Cuánto es $C(5, 3)$?
22. Enliste todas las combinaciones posibles de 5 objetos, a, b, c, d y e, tomados 2 a la vez. ¿Cuánto es $C(5, 2)$?
23. Enliste todas las combinaciones posibles de 4 objetos, 1, 2, 3 y 4, tomados de 3 en 3. ¿Cuánto es $C(4, 3)$?
24. Enliste todas las combinaciones posibles de 6 objetos, 1, 2, 3, 4, 5 y 6, tomados 3 a la vez. ¿Cuánto es $C(6, 3)$?
25. Un hombre tiene 5 camisas y 2 corbatas. ¿Cuántas combinaciones puede hacer con estas prendas?
26. Una mujer tiene 3 blusas y 5 faldas. ¿Cuántos conjuntos puede ponerse al combinar estas prendas?
27. *Formación de códigos.* ¿Cuántos códigos de dos letras pueden formarse usando las letras A, B, C y D? Se permite repetir letras.
28. *Formación de códigos.* ¿Cuántos códigos de dos letras pueden formarse usando las letras A, B, C, D y E? Se permite repetir letras.
29. *Formación de números.* ¿Cuántos números de tres dígitos se pueden crear usando los dígitos 0 y 1? Se permite repetir los dígitos.
30. *Formación de números.* ¿Cuántos números de tres dígitos pueden crearse usando los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9? Se permite repetir los dígitos.
31. ¿De cuántas maneras se pueden formar en una fila 4 personas?

32. ¿De cuántas maneras se pueden apilar 5 cajas diferentes?

33. *Formación de códigos.* ¿Cuántos códigos diferentes de tres letras podrán formarse si sólo pueden ser usadas las letras A, B, C, D y E, y ninguna letra puede ser usada más de una vez?

34. *Formación de códigos.* ¿Cuántos códigos diferentes de cuatro letras podrán formarse si sólo son usadas las letras A, B, C, D, E y F, y ninguna letra puede ser usada más de una vez?

35. *Arreglo de letras.* ¿Cuántos arreglos de letras hay en la palabra MONEY?

36. *Arreglo de dígitos.* ¿Cuántos arreglos hay de los dígitos del número 51,342?

37. *Constitución de comités.* ¿De cuántas maneras puede ser constituido un comité de 4 estudiantes de un conjunto de 7 estudiantes?

38. *Constitución de comités.* ¿De cuántas maneras puede ser constituido un comité de 3 profesores de un departamento que tiene 8 profesores?

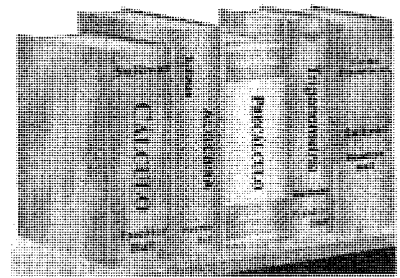
39. *Posibles respuestas en un examen de cierto o falso.* ¿Cuántos arreglos posibles de respuestas hay en un examen de cierto o falso que contiene 10 preguntas?

40. *Posibles respuestas en un examen de opción múltiple.* ¿Cuántos arreglos de respuestas son posibles en un examen de opción múltiple con 5 preguntas si cada pregunta tiene 4 respuestas posibles?

41. ¿Cuántos números de cuatro dígitos pueden crearse usando los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, si el primer dígito no puede ser 0? Se permite repetir los dígitos.

42. ¿Cuántos números de cinco dígitos pueden crearse usando los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, si el primer dígito no puede ser 0 ni 1? Se permite repetir los dígitos.

43. *Acomodo de libros.* Cinco libros diferentes de matemáticas se acomodarán en el escritorio de un estudiante. ¿Cuántos acomodos son posibles?



44. *Formación de números de placa.* ¿Cuántos números de placa pueden formarse usando 2 letras seguidas por cuatro dígitos seleccionados de entre los del 0 al 9, si

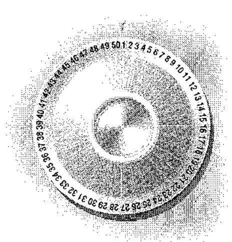
(a) Las letras y los dígitos pueden repetirse?

(b) ¿Las letras pueden repetirse pero los dígitos no?

(c) ¿No pueden repetirse letras ni dígitos?

45. *Portafolios de acciones.* Como asesor financiero, se le pide a usted seleccionar una acción de cada uno de los grupos siguientes: 8 acciones DOW, 15 NASDAQ, y 4 acciones globales. ¿Cuántas combinaciones diferentes son posibles?

46. *Cerraduras de combinación.* Una cerradura de combinación tiene 50 números. Para abrirla, se le da vuelta hacia la derecha hasta que una flecha apunta a cierto número, luego se gira hacia la izquierda a un segundo número, y después se gira a la derecha hasta un tercer número. ¿Cuántas combinaciones diferentes puede haber de esta cerradura?

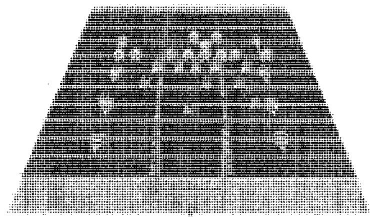


47. Se debe formar un comité de 2 jóvenes y 3 mujeres. Si los miembros se elegirán de entre 4 jóvenes y 8 mujeres, ¿cuántos comités diferentes son posibles?

48. *Equipos de béisbol.* Un equipo de béisbol tiene 15 miembros. Cuatro jugadores son lanzadores y los 11 restantes pueden jugar en cualquier posición. ¿Cuántos equipos diferentes de 9 jugadores pueden formarse con los 15 miembros?

49. El comité de relaciones estudiantiles de una universidad consiste de 2 administradores, 3 profesores y 5 estudiantes. Hay 4 administradores, 8 profesores y 20 estudiantes elegibles. ¿Cuántos comités diferentes son posibles?

50. *Equipo de fútbol.* Un equipo defensivo de fútbol consiste de 25 jugadores. De estos, 10 son hombres de línea, 10 sirven de apoyo y 5 son defensas. ¿Cuántos equipos diferentes pueden formarse con 5 hombres de línea, 3 de apoyo y 3 defensas?



51. *Béisbol.* En Estados Unidos, la Liga Americana de béisbol puede emplear un bateador designado. ¿Cuántas órdenes de bateo son posibles? (Hay 9 jugadores en un equipo.)

52. *Béisbol.* En Estados Unidos, en la Liga Nacional de béisbol por lo regular el lanzador batea en noveno lugar. Si éste es el caso, ¿cuántas órdenes de bateo son posibles?

53. *Formación de palabras.* ¿Cuántas palabras diferentes (reales o imaginarias) de 9 letras pueden ser formadas con las letras de la palabra ECONOMÍAS?

54. *Formación de palabras.* ¿Cuántas palabras diferentes (reales o imaginarias) de 9 letras pueden ser formadas con las letras de la palabra MATEMÁTICAS?

55. *Comités del senado.* El senado de Estados Unidos tiene 100 miembros. Suponga que se desea colocar a cada senador en uno solo de 7 posibles comités. El primer comité tiene 22 miembros, el segundo 13, el tercero 10, el cuarto 5, el quinto 16, el sexto 17 y el séptimo 17. ¿De cuántas maneras pueden formarse los comités?

56. *Serie mundial.* En la Serie Mundial de béisbol estadounidense, el equipo de la Liga Americana (A) y el de la liga Nacional (N) juegan hasta que uno de los dos gana cuatro juegos. Si la sucesión de juegos ganados es designada con sus iniciales (por ejemplo, $NAAAA$ significa que el equipo de la Liga Nacional ganó el primer juego y el de la Americana ganó los siguientes cuatro), ¿cuántas secuencias diferentes son posibles?

57. *Equipos de baloncesto.* Un equipo de baloncesto tiene 6 jugadores que juegan como defensas (2 de 5 posiciones iniciales). ¿Cuántos equipos diferentes son posibles, suponiendo que las 3 posiciones restantes están cubiertas y que no hay distinción entre defensa derecho e izquierdo?

58. *Equipos de baloncesto.* En un equipo de baloncesto de 12 jugadores, 2 juegan sólo como centros, 3 juegan sólo como defensas y los restantes juegan como delanteros (5 jugadores en un equipo: 2 delanteros, 2 defensas y un centro). ¿Cuántos equipos diferentes pueden formarse suponiendo que no es posible distinguir entre defensas derecho e izquierdo ni entre delanteros izquierdo y derecho?

59. *Selección de objetos.* Una urna contiene 7 bolas blancas y 3 rojas. Se seleccionan tres bolas. ¿De cuántas maneras pueden sacarse las 3 bolas del total de 10:
(a) Si 2 bolas deben ser blancas y 1 roja?
(b) ¿Si las tres deben ser blancas?
(c) ¿Si las tres deben ser rojas?

60. *Selección de objetos.* Una urna contiene 15 bolas rojas y 10 blancas. Cinco bolas son seleccionadas. ¿De cuántas maneras pueden sacarse las 5 bolas del total de 25:
(a) Si todas deben ser rojas?
(b) ¿Si 3 deben ser rojas y 2 blancas?
(c) ¿Si al menos 4 deben ser rojas?

61. *Ejercicio de programación.* Cuando n y r son grandes, determinar $C(n, r)$ en una computadora puede conducir a calcular números enteros muy grandes. Para evitarlo podemos aproximar los valores de $C(n, r)$. Una manera de hacer esto es:

$$C(40, 20) = \frac{40!}{20!20!} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot \ldots \cdot 21}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{40}{20} \cdot \frac{39}{19} \cdot \frac{38}{18} \cdot \ldots \cdot \frac{21}{1}$$
$$\approx 2.000 \cdot 2.053 \cdot 2.111 \cdot \ldots \cdot 21.000 = 1.3784652 \times 10^{11}$$

(a) Escriba un programa que reciba como entrada dos enteros N y R y calcule $C(N, R)$ usando la fórmula (1).
(b) Utilice el programa para determinar cuándo ocurre desbordamiento (*overflow*) en su computadora.
(c) Escriba un programa que reciba como entrada dos enteros N y R y calcule $C(N, R)$ por la técnica de aproximación mostrada anteriormente.
(d) Compare las respuestas de las partes (a) y (c).

62. Construya un problema diferente de los que aparecen en el texto y que requiera del principio de multiplicación para resolverlo. Déselo a un compañero para que lo resuelva y critique.

63. Construya un problema diferente de los que aparecen en el texto y que requiera de una permutación para resolverlo. Déselo a un compañero para que lo resuelva y critique.

64. Construya un problema diferente de los que aparecen en el texto y que requiera de una combinación para resolverlo. Déselo a un compañero para que lo resuelva y critique.

65. Explique la diferencia entre una permutación y una combinación. Dé un ejemplo para ilustrar su explicación.

11.8 Probabilidad

La probabilidad es un área de las matemáticas que trata con experimentos que, aún obteniendo resultados aleatorios, admiten cierta regularidad. Tales experimentos no siempre producen el mismo resultado, de modo que ninguna observación es predecible. Sin embargo, en un periodo largo, esos resultados producen patrones regulares que nos permiten predecir con notable precisión.

EJEMPLO 1

Lanzamiento de una moneda no cargada

En el lanzamiento de una moneda no cargada, sabemos que el resultado será águila o sol. Aunque en cualquier lanzamiento no podamos predecir qué resultará, si lanzamos la moneda muchas veces, observaremos que el número de veces que aparece águila es aproximadamente igual al número de veces que aparece sol. Por lo tanto, parece razonable asignar una probabilidad de $\frac{1}{2}$ a que aparezca águila y una probabilidad de $\frac{1}{2}$ a que aparezca sol.

Modelos de probabilidad

El análisis del ejemplo 1 deriva en la construcción de un **modelo de probabilidad** para el experimento de lanzar una moneda no cargada. Un modelo de probabilidad tiene dos componentes: un espacio muestral y una asignación de probabilidades. Un **espacio muestral** S es un conjunto cuyos elementos representan todas las posibilidades que puedan ocurrir como resultado de un experimento. Cada elemento de S es llamado **resultado** o **evento elemental.** A cada resultado se le asigna un número llamado **probabilidad** de ese resultado, el cual tiene dos propiedades:

1. Cada probabilidad es no negativa.
2. La suma de todas las probabilidades es igual a 1.

Así, cuando un modelo de probabilidad tiene el espacio muestral

$$S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$$

donde $e_1, e_2, \ldots, e_n$ son los posibles resultados, y si $P(e_1), P(e_2), \ldots, P(e_n)$ denotan las respectivas probabilidades de estos resultados, entonces

$$P(e_1) \geq 0, \quad P(e_2) \geq 0, \quad \ldots, \quad P(e_n) \geq 0 \qquad (1)$$

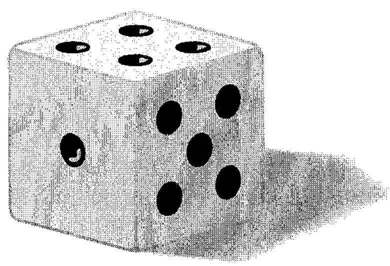
$$P(e_1) + P(e_2) + \cdots + P(e_n) = 1 \qquad (2)$$

Veamos un ejemplo.

EJEMPLO 2 *Construcción de un modelo de probabilidad*

Un experimento consiste en tirar una vez un dado no cargado.* Construir un modelo de probabilidad para este experimento.

Solución Un espacio muestral S consiste de todas las posibilidades que puedan ocurrir. Ya que tirar el dado tendrá como resultado que una de sus seis caras aparezca hacia arriba, el espacio muestral S es



$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Puesto que el dado no está cargado, todas sus caras tienen la misma probabilidad de caer hacia arriba. Como consecuencia de esto, nuestra asignación de probabilidades es

$$P(1) = \tfrac{1}{6} \qquad P(2) = \tfrac{1}{6}$$
$$P(3) = \tfrac{1}{6} \qquad P(4) = \tfrac{1}{6}$$
$$P(5) = \tfrac{1}{6} \qquad P(6) = \tfrac{1}{6}$$

Suponga que el dado se carga de manera que la asignación de probabilidades sea

$$P(1) = 0, \quad P(2) = 0, \quad P(3) = \frac{1}{3}, \quad P(4) = \frac{2}{3}, \quad P(5) = 0, \quad P(6) = 0$$

Esta asignación sería hecha si el dado estuviera cargado de modo que sólo el 3 o el 4 pudiesen ocurrir, y es dos veces más probable que ocurra el 4 que el 3. Esta asignación es consistente con la definición ya que cada asignación está entre 0 y 1, y la suma de todas las asignaciones de probabilidad es igual a 1.

Ahora resuelva el problema 13.

EJEMPLO 3 *Construcción de un modelo de probabilidad*

Un experimento consiste en el lanzamiento de una moneda. La moneda está cargada de modo que es tres veces más probable que ocurra la águila (A) que la sol (S). Construir un modelo de probabilidad para este experimento.

Solución El espacio muestral S es $S = \{A, S\}$. Si x denota la probabilidad de que ocurra sol, entonces

$$P(T) = x \quad \text{y} \quad P(H) = 3x$$

Ya que la suma de las probabilidades de los posibles resultados debe ser igual a 1, tenemos

$$\begin{aligned} P(T) + P(H) = x + 3x &= 1 \\ 4x &= 1 \\ x &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Así, asignamos las probabilidades

$$P(T) = \frac{1}{4} \qquad P(H) = \frac{3}{4}$$

Ahora resuelva el problema 17.

*Un dado es un cubo en el que cada cara tiene 1, 2, 3, 4, 5, o 6 puntos.

EJEMPLO 4

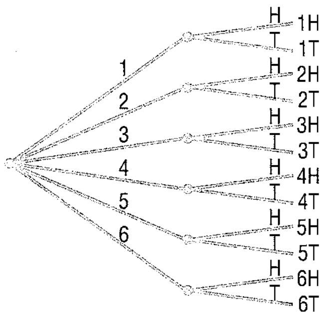
Un experimento consiste en tirar un dado no cargado y después una moneda no cargada. Construir un modelo de probabilidad para este experimento.

Solución

Un diagrama de árbol es útil para enlistar todos los posibles resultados. *Véase* la figura 13. El espacio muestral lo constituyen los resultados

$$S = \{1H, 1T, 2H, 2T, 3H, 3T, 4H, 4T, 5H, 5T, 6H, 6T\}$$

FIGURA 13



El dado y la moneda no están cargados; así que ningún resultado es más probable que otro. En consecuencia, asignamos la probabilidad $\frac{1}{12}$ a cada uno de los 12 resultados. ■

Al trabajar con modelos de probabilidad, el término **evento** es usado para describir un conjunto de resultados del experimento. Así, un evento E es algún subconjunto del espacio muestral S. La **probabilidad de un evento** E, $E \neq 0$, denotada por $P(E)$, se define como la suma de las probabilidades de los resultados en E. Si $E = \varnothing$, entonces $P(E) = 0$; si $E = S$, entonces $P(E) = P(S) = 1$.

EJEMPLO 5

Determinación de la probabilidad de un evento

Para el experimento descrito en el ejemplo 4, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra un número par seguido por un águila?

Solución

El evento E, un número par seguido por un águila, es

$$E = \{2H, 4H, 6H\}$$

La probabilidad de E es

$$P(E) = P(2H) + P(4H) + P(6H) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$ ■

El enunciado siguiente, llamado **regla aditiva,** puede ser utilizado para encontrar la probabilidad de la unión de dos eventos.

Teorema regla aditiva

Para cualesquiera dos eventos E y F,

$$\boxed{P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) \qquad (3)}$$

■

Si E y F son ajenos, es decir, $E \cap F = \varnothing$, entonces la fórmula (3) toma la forma

Eventos mutuamente excluyentes

$$\boxed{P(E \cup F) = P(E) + P(F) \qquad (4)}$$

Cuando se aplica la fórmula (4), decimos que E y F son **eventos mutuamente excluyentes.**

EJEMPLO 6

Uso de las fórmulas (3) y (4)

(a) Si $P(E) = 0.2$, $P(F) = 0.3$, y $P(E \cap F) = 0.1$, encontrar $P(E \cup F)$.

(b) Si $P(E) = 0.2$, $P(F) = 0.3$, y E, F son mutuamente excluyentes, encontrar $P(E \cup F)$.

Solución

(a) Usamos la regla aditiva, fórmula (3).

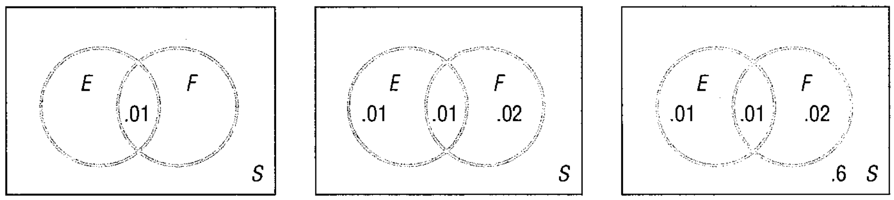
$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = 0.2 + 0.3 - 0.1 = 0.4$$

(b) Como E y F son mutuamente excluyentes, usamos la fórmula (4).

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) = 0.2 + 0.3 = 0.5$$ ■

Algunas veces puede ser usado un diagrama de Venn para obtener probabilidades. Para construir uno que represente la información del ejemplo 6(a) dibujemos dos conjuntos E y F. Empezamos con el hecho de que $P(E \cap F) = 0.1$. *Véase* la figura 14(a). Luego, como $P(E) = 0.2$ y $P(F) = 0.3$, llenamos E con $0.2 - 0.1 = 0.1$ y F con $0.3 - 0.1 = 0.2$. *Véase* la figura 14(b). Como $P(S) = 1$, completamos el diagrama insertando $1 - [0.1 + 0.1 + 0.2] = 0.6$. *Véase* la figura 14(c). Ahora es fácil ver, por ejemplo, que la probabilidad de F, pero no de E, es de 0.2. También, que la probabilidad de que no ocurran E ni F es de 0.6.

FIGURA 14



(a) (b) (c)

Ahora resuelva el problema 23.

Resultados igualmente probables

Cuando se asigna la misma probabilidad a cada resultado del espacio muestral, se dice que el experimento tiene **resultados igualmente probables.**

Teorema probabilidad para resultados igualmente probables

Si un experimento tiene n resultados igualmente probables, y si el número de maneras en que un evento E puede ocurrir es m, entonces la probabilidad de E es

$$P(E) = \frac{\text{Número de maneras en que puede ocurrir } E}{\text{Número de todas las posibilidades lógicas}} = \frac{m}{n} \qquad (5)$$

Así, cuando S es el espacio muestral de este experimento,

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} \qquad (6)$$

Con base en (6), un método alterno de solución del ejemplo 5 es

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

EJEMPLO 7 *Cálculo de probabilidades para resultados igualmente probables*

Una vasija contiene 10 canicas; 5 son de color oscuro, 4 moteadas y 1 es clara.

(a) Si se saca una canica al azar, ¿cuál es la probabilidad de que resulte moteada?

(b) Si se saca una canica al azar, ¿cuál es la probabilidad de que resulte de color claro u oscuro?

Solución Este es un experimento en el cual los resultados son igualmente probables; ninguna canica tiene más probabilidad de salir que otra. Si S es el espacio muestral, entonces hay 10 resultados posibles en S, de modo que $n(S) = 10$.

(a) Defina el evento E: se saca una canica moteada. Hay 4 maneras en que puede ocurrir E. Así,

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{10} = 0.4$$

(b) Defina los eventos F: se saca una canica de color claro y G: se saca una canica de color oscuro. Entonces hay una manera de que ocurra F y 5 maneras de que ocurra G. Así,

$$P(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{1}{10}, \qquad P(G) = \frac{n(G)}{n(S)} = \frac{5}{10}$$

Buscamos la probabilidad del evento F o G, esto es, $P(F \cup G)$. Como F y G son mutuamente excluyentes, usamos (4).

$$P(F \cup G) = P(F) + P(G) = \frac{1}{10} + \frac{5}{10} = \frac{6}{10} = 0.6$$

Ahora resuelva el problema 27.

EJEMPLO 8

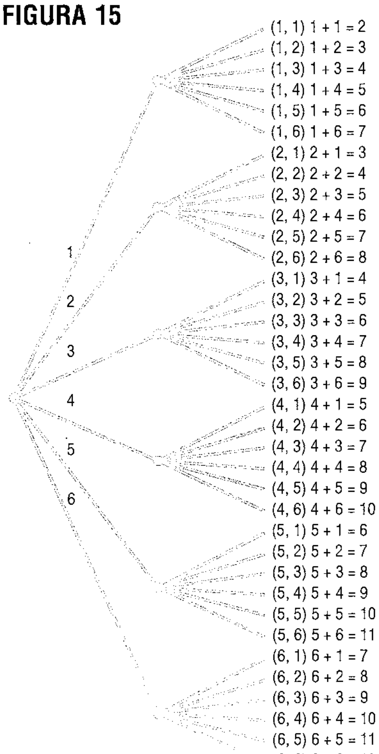
El juego de Craps

En el juego de "craps" se tiran dos dados no cargados. Si el total de las caras hacia arriba es igual a 7 u 11, usted gana. Si el total es 2, 3 o 12, pierde. En los demás casos, usted tira los dados nuevamente.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que usted gane?
(b) ¿Cuál es la probabilidad de que pierda?
(c) ¿Cuál es la probabilidad de que necesite tirar los dados otra vez?

Solución

FIGURA 15



Empezamos construyendo un modelo de probabilidad para el experimento. El diagrama de árbol de la figura 15 nos ayudará para ver todas las posibilidades.

Como los dados no están cargados, ninguno de los 36 resultados posibles en el espacio muestral S es más probable que otro. Así, tenemos resultados igualmente probables con $n(S) = 36$

(a) El evento E, "el total en los dados es 7 u 11", consiste en los resultados

$$E = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1), (5, 6), (6, 5)\}$$

Ya que $n(E) = 8$, tenemos

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9} \approx 0.222$$

(b) El evento F, "el total en los dados es 2, 3 o 12", son los resultados

$$F = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (6, 6)\}$$

Como $n(F) = 4$,

$$P(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \approx 0.111$$

(c) El número de posibilidades en que puede requerirse que usted tire otra vez es $36 - n(E) - n(F) = 36 - 8 - 4 = 24$. Así, la probabilidad de que se requiera otro tiro es

$$\frac{24}{36} = \frac{2}{3} \approx 0.667$$

Ahora resuelva el problema 29.

Aplicaciones que involucran permutaciones y combinaciones

EJEMPLO 9

Cálculo de probabilidades

A causa de un error, 5 teléfonos defectuosos fueron empacados con 15 buenos. Todos los teléfonos son iguales y tienen la misma probabilidad de ser seleccionados. Se seleccionan tres.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que los 3 sean defectuosos?
(b) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 2 sean defectuosos?
(c) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 2 sean defectuosos?

Solución El espacio muestral S consta del número de maneras en que 3 objetos pueden ser seleccionados de entre 20, esto es, el número posible de combinaciones de 20 cosas tomadas 3 a la vez.

$$n(S) = C(20, 3) = \frac{20!}{17! \cdot 3!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{6} = 1140$$

Cada uno de estos resultados es igualmente probable que ocurra.

(a) Si E es el evento "3 son defectuosos", entonces el número de elementos en E es el número de maneras en que 3 teléfonos defectuosos pueden ser seleccionados de entre 5 teléfonos defectuosos; $C(5, 3) = 10$. Así, la probabilidad de E es

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{10}{1140} = 0.0088$$

(b) Si F es el evento "exactamente 2 son defectuosos" y se seleccionan 3 teléfonos, entonces el número de elementos en F es el número de maneras en que 2 teléfonos defectuosos se pueden seleccionar de los 5 empacados más 1 teléfono bueno de entre los 15 buenos. Lo primero puede hacerse en $C(5, 2)$ maneras y lo segundo en $C(15, 1)$. Por el principio de multiplicación, el evento F puede ocurrir en

$$C(5, 2)C(15, 1) = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \frac{15!}{14! \cdot 1!} = 10 \cdot 15 = 150 \text{ maneras}$$

Por lo tanto, la probabilidad de F es

$$P(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{150}{1140} = 0.1316$$

(c) El evento G, "al menos dos son defectuosos", cuando son seleccionados 3, es equivalente a requerir que se seleccionen exactamente 2 o exactamente 3. Esto es, $G = E \cup F$. Como E y F son mutuamente excluyentes (no es posible seleccionar 2 teléfonos defectuosos y, al mismo tiempo, seleccionar 3 teléfonos defectuosos), encontramos

$$P(G) = P(E) + P(F) = 0.0088 + 0.1316 = 0.1404$$

Ahora resuelva el problema 43.

EJEMPLO 10 *Lanzamiento de una moneda*

Una moneda no cargada es lanzada 6 veces.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente 5 águilas y un sol?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener entre 4 y 6 águilas, inclusive?

Solución El número de elementos en el espacio muestral S se encuentra usando el principio de multiplicación. Cada lanzamiento tiene como resultado águila (A) o sol (S). Como la moneda es lanzada 6 veces, tenemos

$$n(S) = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{\text{6 lanzamientos}} = 2^6 = 64$$

Los resultados son igualmente probables ya que la moneda no está cargada.

(a) Cualquier secuencia que tenga 5 águilas y una sol estará determinada una vez que la posición de las 5 águilas (o de 1 Sol) sea conocida. El número de maneras en que podemos colocar 5 águilas en una secuencia de 6 es $C(6, 5) = 6$. La probabilidad del evento E: exactamente 5 águilas y una sol es

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{C(6, 5)}{2^6} = \frac{6}{64} = 0.0938$$

(b) Sea F el evento: entre 4 y 6 águilas, inclusive. Obtener entre 4 y 6 águilas es equivalente al evento: 4 o 5 o 6 águilas. Como cada uno de estos eventos es mutuamente excluyente (es imposible obtener 4 y 5 águilas cuando lanzamos una moneda 6 veces), tenemos

$$\begin{aligned} P(F) &= P(4 \text{ o } 5 \text{ o } 6 \text{ águilas}) \\ &= P(4 \text{ águilas}) + P(5 \text{ águilas}) + P(6 \text{ águilas}) \end{aligned}$$

Las probabilidades a la derecha se obtienen como en la parte (a). Así

$$P(F) = \frac{C(6, 4)}{2^6} + \frac{C(6, 5)}{2^6} + \frac{C(6, 6)}{2^6} = \frac{15}{64} + \frac{6}{64} + \frac{1}{64} = \frac{22}{64} = 0.3438$$

DATO HISTÓRICO

■ La teoría de conjuntos, el conteo y la probabilidad, tomaron forma primero como una teoría sistemática en el intercambio de cartas (1654) entre Pierre de Fermat (1601–1665) y Blas Pascal (1623–1662). Ellos discutieron el problema de cómo dividir las apuestas en un juego interrumpido antes de terminar, si se conoce cuántos puntos necesita cada jugador para ganar. Fermat resolvió el problema enlistando todas las posibilidades y contando las favorables, mientras que Pascal hizo uso del triángulo que ahora lleva su nombre. Como se mencionó en el texto, las entradas en el triángulo de Pascal son equivalentes a $C(n, r)$. Este reconocimiento del papel de $C(n, r)$ en el conteo es el fundamento de todos los desarrollos posteriores.

El primer libro sobre probabilidad, el trabajo de Christian Huygens (1629–1695), apareció en 1657. En él, se explora la noción de esperanza matemática. Esto permite el cálculo de ganancias o pérdidas que un jugador puede esperar, conociendo las probabilidades involucradas en el juego. (*Véanse* los problemas históricos que siguen.)

Es interesante notar que Girolamo Cardano (1501–1576) escribió un tratado sobre probabilidad, el cual no fue publicado hasta 1663 en la recopilación de trabajos de Cardano; demasiado tarde como para tener algún efecto sobre el desarrollo de la teoría.

En 1713, la publicación póstuma *Ars Conjectandi* de Jacobo Bernoulli dio a la teoría la forma que tuvo hasta 1900. En el siglo actual, la combinatoria (conteo) y la probabilidad experimentaron un desarrollo rápido debido al uso de las computadoras.

Un comentario final acerca de la notación. Las notaciones $C(n, r)$ y $P(n, r)$ son variaciones de una forma de notación desarrollada en Inglaterra después de 1830. La notación $\binom{n}{r}$ para $C(n, r)$ se remonta a Leonardo Euler (1707–1783), pero ahora está perdiendo terreno porque no tiene un simbolismo del mismo tipo relacionado claramente para permutaciones. Los símbolos $\cup$ y $\cap$ fueron introducidos por Giuseppe Peano (1858–1932) en 1888 en un contexto ligeramente diferente. El símbolo de inclusión $\subset$ fue introducido por E. Schroeder (1841–1902) alrededor de 1890. El tratamiento de la teoría de conjuntos en el texto es debido a George Boole (1815–1864), quien escribió $A + B$ para $A \cup B$ y AB para $A \cap B$ (los estadísticos aún utilizan AB para $A \cap B$). ■

PROBLEMAS HISTÓRICOS

■ 1. *El problema discutido por Fermat y Pascal.* Un juego entre dos jugadores igualmente hábiles, A y B, es interrumpido cuando A necesita 2 puntos para ganar y B necesita 3 puntos. ¿En qué proporción deben ser repartidas las apuestas? [*Nota:* Si cada jugada tiene como resultado un punto para alguno de los jugadores, cuando mucho en cuatro juegos más se decidiría la partida.]
   (a) *Solución de Fermat.* Enlistar todos los resultados posibles que terminarían el juego para formar el espacio muestral (por ejemplo, ABAA, ABBB, etc.). Entonces la probabilidad de que A gane y la de que B gane determinarán cómo deben ser repartidas las apuestas.
   (b) *Solución de Pascal.* Usar combinaciones para determinar el número de maneras en que los 2 puntos que necesita A para ganar puedan ocurrir en cuatro juegos. Luego usar combinaciones para determinar el número de maneras en que los 3 puntos que necesita B para ganar puedan ocurrir. Esto es más confuso ya que A puede ganar con 2 puntos en dos, tres o cuatro juegos. Calcular las probabilidades y comparar con los resultados en la parte (a).

2. *Esperanza matemática de Huygens.* En un juego con n posibles resultados con probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_n$, suponga que las ganancias netas son $w_1, w_2, \ldots, w_n$, respectivamente. Entonces la esperanza matemática es

$$E = p_1w_1 + p_2w_2 + \cdots + p_nw_n$$

   El número E representa la ganancia o pérdida por juego a la larga. Los problemas siguientes son una modificación de los de Huygens:
   (a) Se tira un dado no cargado. Un jugador gana \$3.00 si aparece un 6 y \$6.00 si aparece un 5. ¿Cuál es su esperanza? [*Nota:* $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 0$]
   (b) Un jugador juega el mismo juego de la parte (a), pero ahora él debe pagar \$1.00 por jugar. Esto significa $w_5 = \$5$, $w_6 = \$2$, y $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = -\$1$. ¿Cuál es la esperanza? ■

11.8

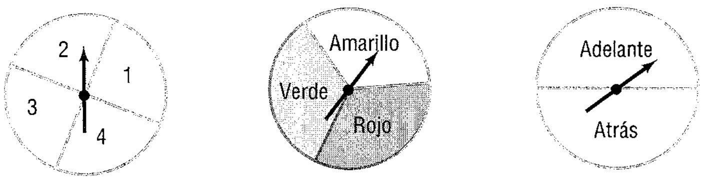
Ejercicio 11.8

En los problemas del 1 al 6 construya un modelo de probabilidad para cada experimento.

1. Lanzamiento de una moneda no cargada dos veces.
2. Lanzamiento de una moneda no cargada una vez.

3. Lanzamiento de dos monedas no cargadas y luego un dado no cargado.
4. Lanzamiento de una moneda no cargada, un dado no cargado y luego una moneda no cargada.
5. Lanzamiento de tres monedas no cargadas una vez.
6. Lanzamiento de una moneda no cargada tres veces.

En los problemas del 7 al 12, utilice los discos giratorios y construya un modelo de probabilidad para cada experimento.



Disco I   Disco II   Disco III

7. Girar el disco I luego el disco II. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 2 o un 4, seguido por rojo?
8. Girar el disco III luego el disco II. ¿Cuál es la probabilidad de obtener Adelante, seguida de amarillo o verde?
9. Girar el disco I, luego el II y después el III. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1 seguido por rojo o verde, seguido por Atrás?
10. Girar el disco II, luego el I y después el III. ¿Cuál es la probabilidad de obtener amarillo, seguido por un 2 o un 4, seguido por Adelante?
11. Girar el disco I dos veces, luego el disco II. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 2, seguido de un 2 o un 4, seguido por rojo o verde?
12. Girar el disco II, luego el disco I dos veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener Adelante, seguido por un 1 o un 3, seguido por un 2 o un 4?

En los problemas del 13 al 16 considere el experimento de lanzar una moneda dos veces. La tabla enlista seis posibles asignaciones de probabilidades para este experimento. Usando esta tabla, responda las preguntas siguientes.

ASIGNACIONES	ESPACIO MUESTRAL			
	AA	AS	SA	SS
A	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
B	0	0	0	1
C	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$
D	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
E	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
F	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$

13. ¿Cuáles de las asignaciones de probabilidades son consistentes con la definición de probabilidad de un resultado?
14. ¿Si se sabe que la moneda no está cargada, ¿cuál de las asignaciones debe ser utilizada?
15. Si se sabe que la moneda siempre cae sol, ¿cuál asignación de probabilidades debe ser usada?
16. ¿Cuál de las asignaciones debe ser usada si la ocurrencia de sol es dos veces más probable que la de águila?
17. *Asignación de probabilidades.* Una moneda está cargada de modo que águila es cuatro veces más probable de ocurrir que sol. ¿Qué probabilidad debemos asignar a águila? ¿Y a sol?
18. *Asignación de probabilidades.* Una moneda está cargada de modo que es dos veces más probable que ocurra águila. ¿Qué probabilidad debemos asignar a águila? ¿Y a sol?
19. *Asignación de probabilidades.* Un dado está cargado de modo que es dos veces más probable que aparezca un número impar que un número par. ¿Qué probabilidad debemos asignar a cada una de sus águilas?
20. *Asignación de probabilidades.* Un dado está cargado de modo que el seis no puede aparecer. Las otras caras ocurren con la misma frecuencia. ¿Qué probabilidad debemos asignar a cada cara?

En los problemas del 21 al 24 encuentre la probabilidad del evento indicado si $P(A) = 0.30$ y $P(B) = 0.40$.

21. $P(A \cup B)$ si A, B son mutuamente excluyentes.
22. $P(A \cap B)$ si A, B son mutuamente excluyentes.
23. $P(A \cup B)$ si $P(A \cap B) = 0.15$
24. $P(A \cap B)$ si $P(A \cup B) = 0.6$

En los problemas del 25 al 28 se selecciona al azar una pelota de golf de una caja que contiene 9 pelotas blancas, 8 verdes y 3 anaranjadas, encuentre la probabilidad de cada evento.

25. La pelota de golf es blanca.

26. La pelota de golf es verde.

27. La pelota de golf es blanca o verde.

28. La pelota de golf no es blanca.

29. ¿Cuál es la probabilidad de tirar un 6 o un 8 en un juego de *craps*? (Consulte el ejemplo 8.)

30. ¿Cuál es la probabilidad de tirar un 5 o un 9 en un juego de *craps*? (Consulte el ejemplo 8.)

Los problemas del 31 al 34 están basados en una encuesta a consumidores acerca de los ingresos anuales de 100 familias. La tabla siguiente proporciona la información:

Ingreso	\$0–9999	\$10,000–19,999	\$20,000–29,999	\$30,000–39,999	\$40,000 más
Número de familias	5	35	30	20	10

31. ¿Cuál es la probabilidad de que una familia tenga un ingreso anual de \$30,000.00 o más?

32. ¿Cuál es la probabilidad de que una familia tenga un ingreso anual de entre \$10,000.00 y \$29,999.00, inclusive?

33. ¿Cuál es la probabilidad de que una familia tenga un ingreso anual menor de \$20,000.00?

34. ¿Cuál es la probabilidad de que una familia tenga un ingreso anual de \$20,000.00 o más?

35. *Encuesta.* A partir de los datos de una encuesta acerca del número de televisores en las casas, se construyó la tabla de probabilidades siguiente:

Número de televisores	0	1	2	3	4 o más
Probabilidad	0.05	0.24	0.33	0.21	0.17

Encuentre la probabilidad de que una casa tenga:

(a) 1 o 2 televisores (b) 1 o más televisores (c) 3 o menos televisores (d) 3 o más televisores

(e) Menos de 2 televisores (f) Menos de 1 televisor (g) 1, 2 o 3 televisores (h) 2 o más televisores

36. *Filas para pagar.* Por observación, se ha determinado que la probabilidad de que un número dado de personas espere en la fila de una caja registradora de "cinco artículos o menos" en un supermercado es:

Número esperando la fila	0	1	2	3	4 o más
Probabilidad	0.10	0.15	0.20	0.24	0.31

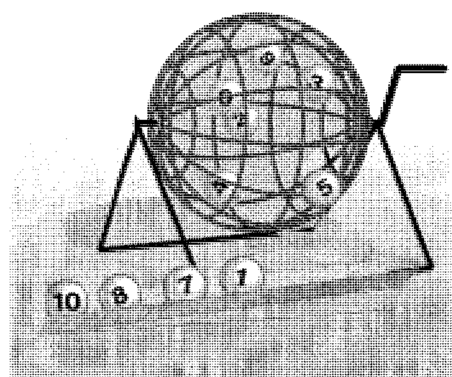
Encuentre la probabilidad de que:

(a) Cuando mucho haya 2 personas en la fila.

(b) Al menos haya 2 personas en la fila.

(c) Al menos haya 1 persona en la fila.

37. *Ganancias en la lotería.* En cierta lotería hay 10 bolas numeradas con 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. De estas, se sacan cinco en un orden establecido. Si usted selecciona cinco números que coincidan con los aparecidos en el orden establecido gana \$1,000,000.00. ¿Cuál es la probabilidad de ganar en tal lotería?



38. Un comité de 6 personas será elegido al azar en un grupo de 14 que consiste de 2 supervisores, 5 trabajadores especializados y 7 no especializados. ¿Cuál es la probabilidad de que el comité seleccionado tenga 2 trabajadores especializados y 4 no especializados?

39. Se lanza una moneda no cargada cinco veces.
(a) Encuentre la probabilidad de que aparezcan exactamente 3 águilas.
(b) Encuentre la probabilidad de que no aparezcan águilas.

40. Se lanza cuatro veces una moneda no cargada.
(a) Encuentre la probabilidad de que aparezca exactamente 1 sol.
(b) Encuentre la probabilidad de que no aparezca más de 1 sol.

41. Se tira un par de dados no cargados 3 veces.
(a) Encuentre la probabilidad de que la suma 7 aparezca 3 veces.
(b) Encuentre la probabilidad de que una suma de 7 u 11 aparezca al menos dos veces.

42. Se tira un par de dados no cargados cinco veces.
(a) Encuentre la probabilidad de que la suma nunca sea 2.
(b) Encuentre la probabilidad de que la suma nunca sea 7.

43. Por una confusión en la línea de producción, 5 televisores defectuosos fueron enviados con 25 buenos. Si son seleccionados 5 al azar, ¿cuál es la probabilidad de que los cinco sean defectuosos? ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 2 de ellos sean defectuosos?

44. En un embarque de 50 transformadores se sabe que 10 son defectuosos. Si se sacan al azar 30 transformadores, ¿cuál es la probabilidad de que los 30 no sean defectuosos? Suponga que todos los transformadores parecen iguales y tienen la misma probabilidad de ser elegidos.

45. En una promoción, 50 dólares de plata, uno de los cuales está valuado en más de $10,000.00, son colocados en una bolsa. Al ganador de la promoción se le da la oportunidad de meter la mano en la bolsa, con los ojos vendados, y sacar 5 monedas. ¿Cuál es la probabilidad de que una de las 5 monedas sea la valuada en más de $10,000.00?

46. Vaya a la biblioteca y en un libro de probabilidad busque "el problema del cumpleaños". Escriba un breve ensayo acerca de ese problema y dé su solución.

Repaso del capítulo

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Sucesión	Una función cuyo dominio es el conjunto de los números enteros positivos.
Factoriales	$0! = 1$, $1! = 1$, $n! = n(n-1)\cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ si $n \geq 2$
Sucesión aritmética	$a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$, donde a = primer término, d = diferencia común, $a_n = a + (n-1)d$
Suma de los primeros n términos de una sucesión aritmética	$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{n}{2}(a + a_n)$
Sucesión geométrica	$a_1 = a$, $a_{n+1} = ra_n$; donde a = primer término, r = razón común, $a_n = ar^{n-1}$, $r \neq 0$
Suma de los primeros n términos de una sucesión aritmética	$S_n = a\frac{1-r^n}{1-r}$, $r \neq 0, 1$
Serie geométrica infinita	$a + ar + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$
Suma de una serie geométrica infinita	$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = \frac{a}{1-r}$, $\lvert r \rvert < 1$
Principio de inducción matemática	Condición I: El enunciado es verdadero para el número natural 1. Condición II: Si el enunciado es verdadero para algún número natural k, también es verdadero para $k + 1$ Entonces el enunciado es verdadero para todos los números naturales.

Coeficiente binomial	$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$	
Triángulo de Pascal	*Véase* la figura 7.	
Teorema del binomio	$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}ax^{n-1} + \cdots + \binom{n}{j}a^jx^{n-j} + \cdots + \binom{n}{n}a^n$	
Conjunto		Colección bien definida de objetos distintos, llamados elementos.
Conjunto vacío	$\varnothing$	Conjunto sin elementos.
Igualdad	$A = B$	A y B tienen los mismos elementos.
Subconjunto	$A \subseteq B$	Cada elemento de A también es un elemento de B.
Intersección	$A \cap B$	Conjunto que consta de los elementos que pertenecen a A y a B.
Unión	$A \cup B$	Conjunto que consta de los elementos que pertenecen a A, a B, o a ambos.
Conjunto universal	U	Conjunto que consta de todos los elementos que deseamos considerar.
Complemento	A'	Conjunto que consta de los elementos del conjunto universal que no están en A.
Conjunto finito		El número de elementos en el conjunto es un entero no negativo.
Conjunto infinito		Un conjunto que no es finito.
Fórmula de conteo	$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$	
Principio de adición		Si $A \cap B = \varnothing$, entonces $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.
Principio de multiplicación		Si una tarea consiste en una sucesión de posibilidades en las que hay p selecciones para la primera posibilidad, q para la segunda, y así sucesivamente, entonces la tarea de seleccionar puede hacerse de $p \cdot q \cdot \ldots$ maneras diferentes.
Permutación	$P(n, r) = n(n-1) \cdot \ldots \cdot [n-(r-1)] = \frac{n!}{(n-r)!}$	Un arreglo ordenado de n objetos distintos sin repetición.
Combinación	$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$	Un arreglo, sin considerar el orden, de n objetos distintos sin repetición.
Permutaciones con repetición	$\frac{n!}{n_1!n_2! \cdots n_k!}$	El número de permutaciones de n objetos de los cuales n_1 son de una clase, n_2 son de una segunda clase, . . . , y n_k son de una k-ésima clase, donde $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$
Espacio muestral		Conjunto cuyos elementos representan todas las posibilidades de que pueda ocurrir cierto resultado en un experimento.
Probabilidad		Un número asignado a cada resultado o evento elemental de un espacio muestral; la suma de todas las probabilidades de los resultados es igual a 1.
Regla aditiva	$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$	
Resultados igualmente probables	$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$	A cada resultado se le asigna la misma probabilidad.

CÓMO HACER PARA

- Escribir los términos de una sucesión
- Usar la notación de sumatoria
- Identificar una sucesión aritmética
- Encontrar la suma de los primeros n términos de una sucesión aritmética
- Identificar una sucesión geométrica
- Encontrar la suma de los primeros n términos de una sucesión geométrica
- Encontrar la suma de una serie geométrica
- Demostrar enunciados acerca de los números naturales empleando inducción matemática
- Aplicar el teorema del binomio

Encontrar la unión, la intersección y el complemento en conjuntos
Usar diagramas de Venn para ilustrar conjuntos
Reconocer un problema de permutación
Reconocer un problema de combinación
Resolver ciertos problemas de probabilidad
Contar los elementos presentes en un espacio muestral
Dibujar un diagrama de árbol

COMPLETE EN LOS ESPACIOS

1. Un(a) __________ es una función cuyo dominio es el conjunto de los números enteros positivos.
2. En una sucesión __________, la diferencia entre términos sucesivos siempre es el mismo número.
3. En una sucesión __________, la razón de dos términos sucesivos siempre es el mismo número.
4. __________ __________ es una disposición triangular de los coeficientes binomiales.
5. $\binom{6}{2} =$ __________
6. La __________ de A con B consta de todos los elementos que están en A o en B; la __________ de A con B consta de todos los elementos que están en A y en B.
7. $P(5, 2) =$ __________; $C(5, 2) =$ __________
8. Un(a) __________ es un arreglo ordenado de n objetos distintos.
9. Un(a) __________ es un arreglo de n objetos distintos sin importar el orden.
10. Cuando se asigna la misma probabilidad a cada resultado de un espacio muestral se dice que se tienen resultados __________ __________.

CIERTO O FALSO

C F 1. Una sucesión aritmética es una función.
C F 2. Para sucesiones aritméticas, la diferencia entre términos sucesivos siempre es el mismo número.
C F 3. Para sucesiones geométricas, la razón entre términos sucesivos siempre es el mismo número.
C F 4. La inducción matemática puede ser usada algunas veces para probar teoremas que involucren números naturales.
C F 5. $\binom{n}{j} = \dfrac{j!}{n!(n-j)!}$
C F 6. El desarrollo de $(x + a)^n$ tiene n términos.
C F 7. $\sum_{i=1}^{n+1} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$
C F 8. La intersección de dos conjuntos siempre es un subconjunto de su unión.
C F 9. $P(n, r) = \dfrac{n!}{r!}$
C F 10. En un problema de combinaciones, el orden no es importante.
C F 11. En un problema de permutaciones, una vez que un objeto es utilizado no puede ser repetido.
C F 12. La probabilidad de un evento nunca puede ser cero.

EJERCICIOS DE REPASO

En los problemas del 1 al 8 evalúe cada expresión.

1. $5!$ **2.** $6!$ **3.** $\binom{5}{2}$ **4.** $\binom{8}{6}$ **5.** $P(8, 3)$ **6.** $P(7, 3)$ **7.** $C(8, 3)$ **8.** $C(7, 3)$

En los problemas del 9 al 16 escriba los primeros cinco términos de cada sucesión.

9. $\left\{(-1)^n\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)\right\}$ **10.** $\{(-1)^{n+1}(2n+3)\}$ **11.** $\left\{\dfrac{2^n}{n^2}\right\}$

12. $\left\{\dfrac{e^n}{n}\right\}$ **13.** $a_1 = 3;\quad a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n$ **14.** $a_1 = 4;\quad a_{n+1} = -\frac{1}{4}a_n$

15. $a_1 = 2;\quad a_{n+1} = 2 - a_n$ **16.** $a_1 = -3;\quad a_{n+1} = 4 + a_n$

En los problemas del 17 al 28 determine si la sucesión dada es aritmética, geométrica o de ninguno de los dos tipos. Si la sucesión es aritmética, encuentre la diferencia común y la suma de los primeros n términos. Si es geométrica, encuentre la razón común y la suma de los primeros n términos.

17. $\{n+5\}$ **18.** $\{4n+3\}$ **19.** $\{2n^3\}$

20. $\{2n^2 - 1\}$ **21.** $\{2^{3n}\}$ **22.** $\{3^{2n}\}$

23. $0, 4, 8, 12, \ldots$ **24.** $1, -3, -7, -11, \ldots$ **25.** $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \ldots$

26. $5, -\frac{5}{3}, \frac{5}{9}, -\frac{5}{27}, \frac{5}{81}, \ldots$ **27.** $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$ **28.** $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{9}{8}, \frac{11}{10}, \ldots$

En los problemas del 29 al 34 encuentre el término indicado de cada sucesión.

29. Noveno término de $3, 7, 11, 15, \ldots$

30. Octavo término de $1, -1, -3, -5, \ldots$

31. Undécimo término de $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \ldots$

32. Undécimo término de $1, 2, 4, 8, \ldots$

33. Noveno término de $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, \ldots$

34. Noveno término de $\sqrt{2}, 2, 2^{3/2}, \ldots$

En los problemas del 35 al 38 encuentre una fórmula general para cada sucesión aritmética.

35. El séptimo término es 31, el vigésimo es 96.

36. El octavo término es -20, el decimoséptimo es -47.

37. El décimo término es 0, el decimoctavo es 8.

38. El duodécimo término es 30, el vigésimo segundo es 50.

En los problemas del 39 al 44 encuentre la suma de cada serie geométrica infinita.

39. $3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots$

40. $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$

41. $2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \cdots$

42. $6 - 4 + \frac{8}{3} - \frac{16}{9} + \cdots$

43. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

44. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 3\left(-\frac{3}{4}\right)^{k-1}$

En los problemas del 45 al 50, utilice el principio de inducción matemática para demostrar que el enunciado dado es verdadero para todos los números naturales.

45. $3 + 6 + 9 + \cdots + 3n = \dfrac{3n}{2}(n+1)$

46. $2 + 6 + 10 + \cdots + (4n-2) = 2n^2$

47. $2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^{n-1} = 3^n - 1$

48. $3 + 6 + 12 + \cdots + 3 \cdot 2^{n-1} = 3(2^n - 1)$

49. $1^2 + 4^2 + 7^2 + \cdots + (3n-2)^2 = \frac{1}{2}n(6n^2 - 3n - 1)$

50. $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(n+2) = \dfrac{n}{6}(n+1)(2n+7)$

En los problemas del 51 al 54 desarrolle cada expresión usando el teorema del binomio.

51. $(x+2)^5$ **52.** $(x-3)^4$ **53.** $(2x+3)^5$ **54.** $(3x-4)^4$

55. Encuentre el coeficiente de x^7 en el desarrollo de $(x+2)^9$.

56. Encuentre el coeficiente de x^3 en el desarrollo de $(x-3)^8$.

57. Encuentre el coeficiente de x^2 en el desarrollo de $(2x+1)^7$.

58. Encuentre el coeficiente de x^6 en el desarrollo de $(2x+1)^8$.

En los problemas del 59 al 66, utilice U = conjunto universal = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{3, 5, 6, 7, 8\}$ y $C = \{2, 3, 7, 8, 9\}$ para encontrar cada conjunto.

59. $A \cup B$ **60.** $B \cup C$ **61.** $A \cap C$ **62.** $A \cap B$

63. $A' \cup B'$ **64.** $B' \cap C'$ **65.** $(B \cap C)'$ **66.** $(A \cup B)'$

67. Si $n(A) = 8$, $n(B) = 12$ y $n(A \cap B) = 3$, encuentre $n(A \cup B)$.

68. Si $n(A) = 12$, $n(A \cup B) = 30$, y $n(A \cap B) = 6$, encuentre $n(B)$.

En los problemas del 69 al 74 utilice la información proporcionada en la figura:

69. ¿Cuántos están en A?

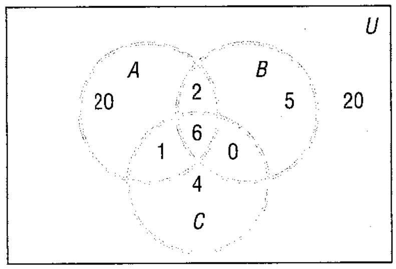
70. ¿Cuántos están en A o en B?

71. ¿Cuántos están en A y en C?

72. ¿Cuántos no están en B?

73. ¿Cuántos no están en A ni en C?

74. ¿Cuántos están en B pero no en C?



75. Un almacén de ropa vende trajes de lana pura y de poliéster con lana. Cada traje viene en 3 colores y 10 tallas. ¿Cuántos trajes se necesitan para tener un surtido completo?

76. En la conexión de cierto dispositivo eléctrico, 5 alambres están conectados a 5 terminales diferentes. ¿Cuántos contactos son posibles si se conecta un alambre a cada terminal?

77. *Béisbol.* En un día determinado, la Liga Americana de béisbol programa 7 partidos. ¿Cuántos resultados diferentes son posibles, suponiendo que cada partido se juega completo?

78. *Béisbol.* En un día determinado, la Liga Nacional de béisbol programa 6 juegos. ¿Cuántos resultados diferentes son posibles, suponiendo que cada partido se juega completo?

79. Si 4 personas suben a un autobús que tiene 9 asientos desocupados, ¿en cuántas formas se pueden sentar?

80. ¿Cuántos arreglos diferentes son posibles con las letras de la palabra ROSE?

81. Un equipo de 4 corredores de relevos, ¿de cuántas maneras puede ser seleccionado de un equipo de 8 corredores de pista?

82. Una profesora tiene 10 problemas semejantes para poner en un examen de 3 preguntas. ¿Cuántos exámenes diferentes puede diseñar?

83. *Béisbol.* ¿De cuántas maneras diferentes pueden formarse parejas con los 14 equipos de la Liga Americana, sin tomar en cuenta cuál equipo es anfitrión?

84. *Acomodo de libros en un estante.* Se tienen 5 libros diferentes de francés y 5 libros diferentes de español. ¿Cuántas formas hay de acomodarlos en un estante si:
(a) Los libros del mismo lenguaje deben ir juntos, francés a la izquierda, español a la derecha?
(b) ¿Los libros de francés y español deben alternarse, empezando con un libro de francés?

85. *Números telefónicos.* Usando los dígitos 0, 1, 2, . . . , 9, ¿cuántos números de 7 dígitos pueden ser formados si el primer dígito no puede ser 0 ni 9, y si el último dígito es mayor o igual a 2 y menor o igual que 3? Se permite repetir los dígitos.

86. *Selección de una casa.* Un contratista construye casas con 5 tipos diferentes de acabado exterior, 3 tipos de techos y 4 diseños distintos de ventanas. ¿Cuántos estilos diferentes de casa puede construir?

87. *Posibles placas de un automóvil.* Una placa consta de una letra, exceptuando O e I, seguida por un número de 4 dígitos que no pueden tener al 0 en la primera posición. ¿Cuántas placas son posibles?

88. Si se usan los dígitos 0 y 1, ¿cuántos números diferentes de 8 dígitos pueden ser creados?

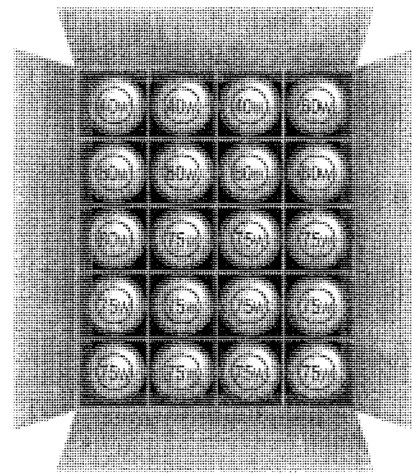
89. *Formación de palabras diferentes.* ¿Cuántas palabras diferentes pueden ser creadas usando todas las letras de la palabra MISSING?

90. *Arreglo de banderas.* ¿Cuántos arreglos verticales pueden hacerse con 10 banderas si 4 son blancas, 3 azules, 2 verdes y 1 es roja?

91. *Formación de comités.* Un grupo de 9 personas va a formar comités de 4, 3 y 2 personas. ¿Cuántos comités pueden formarse si:
(a) Una persona puede servir en cualquier número de comités?
(b) ¿Ninguna persona puede estar en más de un comité?

92. *Formación de comités.* De un grupo de 5 hombres y 8 mujeres se formará un comité de 4, y la política dicta que al menos una mujer debe estar en el comité.
(a) ¿Cuántos comités que incluyan a un hombre pueden formarse?
(b) ¿Cuántos comités que incluyan a 2 mujeres pueden formarse?
(c) ¿Cuántos comités que tengan al menos a un hombre pueden formarse?

93. De una caja con tres focos de 40 wats, seis de 60 wats y once de 75 wats se saca un foco al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que se saque un foco de 40 wats? ¿Cuál es la probabilidad de que no sea de 75 wats?



94. En su bolsa usted tiene cuatro monedas de \$1.00, tres de \$5.00 y dos de \$10.00. Si saca una moneda al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una de \$1.00?

95. Cada una de las letras de la palabra ROSE es escrita en una tarjeta y luego las tarjetas se revuelven. ¿Cuál es la probabilidad de que, cuando las tarjetas sean repartidas y siguiendo el orden de repartición, pueda deletrearse la palabra ROSE?

96. Cada uno de los números, 1, 2, . . . , 100 es escrito en una tarjeta y las tarjetas se revuelven. Si se selecciona al azar una tarjeta, ¿cuál es la probabilidad de que el número escrito en ella sea divisible entre 5? ¿Cuál es la probabilidad de que la tarjeta seleccionada sea un uno o un número primo?

97. *Cálculo de probabilidades.* A causa de un error al empacar, una caja con 12 botellas de vino tinto contiene 5 Merlot y 7 Cabernet, sin etiquetas. Todas las botellas se ven iguales y tienen la misma probabilidad de ser elegidas. Se seleccionan tres.
(a) ¿Cuál es la probabilidad de que las 3 sean Merlot?
(b) ¿Cuál es la probabilidad de que 2 sean Merlot?
(c) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna sea Merlot?

98. *Lanzamiento de una moneda.* Una moneda no cargada es lanzada 10 veces.
(a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente 5 águilas?
(b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener águila todas las veces?

99. *Construcción de una escalera de ladrillos.* Una escalera de ladrillos debe tener 25 escalones. El escalón inferior requiere de 80 ladrillos y cada escalón sucesivo requiere tres ladrillos menos que el precedente.
(a) ¿Cuántos ladrillos se necesitan para el escalón superior?
(b) ¿Cuántos ladrillos se necesitan para construir la escalera?

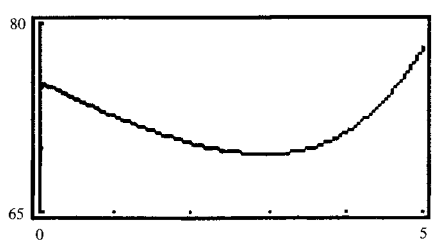
100. *Creación del diseño para un piso.* Un piso de mosaico de cerámica está diseñado en forma de trapecio, con 30 pies de ancho en la base y 15 pies de ancho en la parte superior. *Véase* la figura 5. Los mosaicos, de 12 por 12 pulgadas, serán colocados de modo que cada fila sucesiva tenga un mosaico menos que la fila anterior. ¿Cuántos mosaicos se necesitarán?

101. *Rebote de pelota.* Una pelota se deja caer desde una altura de 20 pies. Cada vez que la pelota pega contra el piso rebota hasta $\frac{3}{4}$ de la altura anterior.
(a) ¿A qué altura rebota la pelota después de golpear el piso por tercera vez?
(b) ¿Cuál es la altura después de que pega en el piso la n-ésima vez?
(c) ¿Cuántas veces necesita rebotar la pelota antes de que la altura del rebote sea menor de 6 pulgadas?
(d) ¿Cuál es la distancia total que recorre la pelota antes de detenerse?

102. *Aumento de salario.* Su amiga acaba de ser contratada con un salario anual de $20,000.00. Si ella espera recibir un aumento anual del 4%, ¿cuál será su salario al inicio del quinto año?

103. En un taller de ajuste y reparación de frenos, el administrador ha encontrado que cierto automóvil necesita ajuste con una probabilidad de 0.6, una reparación de frenos con probabilidad de 0.1, y ambas operaciones con una probabilidad de 0.02.
(a) ¿Cuál es la probabilidad de que el automóvil necesite ajuste o reparación de frenos?
(b) ¿Cuál es la probabilidad de que el automóvil necesite un ajuste pero no reparación de frenos?
(c) ¿Cuál es la probabilidad de que el automóvil no necesite ningún tipo de trabajo?

1. **(a)** -4 **(b)** -5 **(c)** -9 **(d)** -25 **3.** **(a)** 0 **(b)** $\frac{1}{2}$ **(c)** $-\frac{1}{2}$ **(d)** $\frac{3}{10}$ **5.** **(a)** 4 **(b)** 5 **(c)** 5 **(d)** 7
7. **(a)** $-\frac{1}{5}$ **(b)** $-\frac{3}{2}$ **(c)** $\frac{1}{8}$ **(d)** $\frac{7}{4}$ **9.** $f(0) = 3; f(-6) = -3$ **11.** Positivo **13.** -3, 6, y 10 **15.** $\{x|\ -6 \le x \le 11\}$
17. -3, 6, 10 **19.** 3 veces **21.** **(a)** No **(b)** -3 **(c)** 14 **(d)** $\{x|\ x \neq 6\}$ **23.** **(a)** Sí **(b)** $\frac{8}{17}$ **(c)** -1, 1 **(d)** Todos los números reales
25. No es una función
27. Función **(a)** Dominio: $\{x|\ -\pi \le x \le \pi\}$; Rango: $\{y|\ -1 \le y \le 1\}$ **(b)** Intersecciones: $(-\pi/2, 0)$, $(\pi/2, 0)$, $(0, 1)$ **(c)** eje y
29. No es función **31.** Función **(a)** Dominio: $\{x|\ x > 0\}$; Rango: Todos los números reales **(b)** Intersección: $(1, 0)$ **(c)** Ninguna
33. Función **(a)** Dominio: todos los números reales; Rango: $\{y|y \le 2\}$ **(b)** Intersecciones: $(-3, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 2)$ **(c)** eje y
35. Función **(a)** Dominio: $\{x|x \neq 2\}$; Rango: $\{y|y \neq 1\}$ **(b)** Intersecciones: $(0, 0)$ **(c)** Ninguna
37. Todos los números reales **39.** Todos los números reales **41.** $\{x|x \neq -1, x \neq 1\}$ **43.** $\{x|x \neq 0\}$ **45.** $\{x|x \ge 4\}$ **47.** $(-\infty, -3]$ o $[3, \infty)$
49. $(-\infty, 1)$ o $[2, \infty)$ **51.** $A = -\frac{7}{2}$ **53.** $A = -4$ **55.** $A = 8$; indefinida en 3
57. **(a)** 15.1 m, 14.07 m, 12.94 m, 11.72 m **(b)** 2.02 sec **59.** $A(x) = \frac{1}{2}x^2$ **61.** $G(x) = 5x$
65. **(a)** $C(x) = 10x + 14\sqrt{x^2 - 10x + 29}$, $0 < x < 5$ **(b)** $C(1) = \$72.61$ **(c)** $C(3) = \$69.60$

(d) 

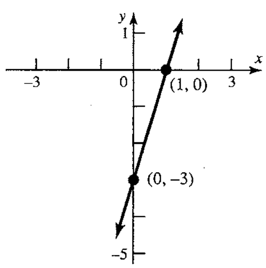
costo menor: $x = 2.95$ millas

67. **(a)** $A(x) = (8.5 - 2x)(11 - 2x)$, **(b)** $0 \le x \le 4.25$, $0 \le A \le 93.5$ **(c)** $A(1) = 58.5$ pulgadas.^{2}, $A(1.2) = 52.46$ pulgadas.^{2}, $A(1.5) = 44$ pulgadas.^{2} **(d)** $A(x) = 70$ cuando $x = 0.64$ pulgadas; $A(x) = 50$ cuando $x = 1.28$ pulgadas.

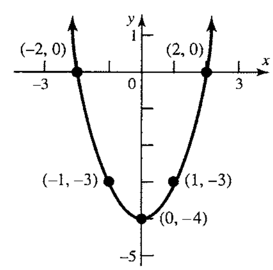
69. 1.11 segundos; 0.46 segundos **71.** Función **73.** Función **75.** No es función **77.** Función **79.** Sólo $h(x) = 2x$

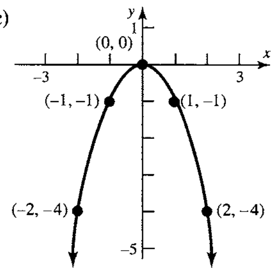
1. C **3.** E **5.** B **7.** F
9. **(a)** Dominio: $\{x \mid -3 \le x \le 4\}$; Rango: $\{y \mid 0 \le y \le 3\}$ **(b)** Creciente en $[-3, 0]$ y en $[2, 4]$; decreciente en $[0, 2]$ **(c)** Ninguna **(d)** $(-3, 0)$, $(0, 3)$, $(2, 0)$
11. **(a)** Dominio: todos los números reales; Rango: $\{y \mid 0 < y < \infty\}$ **(b)** Creciente en $(-\infty, \infty)$ **(c)** Ninguna **(d)** $(0, 1)$
13. **(a)** Dominio: $\{x \mid -\pi \le x \le \pi\}$; Rango: $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$ **(b)** Creciente en $[-\pi/2, \pi/2]$; decreciente en $[-\pi, -\pi/2]$ y en $[\pi/2, \pi]$ **(c)** Impar (simétrica con respecto al origen) **(d)** $(-\pi, 0)$, $(0, 0)$, $(\pi, 0)$
15. **(a)** Dominio: $\{x \mid x \ne 2\}$; Rango: $\{y \mid y \ne 1\}$ **(b)** Decreciente en $(-\infty, 2)$ y en $(2, \infty)$ **(c)** Ninguna **(d)** $(0, 0)$
17. **(a)** Dominio: $\{x \mid x \ne 0\}$; Rango: todos los números reales **(b)** Decreciente en $(-\infty, 0)$ y en $(0, \infty)$ **(c)** Impar **(d)** $(-1, 0)$, $(1, 0)$
19. **(a)** Dominio: $\{x \mid x \ne -2, x \ne 2\}$; Rango: $\{y \mid -\infty < y \le 0 \text{ y } 1 < y < \infty\}$ **(b)** Creciente en $(-\infty, -2)$ y en $(-2, 0]$; decreciente en $[0, 2)$ y en $(2, \infty)$ **(c)** Par **(d)** $(0, 0)$
21. **(a)** Dominio: $\{x \mid -4 \le x \le 4\}$; Rango: $\{y \mid 0 \le y \le 2\}$ **(b)** Creciente en $[-2, 0]$ y $[2, 4]$; Decreciente en $[-4, -2]$ y $[0, 2]$ **(c)** Par **(d)** $(-2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$
23. **(a)** 2 **(b)** 3 **(c)** -4 **25.** **(a)** 4 **(b)** 2 **(c)** 5
27. **(a)** $-2x + 5$ **(b)** $-2x - 5$ **(c)** $4x + 5$ **(d)** $2x - 1$ **(e)** $\frac{2}{x} + 5 = \frac{5x + 2}{x}$ **(f)** $\frac{1}{2x + 5}$
29. **(a)** $2x^2 - 4$ **(b)** $-2x^2 + 4$ **(c)** $8x^2 - 4$ **(d)** $2x^2 - 12x + 14$ **(e)** $\frac{2 - 4x^2}{x^2}$ **(f)** $\frac{1}{2x^2 - 4}$
31. **(a)** $-x^3 + 3x$ **(b)** $-x^3 + 3x$ **(c)** $8x^3 - 6x$ **(d)** $x^3 - 9x^2 + 24x - 18$ **(e)** $\frac{1}{x^3} - \frac{3}{x}$ **(f)** $\frac{1}{x^3 - 3x}$
33. **(a)** $-\frac{x}{x^2 + 1}$ **(b)** $-\frac{x}{x^2 + 1}$ **(c)** $\frac{2x}{4x^2 + 1}$ **(d)** $\frac{x - 3}{x^2 - 6x + 10}$ **(e)** $\frac{x}{x^2 + 1}$ **(f)** $\frac{x^2 + 1}{x}$
35. **(a)** $|x|$ **(b)** $-|x|$ **(c)** $2|x|$ **(d)** $|x - 3|$ **(e)** $\frac{1}{|x|}$ **(f)** $\frac{1}{|x|}$
37. **(a)** $1 - \frac{1}{x}$ **(b)** $-1 - \frac{1}{x}$ **(c)** $1 + \frac{1}{2x}$ **(d)** $1 + \frac{1}{x - 3}$ **(e)** $1 + x$ **(f)** $\frac{x}{x + 1}$
39. 3 **41.** -3 **43.** $3x + 1$ **45.** $x(x + 1)$ **47.** $\frac{-1}{x + 1}$ **49.** $\frac{1}{\sqrt{x} + 1}$
51. Impar **53.** Par **55.** Impar **57.** Ninguna **59.** Par **61.** Impar **63.** Cuando mucho uno

65. **(a)** Todos los números reales **(b)** $(0, -3)$, $(1, 0)$ **(d)** Todos los números reales **(c)**

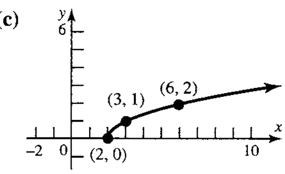


67. **(a)** Todos los números reales **(b)** $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -4)$ **(d)** $\{y \mid -4 \le y < \infty\}$ **(c)**

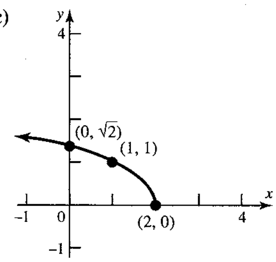


69. **(a)** Todos los números reales
(b) (0, 0)
(c)


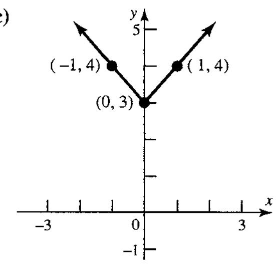
(d) $\{y| -\infty < y \leq 0\}$

71. **(a)** $\{x|2 \leq x < \infty\}$
(b) (2, 0)
(c)


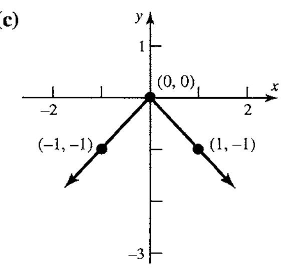
(d) $\{y|0 \leq y < \infty\}$

73. **(a)** $\{x|-\infty < x \leq 2\}$
(b) (2, 0), $(0, \sqrt{2})$
(c)


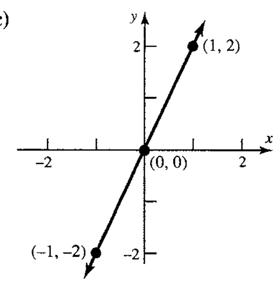
(d) $\{y|0 \leq y < \infty\}$

75. **(a)** Todos los números reales
(b) (0, 3)
(c)


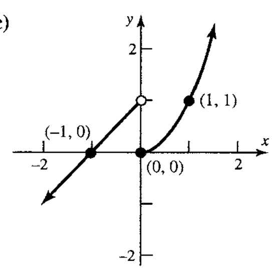
(d) $\{y|3 \leq y < \infty\}$

77. **(a)** Todos los números reales
(b) (0, 0)
(c)


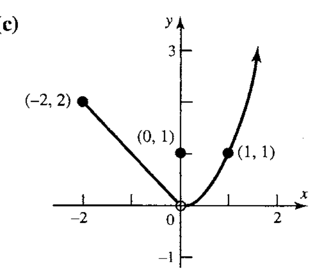
(d) $\{y| -\infty < y \leq 0\}$

79. **(a)** Todos los números reales
(b) (0, 0)
(c)


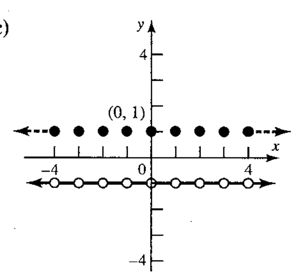
(d) Todos los números reales

81. **(a)** Todos los números reales
(b) (0, 0), (−1, 0)
(c)


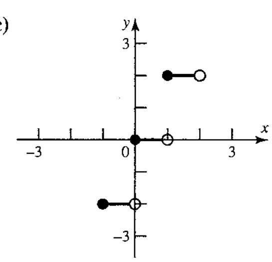
(d) Todos los números reales

83. **(a)** $\{x| -2 \leq x < \infty\}$
(b) (0, 1)
(c)


(d) $\{y|0 < y < \infty\}$

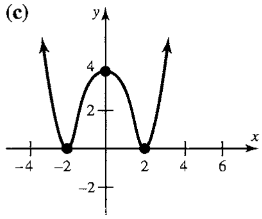
85. **(a)** Todos los números reales
(b) (0, 1)
(c)


(d) $\{-1, 1\}$

87. **(a)** Todos los números reales
(b) $(x, 0)$ para $0 \leq x < 1$
(c)


(d) Conjunto de enteros pares

89. **(a)** Todos los números reales
(b) $(-2, 0)$, $(0, 4)$, $(2, 0)$
(c)



(d) $\{y/y \geq 0\}$

91. 2 **93.** $2x + h + 2$ **95.** $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{si } 0 < x \leq 2 \end{cases}$ (Son posibles otras respuestas.)

97. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ -x + 2 & \text{si } 0 < x \leq 2 \end{cases}$ (Son posibles otras respuestas.)

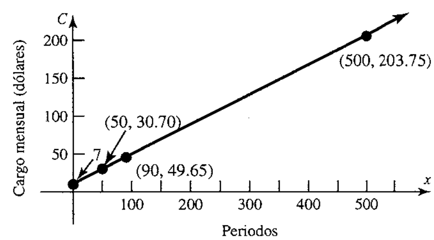
99. No; $f(-2) = 8$ y $f(2) = 6$

101. Cada gráfica es la de $y = x^2$, pero desplazada verticalmente. Si $y = x^2 + k$, $k > 0$, el desplazamiento es k unidades hacia arriba; Si $y = x^2 + k$, $k < 0$, el desplazamiento es $|k|$ unidades hacia abajo;

103. Cada gráfica es la de $y = |x|$, pero comprimida o alargada. Si $y = k|x|$ y $k > 1$, la gráfica es alargada; $y = k|x|$, $0 < k < 1$, la gráfica está comprimida.

105. La gráfica de $y = f(-x)$ es la reflexión con respecto al eje y de la gráfica de $y = f(x)$.

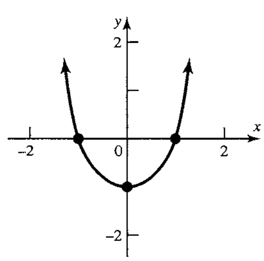
107. **(a)** \$30.70
(b) \$203.75
(c) $C = \begin{cases} 7 + 0.47395x & \text{si } 0 \leq x \leq 90 \\ 15.83 + 0.37583x & \text{si } x > 90 \end{cases}$
(d)



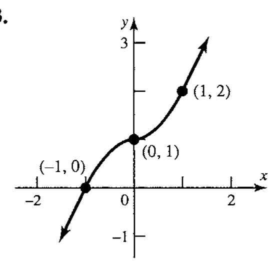
109. **(a)** $E(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) + f(x)] = E(x)$ **(b)** $O(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)] = -\frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = -O(x)$
(c) $E(x) + O(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = f(x)$ **(d)** Combinar los resultados de las partes **(a)**, **(b)** y **(c)**.

1. B **3.** H **5.** I **7.** L **9.** F **11.** G **13.** $y = (x - 4)^3$ **15.** $y = x^3 + 4$ **17.** $y = -x^3$ **19.** $y = 4x^3$

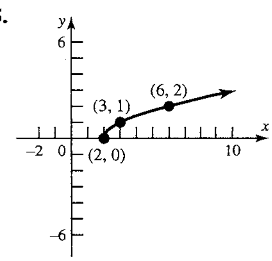
21.



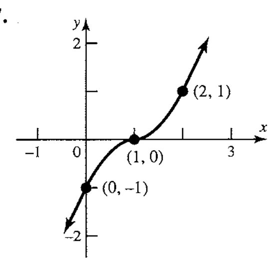
23.



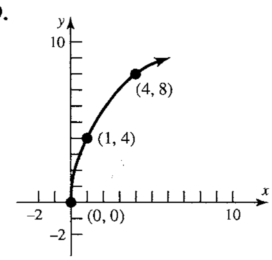
25.



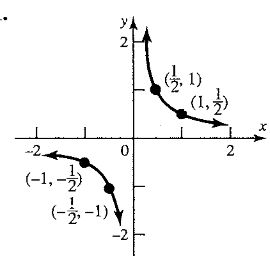
27.



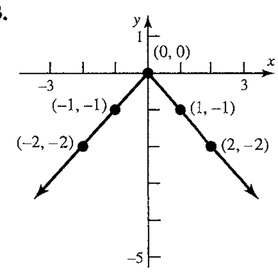
29.



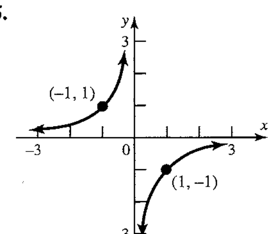
31.



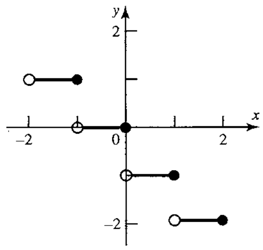
33.



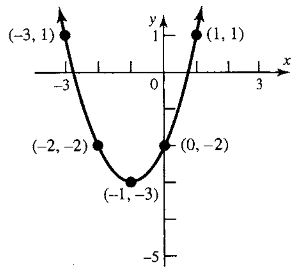
35.



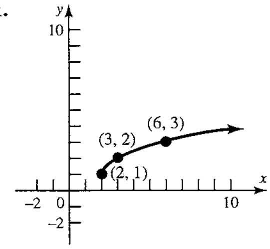
37.



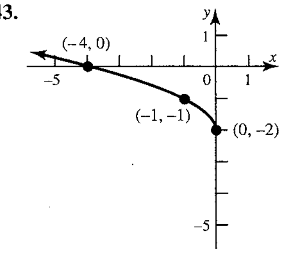
39.



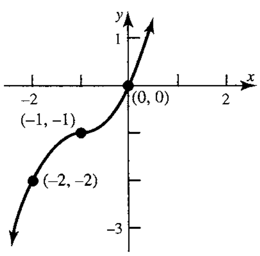
41.



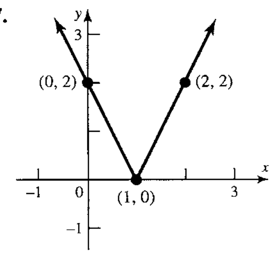
43.



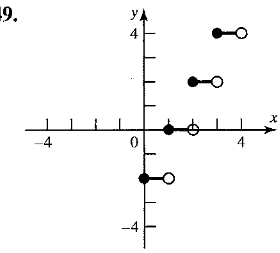
45.



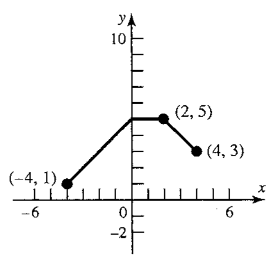
47.



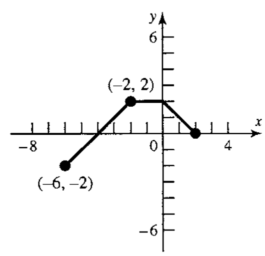
49.



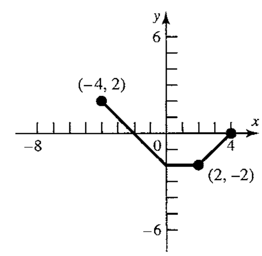
51. **(a)** $F(x) = f(x) + 3$



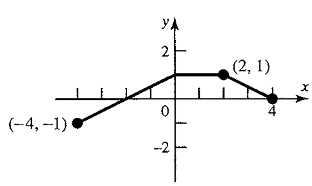
(b) $G(x) = f(x + 2)$



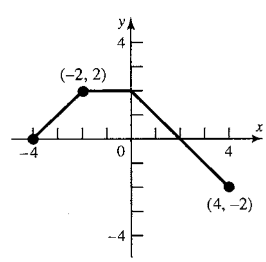
(c) $P(x) = -f(x)$



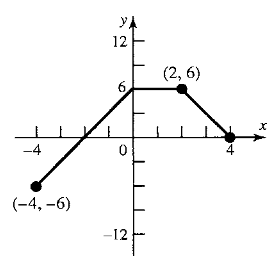
(d) $Q(x) = \frac{1}{2}f(x)$



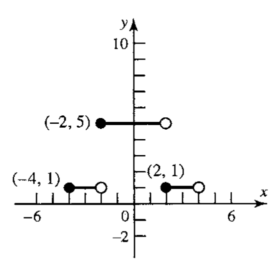
(e) $g(x) = f(-x)$



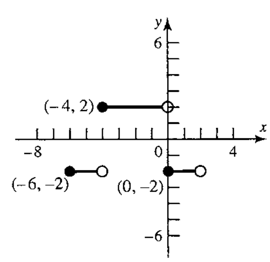
(f) $h(x) = 3f(x)$



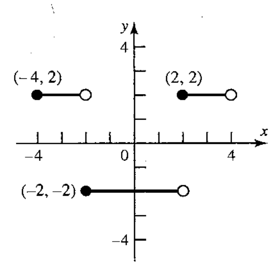
53. **(a)** $F(x) = f(x) + 3$



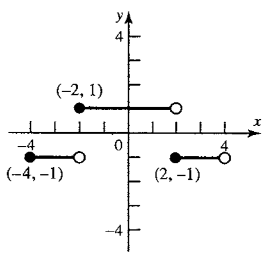
(b) $G(x) = f(x + 2)$



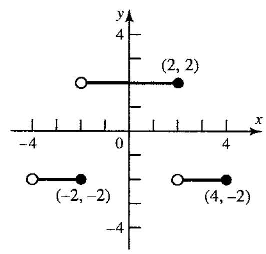
(c) $P(x) = -f(x)$



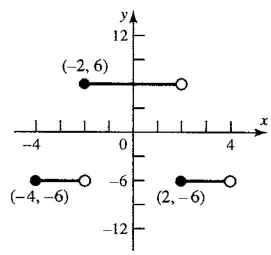
53. **(d)** $Q(x) = \frac{1}{2}f(x)$



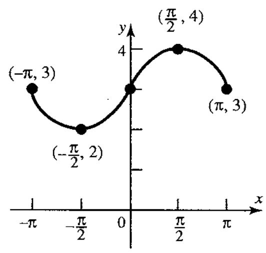
(e) $g(x) = f(-x)$



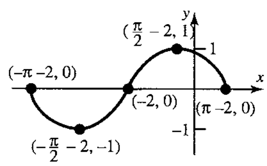
(f) $h(x) = 3f(x)$



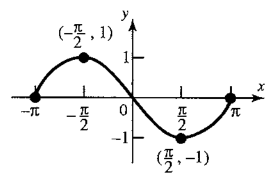
55. **(a)** $F(x) = f(x) + 3$



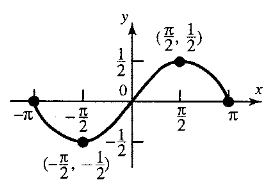
(b) $G(x) = f(x + 2)$



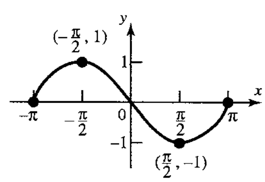
(c) $P(x) = -f(x)$



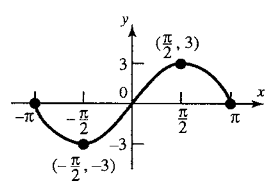
(d) $Q(x) = \frac{1}{2}f(x)$



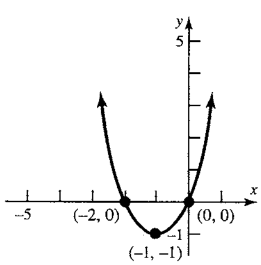
(e) $g(x) = f(-x)$



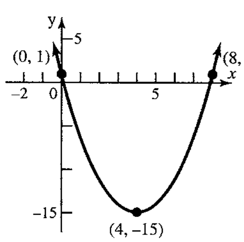
(f) $h(x) = 3f(x)$



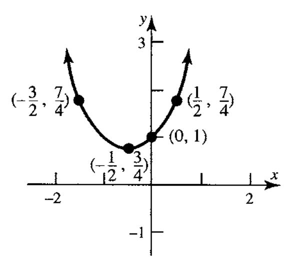
57. $f(x) = (x + 1)^2 - 1$



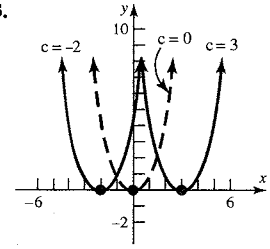
59. $f(x) = (x - 4)^2 - 15$



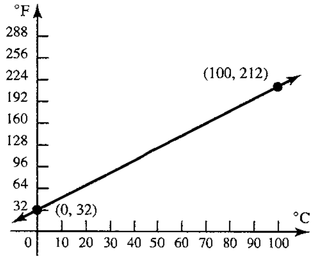
61. $f(x) = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$

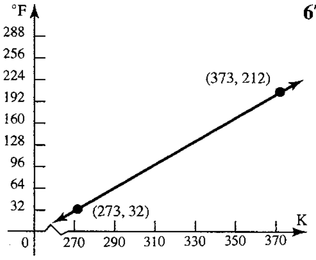


63.

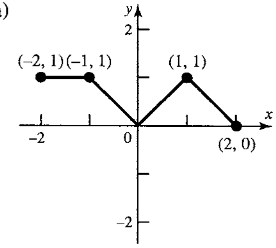


65.

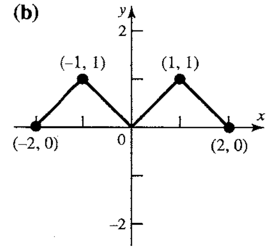




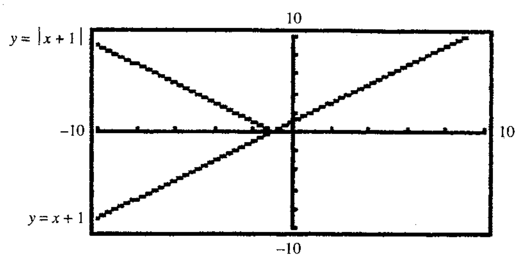
67. **(a)**



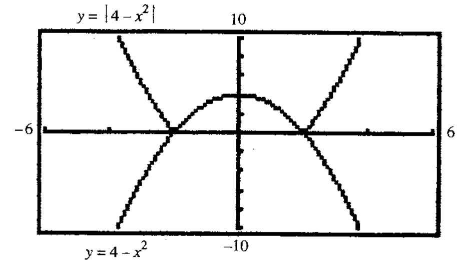
(b)



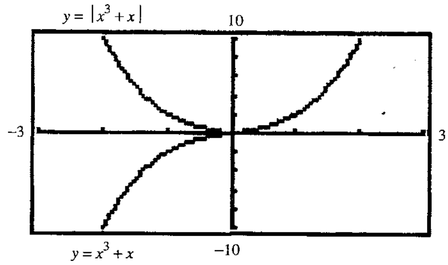
69. (a)



(b)



(c)



(d) Cualquier parte de la gráfica de $y = f(x)$ que esté abajo del eje x está reflejada con respecto al eje x para obtener la gráfica de $y = |f(x)|$.

1. (a) $(f + g)(x) = 5x + 1$; todos los números reales (b) $(f - g)(x) = x + 7$; todos los números reales
(c) $(f \cdot g)(x) = 6x^2 - x - 12$; todos los números reales (d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{3x + 4}{2x - 3}$; todos los números reales $x = \frac{3}{2}$

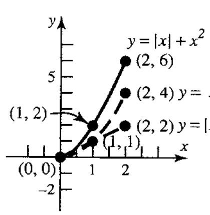
3. (a) $(f + g)(x) = 2x^2 + x - 1$; todos los números reales (b) $(f - g)(x) = -2x^2 + x - 1$; todos los números reales
(c) $(f \cdot g)(x) = 2x^3 - 2x^2$; todos los números reales (d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x - 1}{2x^2}$; $\{x|x \neq 0\}$

5. (a) $(f + g)(x) = \sqrt{x} + 3x - 5$; $\{x|x \geq 0\}$ (b) $(f - g)(x) = \sqrt{x} - 3x + 5$; $\{x|x \geq 0\}$ (c) $(f \cdot g)(x) = 3x\sqrt{x} - 5\sqrt{x}$; $\{x|x \geq 0\}$
(d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{3x - 5}$; $\{x|x \geq 0, x \neq \frac{5}{3}\}$

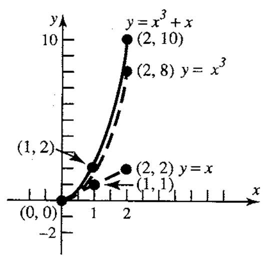
7. (a) $(f + g)(x) = 1 + \frac{2}{x}$; $\{x|x \neq 0\}$ (b) $(f - g)(x) = 1$; $\{x|x \neq 0\}$ (c) $(f \cdot g)(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$; $\{x|x \neq 0\}$ (d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x + 1$; $\{x|x \neq 0\}$

9. (a) $(f + g)(x) = \frac{6x + 3}{3x - 2}$; $\{x|x \neq \frac{2}{3}\}$ (b) $(f - g)(x) = \frac{-2x + 3}{3x - 2}$; $\{x|x \neq \frac{2}{3}\}$ (c) $(f \cdot g)(x) = \frac{8x^2 + 12x}{(3x - 2)^2}$; $\{x|x \neq \frac{2}{3}\}$
(d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x + 3}{4\,x}$; $\{x|x \neq 0, \frac{2}{3}\}$ **11.** $g(x) = 5 - \frac{7}{2}x$

13.



15.



17. (a) 98 (b) 49 (c) 4 (d) 4 **19.** (a) 97 (b) $-\frac{163}{2}$ (c) 1 (d) $-\frac{3}{2}$ **21.** (a) $2\sqrt{2}$ (b) $2\sqrt{2}$ (c) 1 (d) 0
23. (a) $\frac{1}{17}$ (b) $\frac{1}{5}$ (c) 1 (d) $\frac{1}{2}$ **25.** (a) $\frac{3}{5}$ (b) $\sqrt{15}/5$ (c) $\frac{12}{13}$ (d) 0

27. (a) $(f \circ g)(x) = 6x + 3$ todos los números reales
(b) $(g \circ f)(x) = 6x + 9$ todos los números reales
(c) $(f \circ f)(x) = 4x + 9$ todos los números reales
(d) $(g \circ g)(x) = 9x$ todos los números reales

29. (a) $(f \circ g)(x) = 3x^2 + 1$ todos los números reales
(b) $(g \circ f)(x) = 9x^2 + 6x + 1$ todos los números reales
(c) $(f \circ f)(x) = 9x + 4$ todos los números reales
(d) $(g \circ g)(x) = x^4$ todos los números reales

31. **(a)** $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$; $\{x \mid |x| \geq 1\}$
(b) $(g \circ f)(x) = x - 1$; $\{x \mid |x| \geq 1\}$
(c) $(f \circ f)(x) = \sqrt[4]{x}$; $\{x \mid x \geq 0\}$
(d) $(g \circ g)(x) = x^4 - 2x^2$; todos los números reales

33. **(a)** $(f \circ g)(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$; $\{x \mid x \neq -1, x \neq 0\}$
(b) $(g \circ f)(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$; $\{x \mid x \neq -1, x \neq 1\}$
(c) $(f \circ f)(x) = -\dfrac{1}{x}$; $\{x \mid x \neq -1, x \neq 0\}$
(d) $(g \circ g)(x) = x$; $\{x \mid x \neq 0\}$

35. **(a)** $(f \circ g)(x) = x$; $\{x \mid x \geq 0\}$
(b) $(g \circ f)(x) = |x|$; todos los números reales
(c) $(f \circ f)(x) = x^4$ todos los números reales
(d) $(g \circ g)(x) = \sqrt[4]{x}$; $\{x \mid x \geq 0\}$

37. **(a)** $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{4x + 9}$; $\{x \mid x \neq - \ \}$
(b) $(g \circ f)(x) = \dfrac{2}{2x + 3} + 3 = \dfrac{6x + 11}{2x + 3}$; $\{x \mid x \neq - \ \}$
(c) $(f \circ f)(x) = \dfrac{2x + 3}{6x + 11}$; $\{x \mid x \neq - \ , \ x \neq - \ \}$
(d) $(g \circ g)(x) = 4x + 9$; todos los números reales

39. **(a)** $(f \circ g)(x) = acx + ad + b$; todos los números reales
(b) $(g \circ f)(x) = acx + bc + d$; todos los números reales
(c) $(f \circ f)(x) = a^2x + ab + b$; todos los números reales
(d) $(g \circ g)(x) = c^2x + cd + d$; todos los números reales

41. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\frac{1}{2}x) = 2(\frac{1}{2}x) = x$; $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = \frac{1}{2}(2x) = x$

43. $(f \circ g)(x) = f(\sqrt[3]{x}) = (\sqrt[3]{x})^3 = x$; $(g \circ f)(x) = g(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x$

45. $(f \circ g)(x) = f(\frac{1}{2}(x + 6)) = 2[\frac{1}{2}(x + 6)] - 6 = x + 6 - 6 = x$; $(g \circ f)(x) = g(2x - 6) = \frac{1}{2}(2x - 6 + 6) = x$

47. $(f \circ g)(x) = f\left(\dfrac{1}{a}(x - b)\right) = a\left[\dfrac{1}{a}(x - b)\right] + b = x$; $(g \circ f)(x) = g(ax + b) = \dfrac{1}{a}\left(ax + b - b\right) = x$

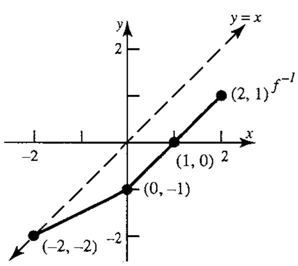
49. $(f \circ g)(x) = 11$; $(g \circ f)(x) = 2$ **51.** $(f \circ (g \circ h))(x) = 5 - 3x + 4\sqrt{1 - 3x}$ **53.** $((f + g) \circ h)(x) = 9x^2 - 6x + 3 + \sqrt{1 - 3x}$ **55.** $F = f \circ g$

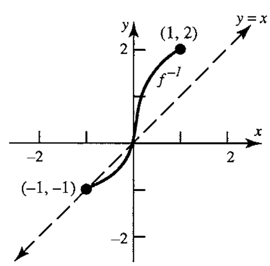
57. $H = h \circ f$ **59.** $q = f \circ h$ **61.** $P = f \circ f$ **63.** $f(x) = x^4$; $g(x) = 2x + 3$ **65.** $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 + x + 1$ **67.** $f(x) = x^2$; $g(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

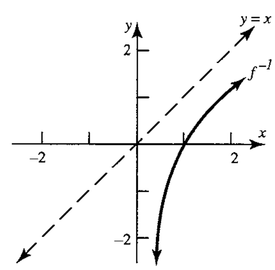
69. $f(x) = [[x]]$; $g(x) = x^2 + 1$ **71.** $-3, 3$ **73.** $S(r(t)) = \frac{16}{9}\pi t^6$ **75.** $C(N(t)) = 15000 + 800{,}000t - 40{,}000t^2$ **77.** $C = \dfrac{2\sqrt{100 - p}}{25} + 600$

79. Ya que f y g son impares, $f(-x) = -f(x)$ y $g(-x) = -g(x)$; $(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = -f(g(x)) = -(f \circ g)(x)$; así que, $f \circ g$ es impar.

1. Uno a uno
3. No es uno a uno
5. Uno a uno

7.


9.


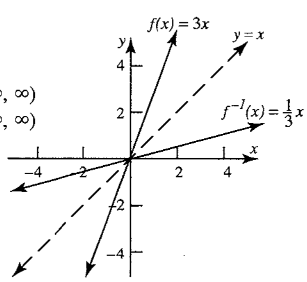
11.


13. $f(g(x)) = f(\frac{1}{3}(x - 4)) = 3[\frac{1}{3}(x - 4)] + 4 = x$; $g(f(x)) = g(3x + 4) = \frac{1}{3}[(3x + 4) - 4] = x$

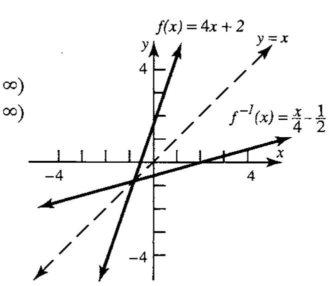
15. $f(g(x)) = 4\left[\dfrac{x}{4} + 2\right] - 8 = x$; $g(f(x)) = \dfrac{4x - 8}{4} + 2 = x$ **17.** $f(g(x)) = (\sqrt[3]{x + 8})^3 - 8 = x$; $g(f(x)) = \sqrt[3]{(x^3 - 8) + 8} = x$

19. $f(g(x)) = \dfrac{1}{1/x} = x$; $g(f(x)) = \dfrac{1}{1/x} = x$ **21.** $f(g(x)) = \dfrac{2\left(\dfrac{4x - 3}{2 - x}\right) + 3}{\dfrac{4x - 3}{2 - x} + 4} = \dfrac{8x - 3x}{-3 + 8} = x$; $g(f(x)) = \dfrac{4\left(\dfrac{2x + 3}{x + 4}\right) - 3}{2 - \dfrac{2x + 3}{x + 4}} = x$

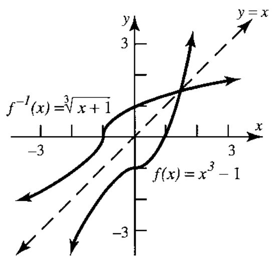
23. $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x$
$f(f^{-1}(x)) = 3(\frac{1}{3}x) = x$
$f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{3}(3x) = x$
Dominio f = Rango $f^{-1} = (-\infty, \infty)$
Rango f = Dominio $f^{-1} = (-\infty, \infty)$



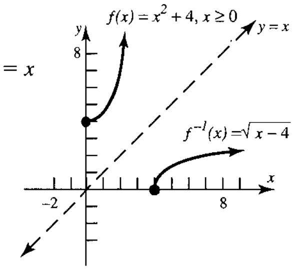
25. $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{2}$
$f(f^{-1}(x)) = 4\left(\dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{2}\right) + 2 = x$
$f^{-1}(f(x)) = \dfrac{4x + 2}{4} - \dfrac{1}{2} = x$
Dominio f = Rango $f^{-1} = (-\infty, \infty)$
Rango f = Dominio $f^{-1} = (-\infty, \infty)$



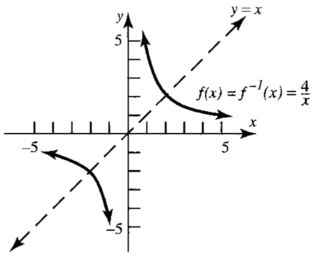
27. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$
$f(f^{-1}(x)) = (\sqrt[3]{x+1})^3 - 1 = x$
$f^{-1}(f(x)) = \sqrt[3]{x^3 - 1 + 1} = x$
Dominio f = Rango $f^{-1} = (-\infty, \infty)$
Rango f = Dominio $f^{-1} = (-\infty, \infty)$



29. $f^{-1}(x) = \sqrt{x-4}$
$f(f^{-1}(x)) = (\sqrt{x-4})^2 + 4 = x$
$f^{-1}(f(x)) = \sqrt{(x^2+4) - 4} = \sqrt{x^2} = |x| = x$
Dominio f = Rango $f^{-1} = [0, \infty)$
Rango f = Dominio $f^{-1} = [4, \infty)$

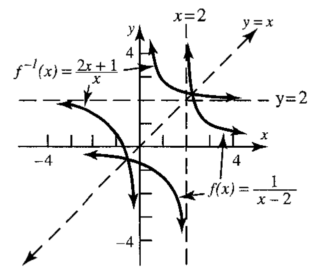


31. $f^{-1}(x) = \dfrac{4}{x}$
$f(f^{-1}(x)) = \dfrac{4}{4/x} = x$
$f^{-1}(f(x)) = \dfrac{4}{4/x} = x$



Dominio f = Rango f^{-1} = Todos los números reales excepto 0
Rango f = Dominio f^{-1} = Todos los números reales excepto 0

33. $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{x}$
$$f(f^{-1}(x)) = \frac{1}{\dfrac{2x+1}{x} - 2} = x$$
$$f^{-1}(f(x)) = \frac{2\left(\dfrac{1}{x-2}\right) + 1}{\dfrac{1}{x-2}} = x$$



Dominio f = Rango f^{-1} = Todos los números reales excepto 2
Rango f = Dominio f^{-1} = Todos los números reales excepto 0

35. $f^{-1}(x) = \dfrac{2-3x}{x}$
$$f(f^{-1}(x)) = \frac{2}{3 + \dfrac{2-3x}{x}} = x$$
$$f^{-1}(f(x)) = \frac{2 - 3\left(\dfrac{2}{3+x}\right)}{\dfrac{2}{3+x}} = x$$
Dominio f = Rango f^{-1} = Todos los números reales excepto -3
Rango f = Dominio f^{-1} = Todos los números reales excepto 0

37. $f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 2$
$f(f^{-1}(x)) = (\sqrt{x} - 2 + 2)^2 = x$
$f^{-1}(f(x)) = \sqrt{(x+2)^2} - 2 = |x+2| - 2 = x$
Dominio f = Rango $f^{-1} = [-2, \infty)$
Rango f = Dominio $f^{-1} = [0, \infty)$

39. $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{x-2}$
$$f(f^{-1}(x)) = \frac{2\left(\dfrac{x}{x-2}\right)}{\dfrac{x}{x-2} - 1} = x$$
$$f^{-1}(f(x)) = \frac{\dfrac{2x}{x-1}}{\dfrac{2x}{x-1} - 2} = x$$
Dominio f = Rango f^{-1} = Todos los números reales excepto 1
Rango f = Dominio f^{-1} = Todos los números reales excepto 2

41. $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+4}{2x-3}$
$$f(f^{-1}(x)) = \frac{3\left(\dfrac{3x+4}{2x-3}\right) + 4}{2\left(\dfrac{3x+4}{2x-3}\right) - 3} = x$$
$$f^{-1}(f(x)) = \frac{3\left(\dfrac{3x+4}{2x-3}\right) + 4}{2\left(\dfrac{3x+4}{2x-3}\right) - 3} = x$$
Dominio f = Rango f^{-1} = Todos los números reales excepto $\frac{3}{2}$
Rango f = Dominio f^{-1} = Todos los números reales excepto $\frac{3}{2}$

43. $f^{-1}(x) = \dfrac{-2x+3}{x-2}$

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{2\left(\dfrac{-2x+3}{x-2}\right)+3}{\dfrac{-2x+3}{x-2}+2} = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{-2\left(\dfrac{2x+3}{x+2}\right)+3}{\dfrac{2x+3}{x+2}-2} = x$$

Dominio f = Rango f^{-1} = Todos los números reales excepto -2
Rango f = Dominio f^{-1} = Todos los números reales excepto 2

45. $f^{-1}(x) = \dfrac{x^3}{8}$

$$f(f^{-1}(x)) = 2\sqrt[3]{\frac{x^3}{8}} = x$$

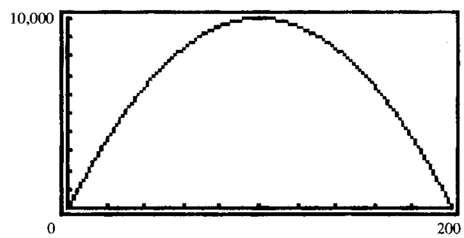
$$f^{-1}(f(x)) = \frac{(2\sqrt[3]{x})^3}{8} = x$$

Dominio f = Rango f^{-1} = $(-\infty, \infty)$
Rango f = Dominio f^{-1} = $(-\infty, \infty)$

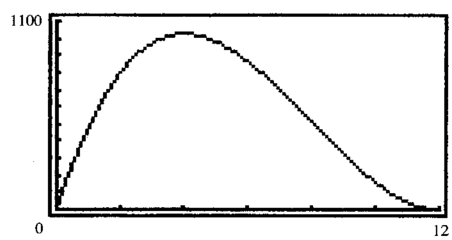
47. $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{m}(x-b),\ m \neq 0$ **49.** No; siempre que x y $-x$ estén en el dominio de f, dos valores iguales de y, $f(x)$ y $f(-x)$, están presentes.
51. Primer cuadrante **53.** $f(x) = |x|,\ x \geq 0$ es uno a uno, esto puede escribirse como $f(x) = x$; $f^{-1}(x) = x$
55. $f(g(x)) = \frac{9}{5}\left[\frac{5}{9}(x-32)\right] + 32 = x$; $g(f(x)) = \frac{5}{9}\left[\left(\frac{9}{5}x+32\right) - 32\right] = x$ **57.** $l(T) = gT^2/4\pi^2$ **59.** $f^{-1}(x) = \dfrac{-dx+b}{cx-a}$; $f = f^{-1}$ Si $a = -d$

Ejercicio 2.5

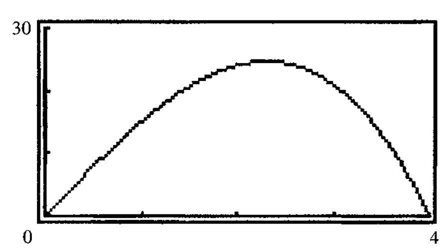
1. $V(r) = 2\pi r^3$ **3.** $R(x) = -\frac{1}{6}x^2 + 100x$ **5.** $R(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 20x$ **7.** **(a)** $A(x) = -x^2 + 200x$ **(b)** $0 < x < 200$ **(c)** A es más grande cuando $x = 100$ yardas



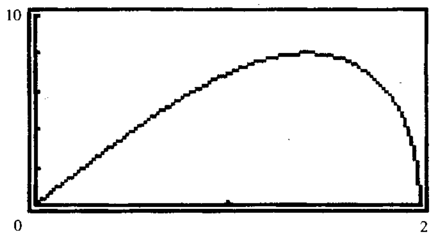
9. **(a)** $C(x) = x$ **(b)** $A(x) = \dfrac{x^2}{4\pi}$ **11.** $A(x) = \frac{1}{2}x^4$ **13.** **(a)** $d(x) = \sqrt{x^4 - 15x^2 + 64}$ **(b)** $d(0) = 8$ **(c)** $d(1) = \sqrt{50} = 7.07$
15. $d(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$ **17.** $d(t) = 50t$ **19.** **(a)** $V(x) = x(24-2x)^2$ **(b)** El volumen mayor es cuando x es 4



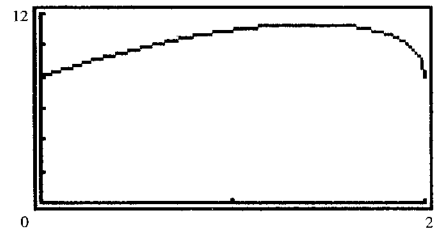
21. **(a)** $A(x) = 2x^2 + \dfrac{40}{x}$ **(b)** El área es más pequeña cuando x está cerca de 2.15 **23.** **(a)** $A(x) = x(16 - x^2)$ **(b)** Dominio: $\{x \mid 0 < x < 4\}$
(c) El área es mayor para x cerca de 2.31



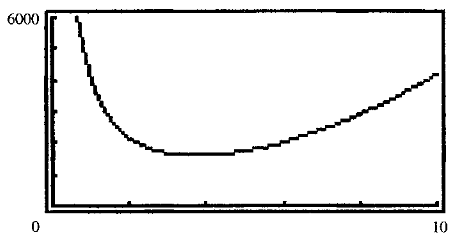
25. **(a)** $A(x) = 4x(4 - x^2)^{1/2}$ **(b)** $p(x) = 4x + 4(4 - x^2)^{1/2}$
(c) El área es mayor para x cerca de 1.41



(d) El perímetro es mayor para x alrededor de 1.41



27. **(a)** $C(r) = 12\pi r^2 + \dfrac{4000}{r}$
(b) El costo es menor para r en alrededor de 3.75 centímetros

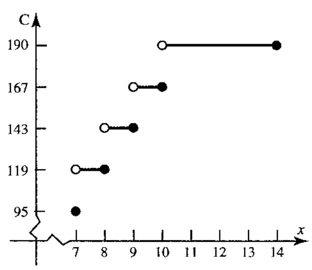


29. **(a)** $A(x) = x^2 + \dfrac{25 - 20x + 4x^2}{\pi}$ **(b)** Dominio: $\{x|0 < x < 2.5\}$
(c) El área es menor para x en alrededor de 1.40 metros

31. **(a)** $A(r) = 2r^2$ **(b)** $p(r) = 6r$

33. $A(x) = \left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)x^2$

35. $C = \begin{cases} 95 & \text{si } x = 7 \\ 119 & \text{si } 7 < x \leq 8 \\ 143 & \text{si } 8 < x \leq 9 \\ 167 & \text{si } 9 < x \leq 10 \\ 190 & \text{si } 10 < x \leq 14 \end{cases}$



37. $V(h) = \dfrac{\pi}{48}h^3$

Complete en los espacios

1. independiente; dependiente **2.** vertical **3.** par; impar **4.** horizontal; derecha **5.** $g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ **6.** uno a uno **7.** $y = x$

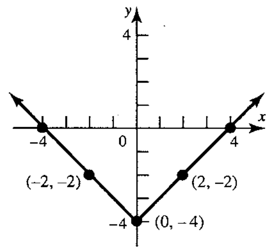
Cierto o falso

1. C **2.** C **3.** F **4.** C **5.** F **6.** F **7.** C

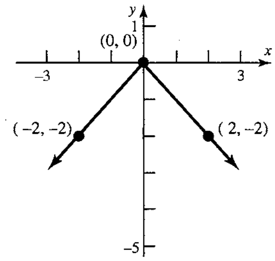
Ejercicios de revisión

1. $f(x) = -2x + 3$ **3.** $A = 11$ **5.** **(a)** B, C, D **(b)** D **7.** **(a)** $f(-x) = \dfrac{-3x}{x^2 - 4}$ **(b)** $-f(x) = \dfrac{-3x}{x^2 - 4}$ **(c)** $f(x + 2) = \dfrac{3x + 6}{x^2 + 4x}$ **(d)** $f(x - 2) = \dfrac{3x - 6}{x^2 - 4x}$ **9.** **(a)** $f(-x) = \sqrt{x^2 - 4}$ **(b)** $-f(x) = -\sqrt{x^2 - 4}$ **(c)** $f(x + 2) = \sqrt{x^2 + 4x}$ **(d)** $f(x - 2) = \sqrt{x^2 - 4x}$
11. **(a)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2}$ **(b)** $-f(x) = -\dfrac{x^2 - 4}{x^2}$ **(c)** $f(x + 2) = \dfrac{x^2 + 4x}{x^2 + 4x + 4}$ **(d)** $f(x - 2) = \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 4}$ **13.** Impar **15.** Par
17. Ninguno de los dos tipos **19.** $\{x|x \neq -3, x \neq 3\}$ **21.** $(-\infty, 2]$ **23.** $(0, \infty)$ **25.** $\{x|x \neq -3, x \neq 1\}$ **27.** $[-1, \infty)$ **29.** $[0, \infty)$

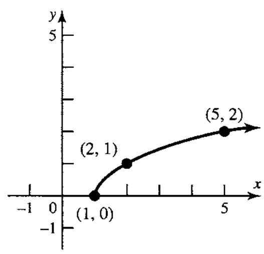
31. (**a**) Todos los números reales
(**b**) $(0, -4)$, $(-4, 0)$, $(4, 0)$
(**d**) $\{y \mid -4 \le y < \infty\}$
(**c**)



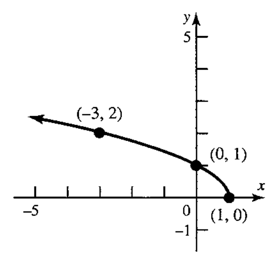
33. (**a**) Todos los números reales
(**b**) $(0, 0)$
(**d**) $\{y \mid -\infty < y \le 0\}$
(**c**)



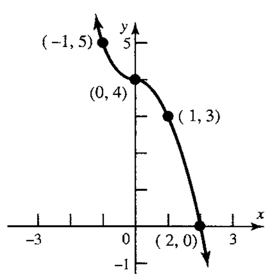
35. (**a**) $\{x \mid 1 \le x < \infty\}$
(**b**) $(1, 0)$
(**d**) $\{y \mid 0 \le y < \infty\}$
(**c**)



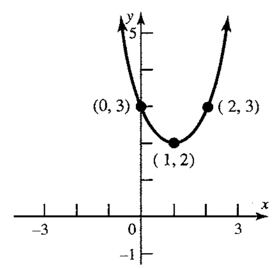
37. (**a**) $\{x \mid -\infty < x \le 1\}$
(**b**) $(1, 0)$, $(0, 1)$
(**d**) $\{y \mid 0 \le y < \infty\}$
(**c**)



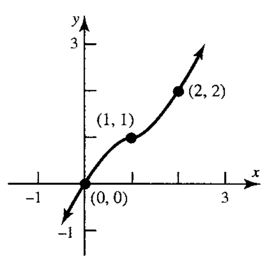
39. (**a**) Todos los números reales
(**b**) $(0, 4)$, $(2, 0)$
(**d**) Todos los números reales
(**c**)



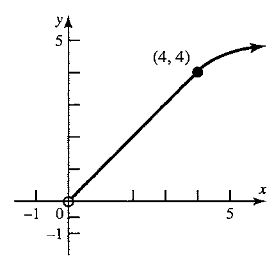
41. (**a**) Todos los números reales
(**b**) $(0, 3)$
(**d**) $\{y \mid 2 \le y < \infty\}$
(**c**)



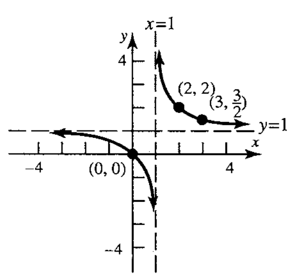
43. (**a**) Todos los números reales
(**b**) $(0, 0)$
(**d**) Todos los números reales
(**c**)



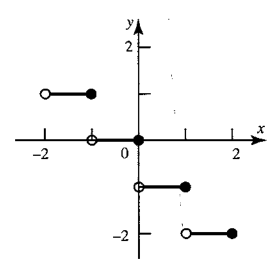
45. (**a**) $\{x \mid 0 < x < \infty\}$
(**b**) Ninguna
(**d**) $\{y \mid 0 < y < \infty\}$
(**c**)



47. (**a**) $\{x \mid x \ne 1\}$
(**b**) $(0, 0)$
(**d**) $\{y \mid y \ne 1\}$
(**c**)



49. (**a**) Todos los números reales
(**b**) $-1 < x \le 0$ son las intersecciones con el eje-x, 0 es la intersección-y
(**d**) Conjunto de los enteros
(**c**)



51. $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+3}{5x-2}$

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{2\left(\dfrac{2x+3}{5x-2}\right)+3}{5\dfrac{2x+3}{5x-2}-2} = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{2\left(\dfrac{2x+3}{5x-2}\right)+3}{5\dfrac{2x+3}{5x-2}-2} = x$$

Dominio f = Rango f^{-1} = Todos los números reales excepto 2/5
Rango f = Dominio f^{-1} = Todos los números reales excepto 2/5

53. $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x}$

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{1}{\dfrac{x+1}{x}-1} = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{\dfrac{1}{x-1}+1}{\dfrac{1}{x-1}} = x$$

Dominio f = Rango f^{-1} = Todos los números reales excepto 1
Rango f = Dominio f^{-1} = Todos los números reales excepto 0

55. $f^{-1}(x) = \dfrac{27}{x^3}$

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{3}{(27/x^3)^{1/3}} = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{27}{(3/x^{1/3})^3} = x$$

Dominio f = rango f^{-1} = Todos los números reales excepto 0
Rango f = Dominio f^{-1} = Todos los números reales excepto 0

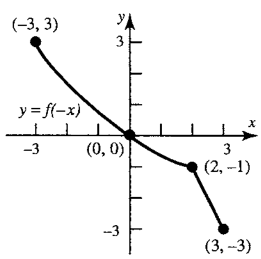
57. **(a)** -26 **(b)** -241 **(c)** 16 **(d)** -1 **59.** **(a)** $\sqrt{11}$ **(b)** 1 **(c)** $\sqrt{\sqrt{6}+2}$ **(d)** 19 **61.** **(a)** $\frac{1}{20}$ **(b)** $-\frac{13}{8}$ **(c)** $\frac{400}{1601}$ **(d)** -17

63. $(f\circ g)(x) = \dfrac{-3x+1}{3x+1}$; $(g\circ f)(x) = \dfrac{6-2x}{x}$; $(f\circ f)(x) = \dfrac{3x-2}{2-x}$; $(g\circ g)(x) = 9x+4$

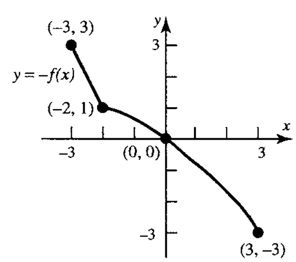
65. $(f\circ g)(x) = 27x^2 + 3|x| + 1$; $(g\circ f)(x) = 3|3x^2+x+1|$; $(f\circ f)(x) = 3(3x^2+x+1)^2 + 3x^2 + x + 2$; $(g\circ g)(x) = 9|x|$

67. $(f\circ g)(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$; $(g\circ f)(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$; $(f\circ f)(x) = x$; $(g\circ g)(x) = x$

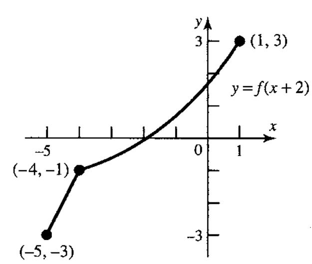
69. **(a)**



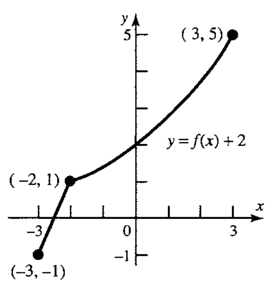
(b)



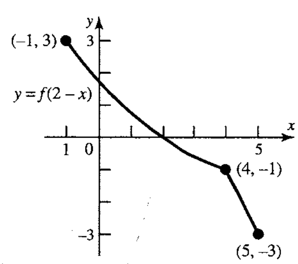
(c)



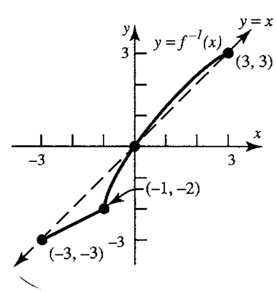
(d)



(e)



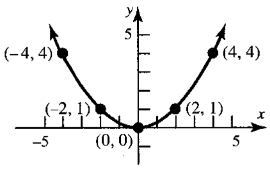
(f)

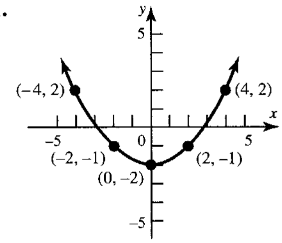


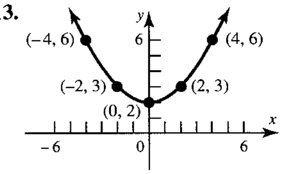
71. $T(h) = -0.0025h + 30$ **73.** $S(x) = kx(36 - x^2)^{3/2}$; Dominio: $\{x|0 < x < 6\}$

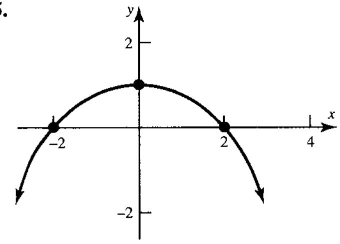
CAPÍTULO 3 Ejercicio 3.1

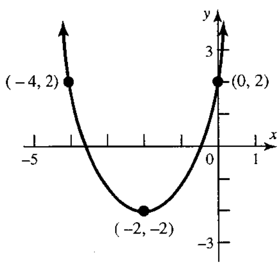
1. D **3.** A **5.** B **7.** E

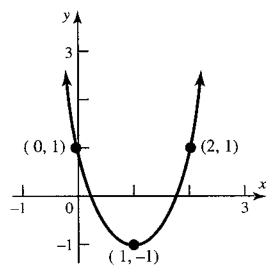
9.


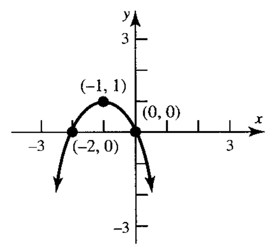
11.


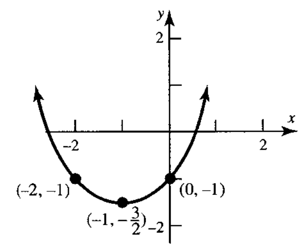
13.


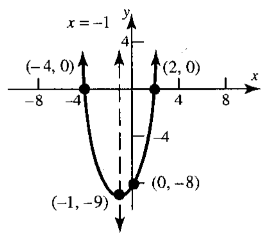
15.


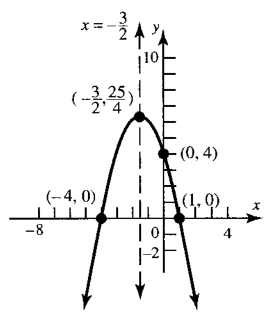
17. $f(x) = (x + 2)^2 - 2$


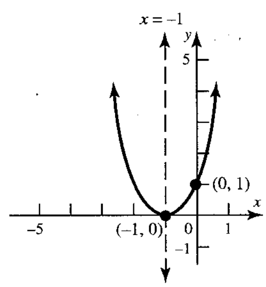
19. $f(x) = 2(x - 1)^2 - 1$


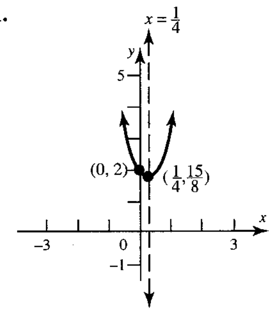
21. $f(x) = -(x + 1)^2 + 1$


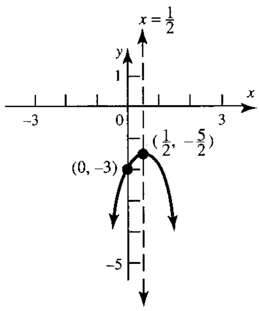
23. $f(x) = \frac{1}{2}(x + 1)^2 - \frac{3}{2}$


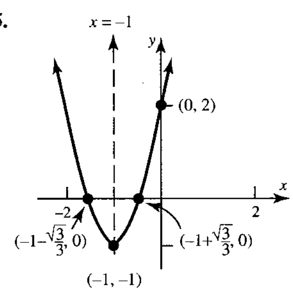
25.


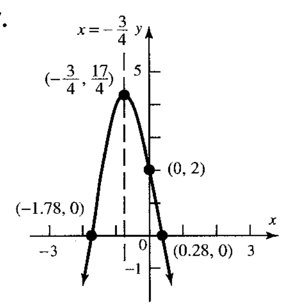
27.


29.


31.


33.


35.


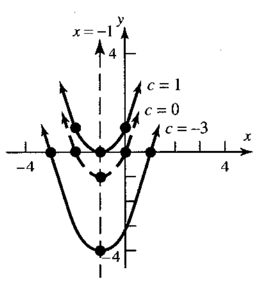
37.


39. Valor mínimo; -21

41. Valor máximo; 21

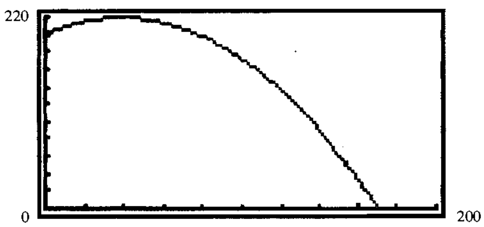
43. Valor máximo; 13

45. Abre hacia arriba; vértice en $(-1, f(-1))$; eje de simetría $x = -1$



47. Cada parábola abre hacia arriba y pasa por (0, 1). Cada una tiene la misma forma.

49. Precio: \$500.00; ingreso máximo: \$1,000,000.00 **51.** 10,000 pies^2; 100 por 100 pies **53.** 2'000,000 m^2 **55.** 4'166,666.7 m^2
57. **(a)** 219.53 pies **(b)** 170.02 pies **(c)** Cuando la altura es de 100 pies, el proyectil está a 135.69 pies del acantilado **59.** 8 p.m
61. 18.75 metros **63.** 3 pulgadas.

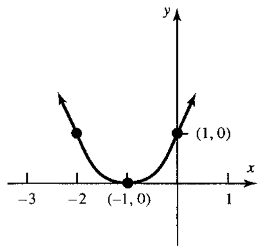


65. Ancho $= \dfrac{40}{\pi + 4} \approx 5.6$ pies; longitud ≈ 2.8 pies **67.** $x = \dfrac{16}{6 - \sqrt{3}} \approx 3.75$ pies; el otro lado ≈ 2.38 pies **69.** 70 miembros

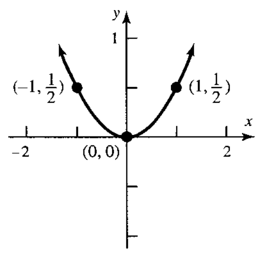
71. $a = 6$, $b = 0$, $c = 2$; $f(x) = 6x^2 + 2$ **73.** $\frac{a}{2}$ **75.** $\left.\begin{aligned} ah^2 - bh + c &= y_0 \\ c &= y_1 \\ ah^2 + bh + c &= y_2 \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} y_0 + y_2 &= 2ah^2 + 2c \\ 4y_1 &= 4c \end{aligned}\right\}$ Área $= \frac{h}{3}(2ah^2 + 6c) = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$

1. Sí; grado 3 **3.** Sí; grado 2 **5.** No; x está elevada a la -1 **7.** No; x está elevada a la $\frac{3}{2}$ **9.** Sí; grado 4

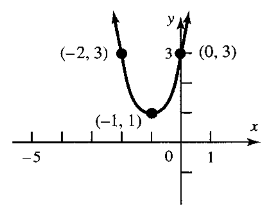
11.



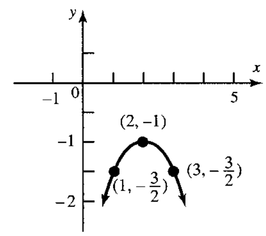
13.



15.



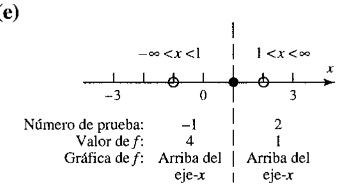
17.



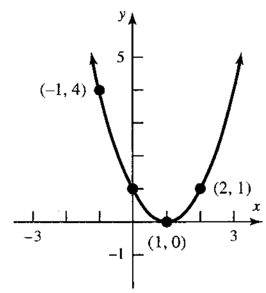
19. 7, multiplicidad 1; -3, multiplicidad 2; la gráfica toca al eje x en -3 y lo cruza en 7 **21.** 2, multiplicidad 3; la gráfica cruza el eje x en 2
23. $-\frac{1}{2}$, multiplicidad 2; la gráfica toca al eje x en $-\frac{1}{2}$ **25.** 5, multiplicidad 3; -4, multiplicidad 2; la gráfica toca al eje x en -4 y lo cruza en 5
27. No hay ceros reales; la gráfica no cruza ni toca al eje x

29. **(a)** Intersección-x: 1; intersección-y: 1
(b) Toca en 1
(c) $y = x^2$
(d) 1

(e)

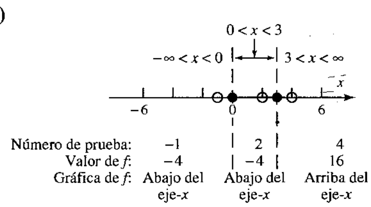


(f)

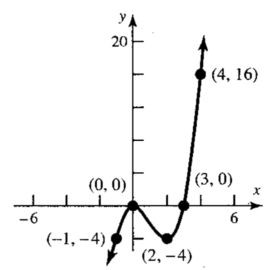


31. **(a)** Intersecciones-x: 0, 3; intersección-y: 1
(b) Toca en 0; cruza en 3
(c) $y = x^3$
(d) 2

(e)

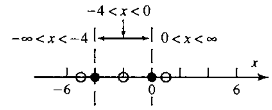


(f)



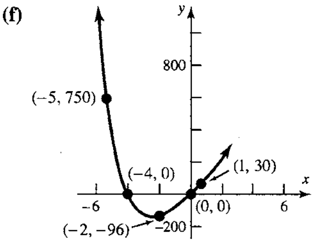
33. **(a)** Intersecciones-x: -4, 0; intersección-y: 0
(b) Cruza en -4, 0
(c) $y = 6x^4$
(d) 3

(e)



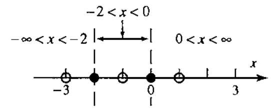
Número de prueba:	-5	-2	1
Valor de f:	750	-96	30
Gráfica de f:	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x

(f)



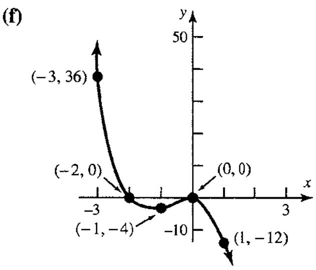
35. **(a)** Intersecciones-x: -2, 0; intersección-y: 0
(b) Cruza en -2, toca en 0
(c) $y = -4x^3$
(d) 2

(e)



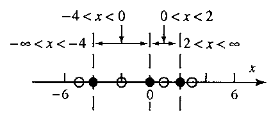
Número de prueba:	-3	-1	1
Valor de f:	36	-4	-12
Gráfica de f:	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Abajo del eje x

(f)



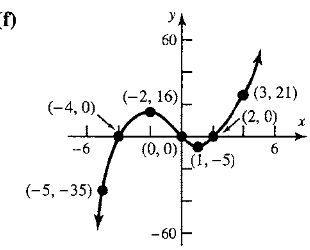
37. **(a)** Intersecciones-x: -4, 0, 2; intersección-y: 0
(b) Cruza en -4, 0, 2
(c) $y = x^3$
(d) 2

(e)



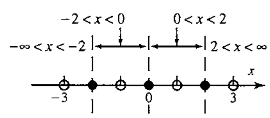
Número de prueba:	-5	-2	1	3
Valor de f:	-35	16	-5	21
Gráfica de f:	Abajo del eje x	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x

(f)



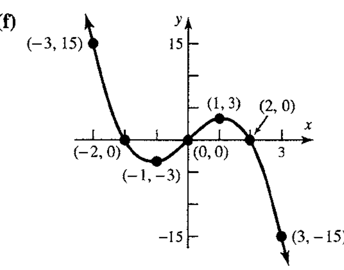
39. $f(x) = 4x - x^3 = -x(x^2 - 4) = -x(x + 2)(x - 2)$
(a) Intersecciones-x: -2, 0, 2; intersección-y: 0
(b) Cruza en -2, 0, 2
(c) $y = -x^3$
(d) 2

(e)



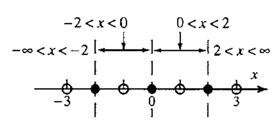
Número de prueba:	-3	-1	1	3
Valor de f:	15	-3	3	-15
Gráfica de f:	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x	Abajo del eje x

(f)



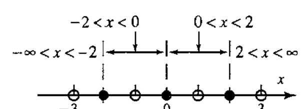
41. **(a)** Intersecciones-x: -2, 0, 2; intersección-y: 0
(b) Cruza en -2, 2; toca en 0
(c) $y = x^4$
(d) 3

(e)



Número de prueba:	-3	-1	1	3
Valor de f:	45	-3	-3	45
Gráfica de f:	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x

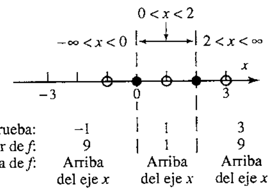
(f)



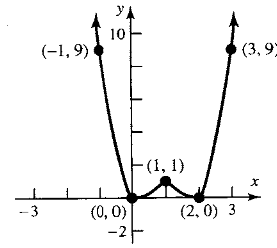
Número de prueba:	-3	-1	1	3
Valor de f:	45	-3	-3	45
Gráfica de f:	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x

43. **(a)** Intersecciones-x: 0, 2; intersección-y: 0
(b) Toca en 0, 2
(c) $y = x^4$
(d) 3

(e)

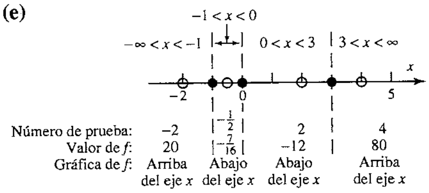


(f)

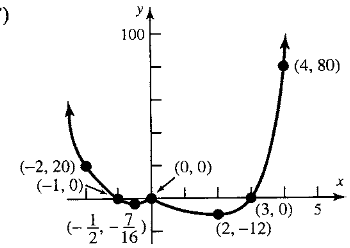


45. **(a)** Intersecciones-x: -1, 0, 3; Intersección-y: 0
(b) Cruza en -1, 3; toca en 0
(c) $y = x^4$
(d) 3

(e)

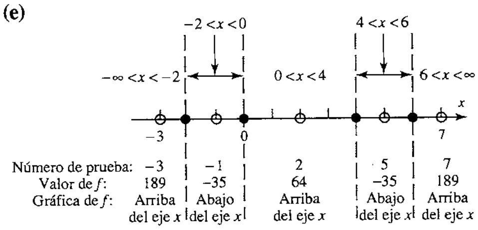


(f)

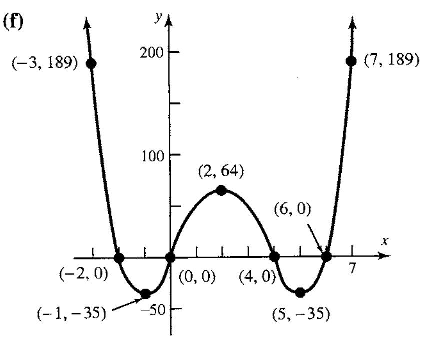


47. **(a)** Intersecciones-x: -2, 0, 4, 6; intersección-y: 0
(b) Cruza en -2, 0, 4, 6
(c) $y = x^4$
(d) 3

(e)

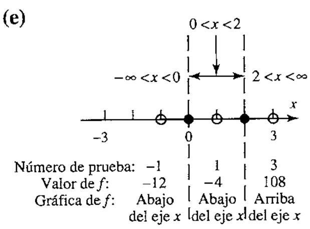


(f)

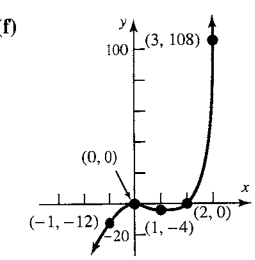


49. **(a)** Intersecciones-x: 0, 2; intersección-y: 0
(b) Toca en 0; cruza en 2
(c) $y = x^5$
(d) 4

(e)

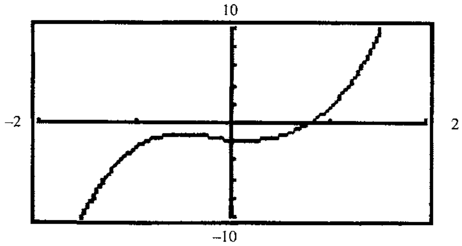


(f)

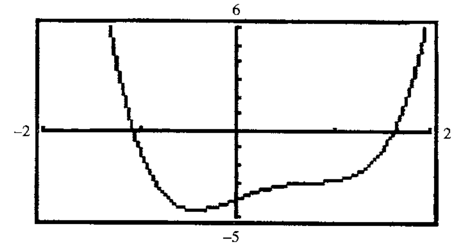


51. c, e, f **53.** c, e

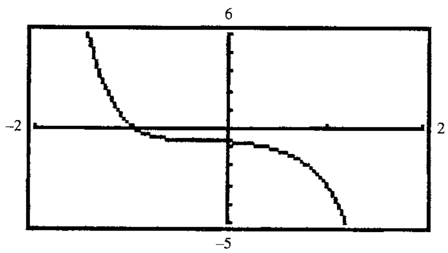
55. Intersección-x: 0.83
puntos de retorno: $(-0.50, -1.53)$, $(0.20, -2.11)$



57. Intersección-x: -1.06, 1.61
puntos de retorno: $(-0.41, -4.64)$



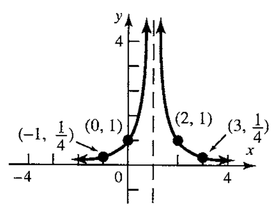
59. Intercepción x: -0.97



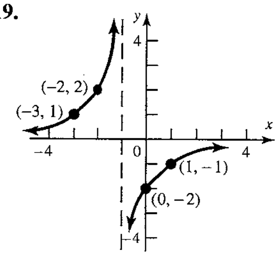
Ejercicio 3.3

1. Todos los números reales excepto 3 **3.** Todos los números reales excepto 2 y -4 **5.** Todos los números reales excepto $-\frac{1}{2}$ y 3
7. Todos los números reales excepto 2 **9.** Todos los números reales
11. **(a)** Dominio: $\{x|x \neq 2\}$; Rango: $\{y|y \neq 1\}$ **(b)** $(0, 0)$ **(c)** $y = 1$ **(d)** $x = 2$ **(e)** Ninguno
13. **(a)** Dominio: $\{x|x \neq 0\}$; Rango: Todos los números reales **(b)** $(-1, 0)$, $(1, 0)$ **(c)** Ninguno **(d)** Ninguno **(e)** $y = 2x$
15. **(a)** Dominio: $\{x|x \neq -2, x \neq 2\}$; Rango: $\{y|-\infty < y \leq 0, 1 < y < \infty\}$ **(b)** $(0, 0)$ **(c)** $y = 1$ **(d)** $x = -2, x = 2$ **(e)** Ninguno

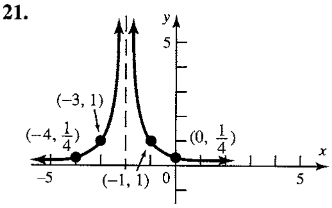
17.



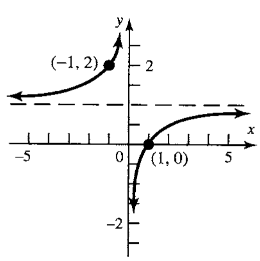
19.



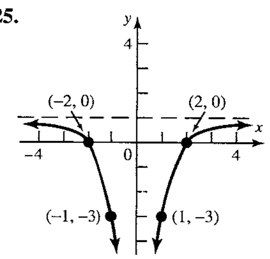
21.



23.

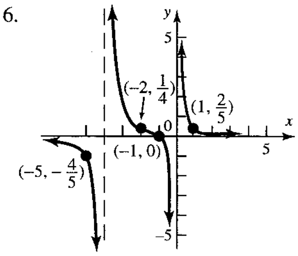


25.

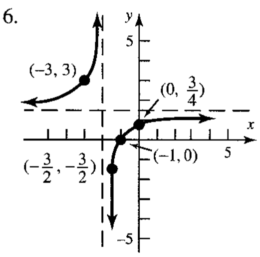


27. Asíntota horizontal: $y = 3$; asíntota vertical: $x = -4$ **29.** No tiene asíntotas
31. Asíntota horizontal: $y = 0$; asíntotas verticales: $x = 1$, $x = -1$ **33.** Asíntota horizontal: $y = 0$; asíntota vertical: $x = 0$
35. Asíntota oblicua: $y = 3x$; asíntota vertical: $x = 0$

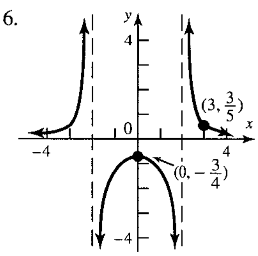
37. 1. Intersección-x: -1; intersección-y: no hay
2. No tiene simetría
3. Asíntotas verticales: $x = 0$, $x = -4$
4. Asíntota horizontal: $y = 0$, intersecada en $(-1, 0)$
5. $x < -4$: por abajo del eje-x
$-4 < x < -1$: por arriba del eje-x
$-1 < x < 0$: por abajo del eje-x
$x > 0$: por arriba del eje-x

6. 

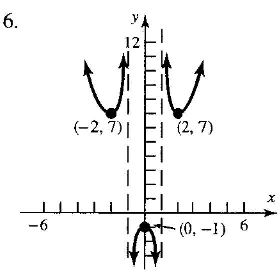
39. 1. Intersección-x: -1; intersección-y: $\frac{3}{4}$
2. No tiene simetría
3. Asíntota vertical: $x = -2$
4. Asíntota horizontal: $y = \frac{3}{2}$, no intersecada
5. $x < -2$: por arriba del eje-x
$-2 < x < -1$: por abajo del eje-x
$x > -1$: por arriba del eje-x

6. 

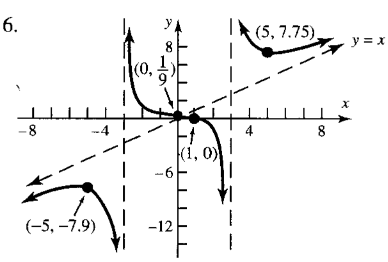
41. 1. No hay intersección-x; intersección-y; $-\frac{3}{4}$
2. Simétrica con respecto al eje-y
3. Asíntotas verticales: $x = 2$, $x = -2$
4. Asíntota horizontal: $y = 0$, no intersecada
5. $x < -2$: por arriba del eje-x
$-2 < x < 2$: por abajo del eje-x
$x > 2$: por arriba del eje-x

6. 

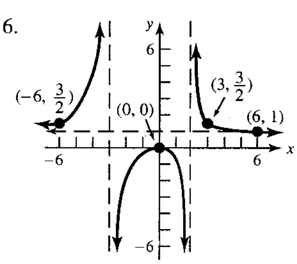
43. 1. No hay intersección-x; intersección-y: -1
2. Simétrica con respecto al eje-y
3. Asíntotas verticales: $x = -1$, $x = 1$
4. No hay asíntotas verticales ni oblicuas
5. $x < -1$: por arriba del eje-x
$-1 < x < 1$: por abajo del eje-x
$x > 1$: por arriba del eje-x

6. 

45. 1. Intersección-x: 1; intersección-y: $\frac{1}{9}$
2. No tiene simetría
3. Asíntotas verticales: $x = 3$, $x = -3$
4. Asíntota oblicua: $y = x$, intersecada en $(\frac{1}{9}, \frac{1}{9})$
5. $x < -3$: por abajo del eje-x
$-3 < x < 1$: por arriba del eje-x
$1 < x < 3$: por abajo del eje-x
$x > 3$: por arriba del eje-x

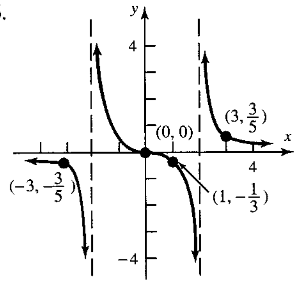
6. 

47. 1. Intersección $(0, 0)$
2. No tiene simetría
3. Asíntotas verticales: $x = 2$, $x = -3$
4. Asíntota horizontal: $y = 1$, intersecada en $(6, 1)$
5. $x < -3$: por arriba del eje-x
$-3 < x < 0$: por abajo del eje-x
$0 < x < 2$: por abajo del eje-x
$x > 2$: por arriba del eje-x

6. 

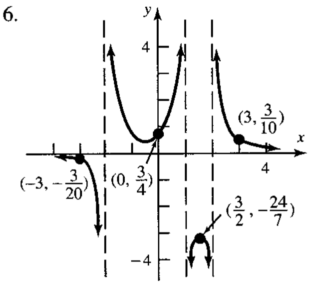
49. 1. Intersección (0, 0)
2. Simetría con respecto al origen
3. Asíntotas verticales: $x = -2$, $x = 2$
4. Asíntota horizontal: $y = 0$, intersecada en (0, 0)
5. $x < -2$: por abajo del eje-x
$-2 < x < 0$: por arriba del eje-x
$0 < x < 2$: por abajo del eje-x
$x > 2$: por arriba del eje-x

6.



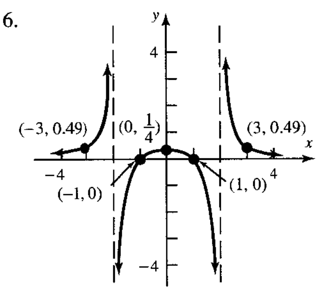
51. 1. No hay intersección-x; no hay intersección-y: $\frac{3}{4}$
2. No tiene simetría
3. Asíntotas verticales: $x = -2$, $x = 1$, $x = 2$
4. Asíntota horizontal: $y = 0$, no intersecada
5. $x < -2$: por abajo del eje-x
$-2 < x < 1$: por arriba del eje-x
$1 < x < 2$: por abajo del eje-x
$x > 2$: por arriba del eje-x

6.



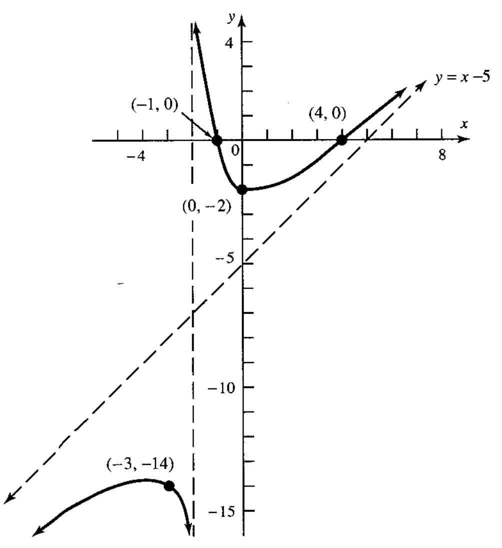
53. 1. Intersecciones-x: -1, 1; intersección-y: $\frac{1}{4}$
2. Simétrica con respecto al eje y
3. Asíntotas verticales: $x = -2$, $x = 2$
4. Asíntota horizontal: $y = 0$, intersecada en $(-1, 0)$ y en (1, 0)
5. $x < -2$: por arriba del eje-x
$-2 < x < -1$: por abajo del eje-x
$-1 < x < 1$: por arriba del eje-x
$1 < x < 2$: por abajo del eje-x
$x > 2$: por arriba del eje-x

6.



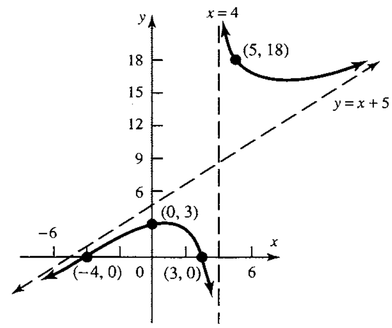
55. 1. Intersecciones-x: -1, 4; intersección-y: -2
2. No tiene simetría
3. Asíntota vertical: $x = -2$
4. Asíntota oblicua: $y = x - 5$, no intersecada
5. $x < -2$: por abajo del eje-x
$-2 < x < -1$: por arriba del eje-x
$-1 < x < 4$: por abajo del eje-x
$x > 4$: por arriba del eje-x

6.



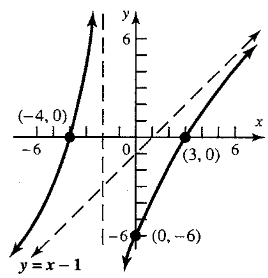
57. 1. Intersecciones-x: -4, 3; intersección-y: 3
2. No tiene simetría
3. Asíntota vertical: $x = 4$
4. Asíntota oblicua: $y = x + 5$, no intersecada
5. $x < -4$: por abajo del eje-x
$-4 < x < 3$: por arriba del eje-x
$3 < x < 4$: por abajo del eje-x
$x > 4$: por arriba del eje-x

6.



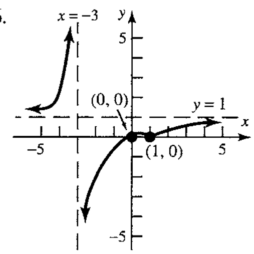
59. 1. Intersecciones-x: -4, 3; intersección-y: -6
2. No tiene simetría
3. Asíntota vertical: $x = -2$
4. Asíntota oblicua: $y = x - 1$, no intersecada
5. $x < -4$: por abajo del eje-x
$-4 < x < -2$: por arriba del eje-x
$-2 < x < 3$: por abajo del eje-x
$x > 3$: por arriba del eje-x

6.



61. 1. Intersecciones-x: 0, 1; intersección-y: 0
2. No tiene simetría
3. Asíntota vertical: $x = -3$
4. Asíntota horizontal: $y = 1$, no intersecada
5. $x < -3$: por arriba del eje-x
$-3 < x < 0$: por abajo del eje-x
$0 < x < 1$: por arriba del eje-x
$x > 1$: por arriba del eje-x

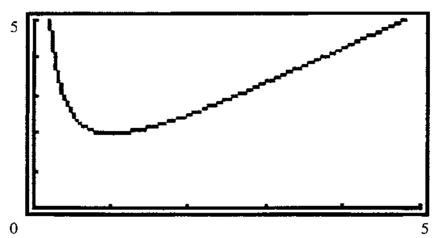
6.



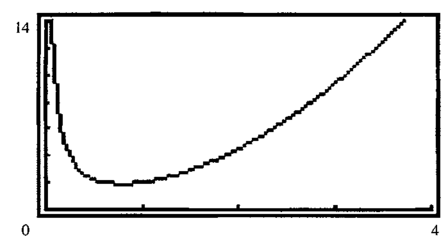
63. 4 debe ser un cero del denominador; por lo tanto, $x - 4$ debe ser un factor.

65. No. Cada una de las funciones es un cociente de polinomios, pero no escritos en los términos más simples. Cada función está indefinida para $x = 1$.

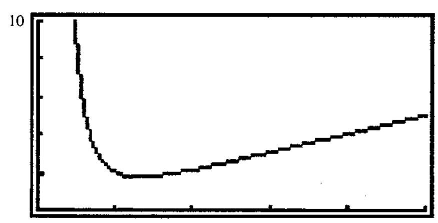
67. Valor mínimo: 2.00 en $x = 1.00$



69. Valor mínimo: 1.88 en $x = 0.79$



71. Valor mínimo: 1.75 en $x = 1.31$

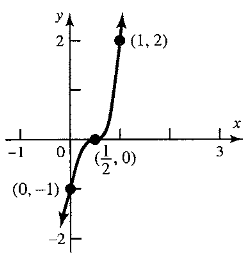


73. c, d

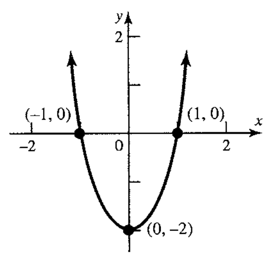
1. $f(2) = 12$ **3.** $f(3) = 99$ **5.** $f(-3) = -138$ **7.** $f(1) = 7$ **9.** $f(-1.1) = -0.3531$ **11.** $q(x) = x^2 + x + 4$; $R = 12$
13. $q(x) = 3x^2 + 11x + 32$; $R = 99$ **15.** $q(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 15x + 46$; $R = -138$ **17.** $q(x) = 4x^5 + 4x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 2$; $R = 7$
19. $q(x) = 0.1x^2 - 0.11x + 0.321$; $R = -0.3531$ **21.** $q(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$; $R = 0$ **23.** No; $f(2) = 8$ **25.** Sí; $f(2) = 0$
27. Sí; $f(-3) = 0$ **29.** No; $f(-4) = 1$ **31.** Sí; $f(\frac{1}{2}) = 0$ **33.** 69 **35.** -4 **37.** 15 **39.** $[(3x + 2)x - 5]x + 8$
41. $[(3x - 6)x \cdot x - 5]x + 10$ **43.** $(3x \cdot x \cdot x - 82)x \cdot x \cdot x + 27$ **45.** $[(4x \cdot x - 64)x \cdot x + 1]x \cdot x - 15$ **47.** $[(2x - 1)x \cdot x + 2]x - 1$
49. 10.064 **51.** -0.1472 **53.** -105.738 **55.** -134.326 **57.** 3.8192 **59.** $k = 5$ **61.** -7 **63.** Si $f(x) = x^n - c^n$, entonces $f(c) = c^n - c^n = 0$.
65. (**a**) 201,498 nanosegundos (**b**) 101,499 nanosegundos

1. 7; 3 o 1 positivos; 2 o 0 negativos **3.** 6; 2 o 0 positivos; 2 o 0 negativos **5.** 3; 2 o 0 positivos; 1 negativos **7.** 4; 2 o 0 positivos; 2 o 0 negativos
9. 5; 0 positivos; 3 o 1 negativos **11.** 6; 1 positivos; 1 negativos **13.** $\pm 1, \pm\frac{1}{3}$ **15.** $\pm 1, \pm 3$ **17.** $\pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{2}$
19. $\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm 1, \pm 2$ **21.** $\pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2, \pm 4$ **23.** $\pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{2}{3}, \pm 1, \pm 2$ **25.** $-3, -1, 2$; $f(x) = (x + 3)(x + 1)(x - 2)$
27. $\frac{1}{2}$; $f(x) = 2(x - \frac{1}{2})(x^2 + 1)$ **29.** $-1, 1$; $f(x) = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 2)$ **31.** $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$; $f(x) = 4(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})(x^2 + 2)$
33. $-2, -1, 1, 1$; $f(x) = (x + 2)(x + 1)(x - 1)^2$ **35.** $-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 2$; $f(x) = 4(x + \sqrt{2}/2)(x - \sqrt{2}/2)(x - 2)(x^2 + \frac{1}{2})$ **37.** $\{-1, 2\}$
39. $\{\frac{2}{3}, -1 + \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}\}$ **41.** $\{\frac{1}{3}, \sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$ **43.** $\{-3, -2\}$ **45.** $-\frac{1}{3}$

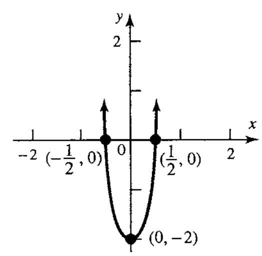
47. $(\frac{1}{2}, 0)$; $(0, -1)$
$-\infty < x < \frac{1}{2}$, $f(0) = -1$, por abajo del eje-x
$\frac{1}{2} < x < \infty$, $f(1) = 2$, por arriba del eje-x



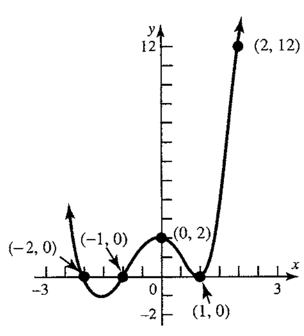
49. $(-1, 0)$; $(1, 0)$; $(0, -2)$
$-\infty < x < -1$, $f(-2) = 18$, por arriba del eje-x
$-1 < x < 1$, $f(0) = -2$, por abajo del eje-x
$1 < x < \infty$, $f(2) = 18$, por arriba del eje-x
(simétrica con respecto al eje-y)



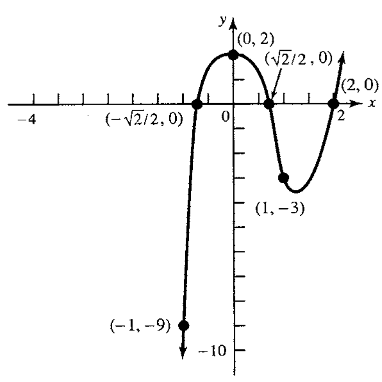
51. $(-\frac{1}{2}, 0)$; $(\frac{1}{2}, 0)$; $(0, -2)$
$-\infty < x < -\frac{1}{2}$, $f(-1) = 9$, por arriba del eje-x
$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, $f(0) = -2$, por abajo del eje-x
$\frac{1}{2} < x < \infty$, $f(1) = 9$, por arriba del eje-x
(simétrica con respecto al eje-y)



53. $(-1, 0)$; $(-2, 0)$; $(1, 0)$; $(0, 2)$
$-\infty < x < -2$, $f(-3) = 32$, por arriba del eje-x
$-2 < x < -1$, $f(-\frac{3}{2}) = -\frac{25}{16}$, por abajo del eje-$x$
$-1 < x < 1$, $f(0) = 2$, por arriba del eje-x
$1 < x < \infty$, $f(2) = 12$, por arriba del eje-x



55. $(2, 0)$; $(-\sqrt{2}/2, 0)$; $(\sqrt{2}/2, 0)$; $(0, 2)$
$-\infty < x < -\sqrt{2}/2$, $f(-1) = -9$, por abajo del eje-x
$-\sqrt{2}/2 < x < \sqrt{2}/2$, $f(0) = 2$, por arriba del eje-x
$\sqrt{2}/2 < x < 2$, $f(1) = -3$, por abajo del eje-x
$2 < x < \infty$, $f(3) = 323$, por arriba del eje-x



57. $\{-2, 2, -i, i\}$ **59.** $\left\{-1, 1, \dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right\}$ **61.** $\left\{-2, 2, \dfrac{-3 - \sqrt{3}i}{2}, \dfrac{-3 + \sqrt{3}i}{2}\right\}$ **63.** $\{1, -i, i\}$ **65.** 5
67. No (utilice el teorema de los ceros racionales) **69.** No (utilice el teorema de los ceros racionales) **71.** 7 pulgadas.
73. Todos los ceros racionales potenciales son enteros. En consecuencia, r es un entero o una raíz no racional (y, por lo tanto, irracional).

75.

$$\begin{aligned} y^3 + by^2 + cy + d &= 0 \\ \left(x - \frac{b}{3}\right)^3 + b\left(x - \frac{b}{3}\right)^2 + c\left(x - \frac{b}{3}\right) + d &= 0 \\ x^3 - \frac{3b}{3}x^2 + 3\left(\frac{b^2}{9}\right)x - \frac{b^3}{27} + b\left(x^2 - \frac{2bx}{3} + \frac{b^2}{9}\right) + cx - \frac{bc}{3} + d &= 0 \\ x^3 - \frac{b^2}{3}x + cx - \frac{b^3}{27} + \frac{b^3}{9} - \frac{bc}{3} + d &= 0 \\ x^3 + \left(c - \frac{b^2}{3}\right)x + \left(\frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d\right) &= 0 \end{aligned}$$

77. $K = \dfrac{-p}{3H}$

$$H^3 + \left(\frac{-p}{3H}\right)^3 = -q$$

$$H^6 + qH^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

$$H^3 = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \dfrac{4p^3}{27}}}{2} \text{ elección + signo}$$

$$H = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

79. $x = H + K$; ahora utilice los resultados de los problemas 77 y 78 **81.** $p = 3$, $q = -14$; $x = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$

83. $p = -6$, $q = 4$; $x = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{4 - 8}} + \sqrt[3]{-2 - \sqrt{4 - 8}} = \sqrt[3]{-2 + 2i} + \sqrt[3]{-2 - 2i}$; o $x^3 - 6x + 4 = (x - 2)(x^2 + 2x - 2) = 0$; $x = 2$;

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 8}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

Ejercicio 3.6

1. -1 y 1 **3.** -3 y 7 **5.** -5 y 2 **7.** $f(0) = -1$; $f(1) = 10$ **9.** $f(-5) = -58$; $f(-4) = 2$ **11.** $f(1.4) = -0.17536$; $f(1.5) = 1.40625$
13. 1.15 **15.** 2.53 **17.** 0.21 **19.** -4.04 **21.** 1.15 **23.** 2.53 **25.** -1.00, 0.21 **27.** -4.04, 0.35, 0.69

Ejercicio 3.7

1. $4 + i$ **3.** $-i$, $1 - i$ **5.** $-i$, $-2i$ **7.** $-i$ **9.** $2 - i$, $-3 + i$
11. Los ceros que son números complejos deben aparecer en pares conjugados; o un polinomio de grado impar con coeficientes reales debe tener al menos un cero real.
13. Si el cero restante fuera complejo, entonces su conjugado también sería un cero.
15. 1, $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **17.** $-4 + i$ **19.** $-1 + 5i$ **21.** $-4 + 4i$ **23.** $-18 - 16i$ **25.** $16 - 18i$ **27.** $38 + 31i$
29. $z^3 + (-11 - 2i)z^2 + (40 + 16i)z - 48 - 32i$ **31.** $z^3 - 3z^2 + (3 - i)z - 2 + 2i$
33. $z^4 + (2i - 6)z^3 + (8 - 12i)z^2 + (6 + 18i)z - 9$

Complete en los espacios

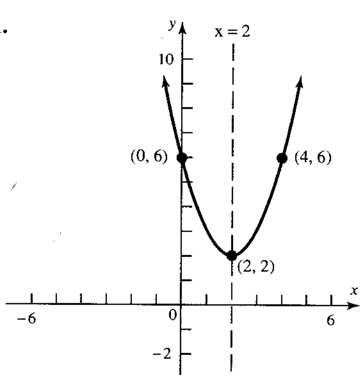
1. parábola; vértice **2.** Residuo; dividendo **3.** $f(c)$ **4.** $f(c) = 0$ **5.** cero **6.** tres; uno; dos; ningún **7.** ± 1, $\pm\frac{1}{2}$ **8.** $y = 1$
9. $x = -1$ **10.** $3 - 4i$

Cierto o falso

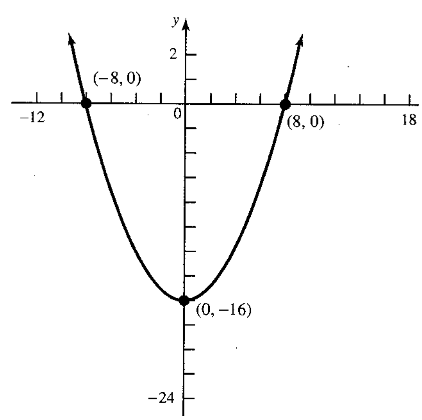
1. F **2.** F **3.** C **4.** C **5.** C

Ejercicios de revisión

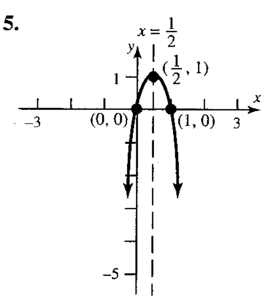
1.



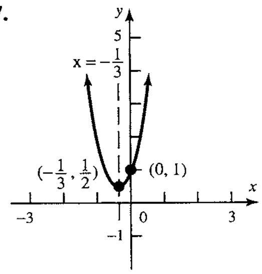
3.



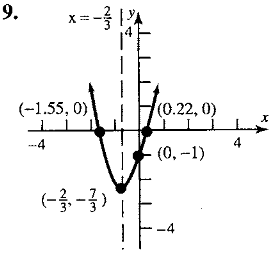
5.



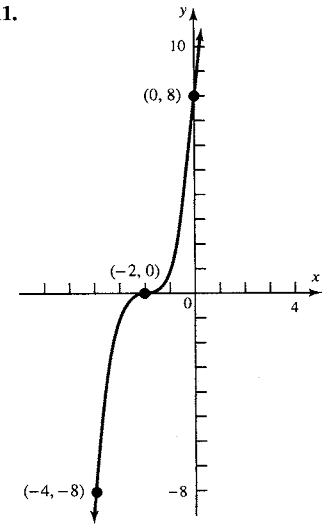
7.



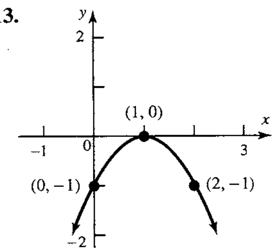
9.



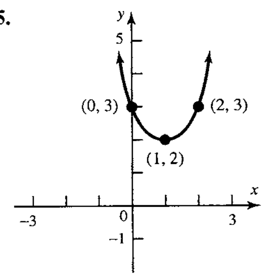
11.



13.



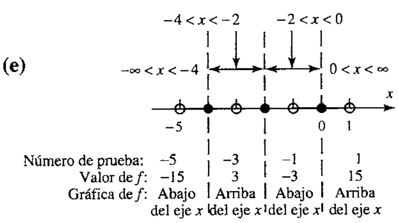
15.



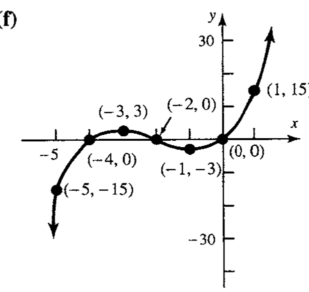
17. Valor mínimo; 1 **19.** Valor máximo; 12 **21.** Valor máximo; 16

23. (**a**) Intersecciones-x: -4, -2, 0; intersecciones-y: 0
(**b**) Cruza el eje x-en -4, -2, 0
(**c**) $y = x^3$
(**d**) 2

(**e**)

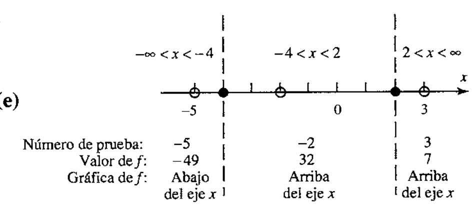


(**f**)

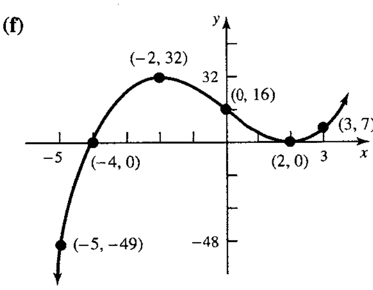


25. (**a**) Intersecciones-x: -4, 2; intersección-y: 16
(**b**) Cruza en -4; toca en 2
(**c**) $y = x^3$
(**d**) 2

(**e**)

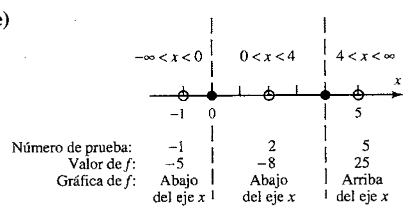


(**f**)

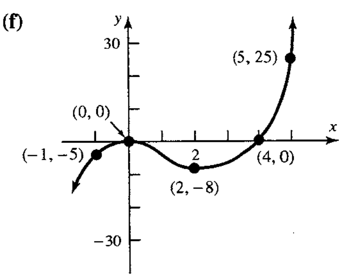


27. $f(x) = x^3 - 4x^2 = x^2(x - 4)$
(**a**) Intersecciones-x: 0, 4; intersección-y: 0
(**b**) Toca en 0; cruza en 4
(**c**) $y = x^3$
(**d**) 2

(**e**)

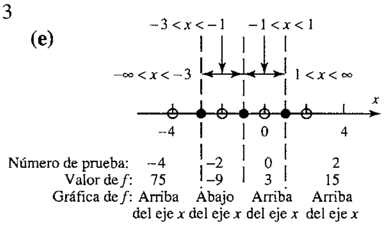


(**f**)

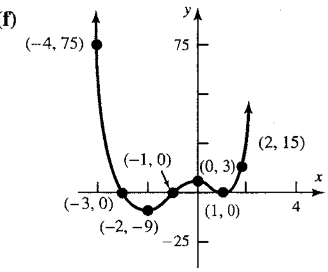


29. (**a**) Intersecciones-x: -3, -1, 1; intersección-y: 3
(**b**) Cruza en -3, -1; toca en 1
(**c**) $y = x^4$
(**d**) 3

(**e**)

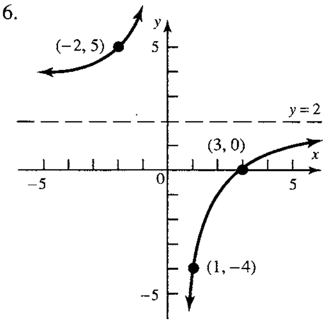


(**f**)



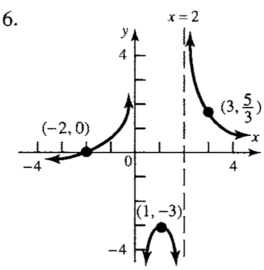
31. 1. Intersección-x: 3; no hay intersección-y
2. No hay simetría
3. Asíntota vertical: $x = 0$
4. Asíntota horizontal: $y = 2$, no la interseca
5. $x < 0$: arriba del eje-x
$0 < x < 3$: abajo del eje-x
$x > 3$: arriba del eje-x

6.



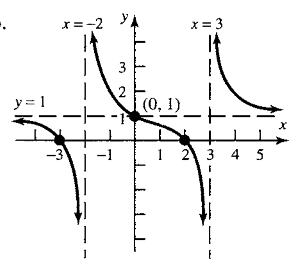
33. 1. Intersección-x: -2; no hay intersección-y
2. No hay simetría
3. Asíntotas verticales: $x = 0$, $x = 2$
4. Asíntota horizontal: $y = 0$, la interseca en $(-2, 0)$
5. $x < -2$: abajo del eje-x
$-2 < x < 0$: arriba del eje-x
$0 < x < 2$: abajo del eje-x
$x > 2$: arriba del eje-x

6.



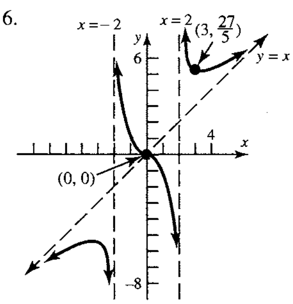
35. 1. Intersecciones: $(-3, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 1)$
2. No hay simetría
3. Asíntotas verticales: $x = -2$, $x = 3$
4. Asíntota horizontal: $y = 1$, la interseca en $(0, 1)$
5. $x < -3$: arriba del eje-x
$-3 < x < -2$: abajo del eje-x
$-2 < x < 2$: arriba del eje-x
$2 < x < 3$: abajo del eje-x
$x > 3$: arriba del eje-x

6.



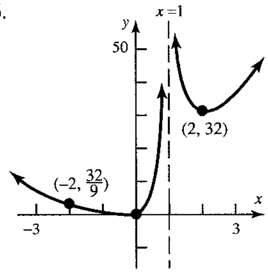
37. 1. Intersección $(0, 0)$
2. Simétrica con respecto al origen
3. Asíntotas verticales: $x = -2$, $x = 2$
4. Asíntota oblicua: $y = x$, la interseca en $(0, 0)$
5. $x < -2$: abajo del eje-x
$-2 < x < 0$: arriba del eje-x
$0 < x < 2$: abajo del eje-x
$x > 2$: arriba del eje-x

6.



39. 1. Intersección (0, 0)
2. No hay simetría
3. Asíntota vertical: $x = 1$
4. No hay asíntotas horizontal ni oblicua
5. $x < 0$: arriba del eje-x
$0 < x < 1$: abajo del eje-x
$x > 1$: arriba del eje-x

6.

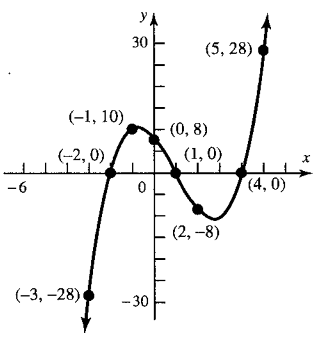


41. $q(x) = 8x^2 + 5x + 6$; $R = 10$ **43.** $q(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 15$; $R = 29$ **45.** $f(4) = 47{,}105$ **47.** 4, 2, o 0 positivos; 2 o 0 negativos

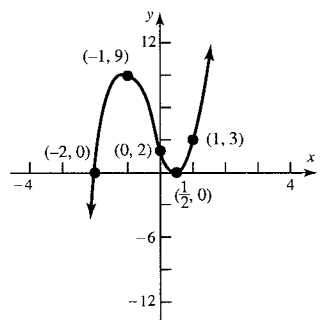
49. $\pm\frac{1}{12}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{4}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm 3$ **51.** $-2, 1, 4$; $f(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 4)$

53. $\frac{1}{2}$, multiplicidad 2; -2; $f(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2(x + 2)$ **55.** 2, multiplicidad 2; $f(x) = (x - 2)^2(x^2 + 5)$ **57.** $\{-3, 2\}$ **59.** $\{-3, -1, -\frac{1}{2}, 1\}$

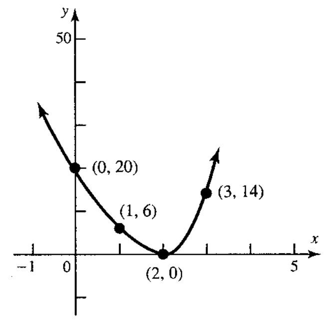
61. Intersecciones-x: $-2, 1, 4$
Intersección-y: 8
Arriba del eje-x: $-2 < x < 1$, $4 < x < \infty$
Abajo del eje-x: $-\infty < x < -2$, $1 < x < 4$



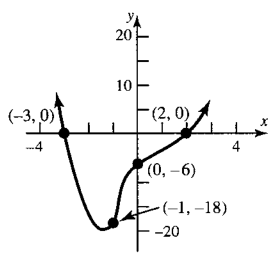
63. Intersecciones-x: $-2, \frac{1}{2}$
Intersección-y: 2
Arriba del eje-x: $-2 < x < \infty$
Abajo del eje-x: $-\infty < x < -2$



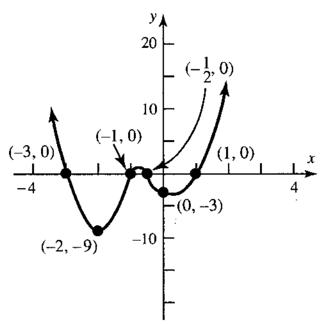
65. Intersección-x: 2
Intersección-y: 20
Arriba del eje-x: toda x



67. Intersecciones-x: $-3, 2$
Intersección-y: -6
Arriba del eje-x: $-\infty < x < -3$, $2 < x < \infty$
Abajo del eje-x: $-3 < x < 2$



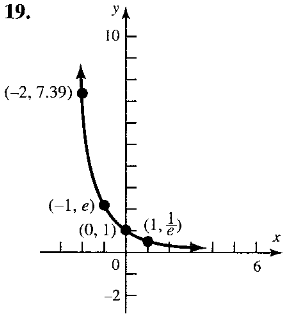
69. Intersecciones-x: $-3, -1, -\frac{1}{2}, 1$
Intersección-y: -3
Arriba del eje-x: $-\infty < x < -3$, $-1 < x < -\frac{1}{2}$, $1 < x < \infty$
Abajo del eje-x: $-3 < x < -1$, $-\frac{1}{2} < x < 1$



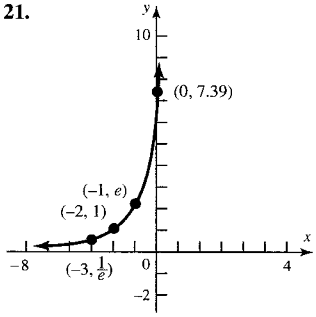
71. $f(0) = -1$; $f(1) = 1$ **73.** $f(0) = -1$; $f(1) = 1$ **75.** -2 y 2 **77.** -3 y 5 **79.** 1.52
81. 0.93 **83.** $4 - i$ **85.** $-i$, $1 - i$ **87.** $f(z) = z^4 - (5 + i)z^3 + (7 + 5i)z^2 - (3 + 7i)z + 3i$
89. $f(z) = z^3 - (6 + i)z^2 + (11 + 5i)z - 6 - 6i$ **91.** $q(x) = x^2 + 5x + 6$; $R = 0$ **93.** $\{-3, 2\}$ **95.** $\{\frac{1}{3}, 1, -i, i\}$
97. $f(x) = [(8x - 3)x + 1]x - 6$; $f(1.5) = 15.75$ **99.** $f(x) = [(x - 2)x \cdot x + 1]x - 1$; $f(1.5) = -1.1875$
101. 1 es una cota superior; -2 es una cota inferior **103.** (2, 2) **105.** 3.6 pies
109. **(a)** par **(b)** positivos **(c)** par **(d)** 0 es un cero de multiplicidad par **(e)** 8

1. **(a)** 11.212 **(b)** 11.587 **(c)** 11.664 **(d)** 11.665 **3.** **(a)** 8.815 **(b)** 8.821 **(c)** 8.824 **(d)** 8.825
5. **(a)** 21.217 **(b)** 22.217 **(c)** 22.440 **(d)** 22.459 **7.** 3.320 **9.** 0.427 **11.** B **13.** D **15.** A **17.** E

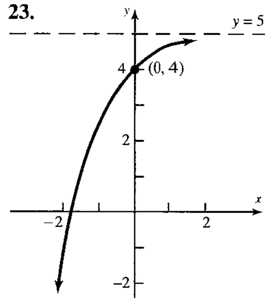
19.



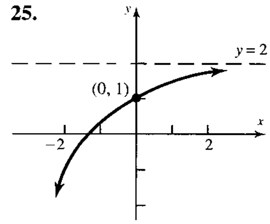
21.



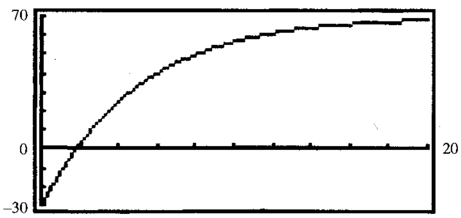
23.



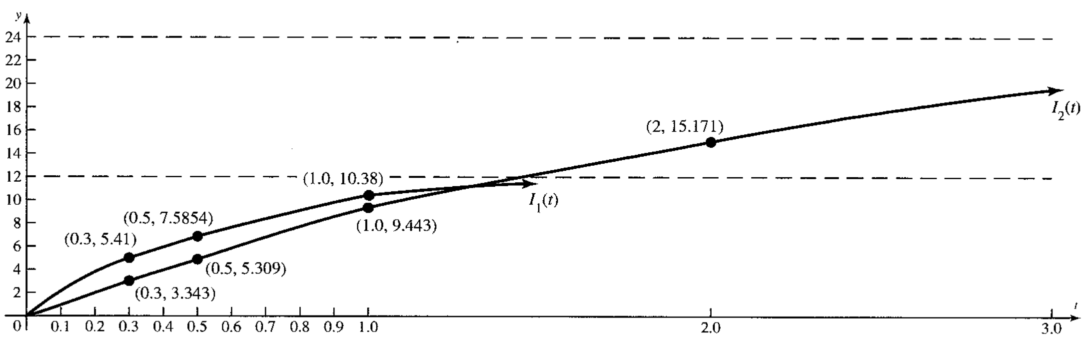
25.



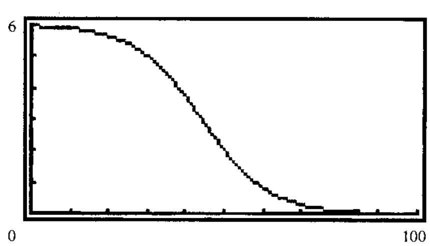
27. $\frac{1}{49}$ **29.** $\frac{1}{4}$ **31.** **(a)** 74% **(b)** 47% **33.** **(a)** 44 watts **(b)** 11.6 watts **35.** 3.35 miligramos; 0.45 miligramos
37. **(a)** 56% **(b)** 68% **(c)** 70% **(d)** R = 40% justo después de 6 días



39. **(a)** 5.414 amperes, 7.5854 amperes, 10.38 amperes **(b)** 12 amperes **(c)** $I_1(t) = 12(1 - e^{-2t})$ **(d)** 3.343 amperes, 5.309 amperes, 9.443 amperes **(e)** 24 amperes **(f)** $I_2(t) = 24(1 - e^{-1/2t})$



41. **(a)** 9.23×10^{-3} **(b)** 0.81 **(c)** 5 **(d)** 57.91°, 43.98°, 30.06°

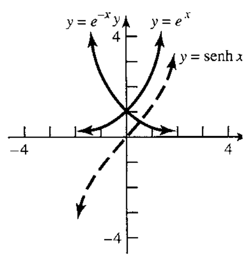


43. $n = 4$: 2.7083; $n = 6$: 2.7181; $n = 8$: 2.7182788; $n = 10$: 2.7182818

45. $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{a^{x+h} - a^x}{h} = \dfrac{a^x a^h - a^x}{h} = \dfrac{a^x(a^h - 1)}{h}$ **47.** $f(-x) = a^{-x} = \dfrac{1}{a^x} = \dfrac{1}{f(x)}$

49. (**a**) $\operatorname{senh}(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^{x})$
$= -\frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$
$= -\operatorname{senh} x$

(**b**)

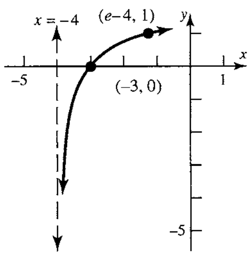


51. $f(1) = 5, f(2) = 17, f(3) = 257, f(4) = 65{,}537$; $f(5) = 4{,}294{,}967{,}297 = 641 \times 6{,}700{,}417$

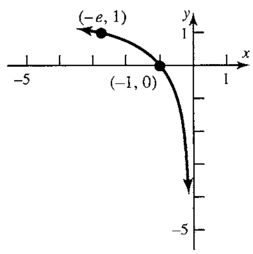
Ejercicios 4.2

1. $2 = \log_3 9$ **3.** $2 = \log_a 1.6$ **5.** $2 = \log_{1.1} M$ **7.** $x = \log_2 7.2$ **9.** $\sqrt{2} = \log_x \pi$ **11.** $x = \ln 8$ **13.** $2^3 = 8$ **15.** $a^6 = 3$ **17.** $3^x = 2$ **19.** $2^{1.3} = M$ **21.** $(\sqrt{2})^x = \pi$ **23.** $e^x = 4$ **25.** 0 **27.** 2 **29.** -4 **31.** $\frac{1}{2}$ **33.** 4 **35.** $\frac{1}{2}$ **37.** $\{x|x < 3\}$ **39.** Todos los números reales excepto 0 **41.** $\{x|x < -2 \text{ o } x > 3\}$ **43.** $\{x|x > 0, x \neq 1\}$ **45.** $\{x|x < -1 \text{ o } x > 0\}$ **47.** 0.511 **49.** 30.099 **51.** $\sqrt{2}$ **53.** B **55.** D **57.** A **59.** E

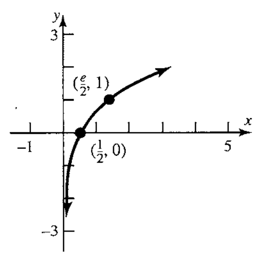
61.



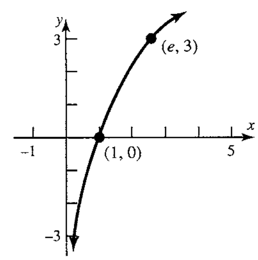
63.



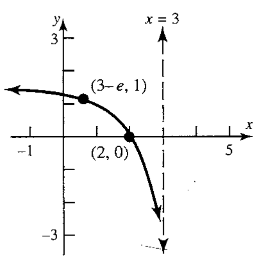
65.



67.

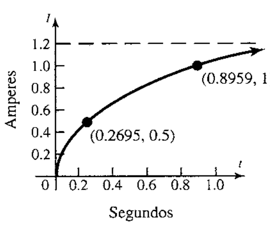


69.



71. (**a**) $n = 6.93$ de modo que se necesitan 7 cristales (**b**) $n = 13.86$ de modo que se necesitan 14 cristales
73. (**a**) $d = 127.7$ de modo que tomará casi 128 días (**b**) $d = 575.6$ de modo que tomará casi 576 días
75. $h = 2.29$ de modo que el tiempo entre inyecciones es de 2-$2\frac{1}{2}$ horas

77. 0.2695 seg; 0.8959 seg.



79. (**a**) $k = 20.07$ (**b**) 91% (**c**) 0.175 (**d**) 0.08
81. $y = 20\, e^{0.023t}$; $y = 89.2$ es pronosticado

Ejercicios 4.3

1. $a + b$ **3.** $b - a$ **5.** $a + 1$ **7.** $2a + b$ **9.** $\frac{1}{5}(a + 2b)$ **11.** $\dfrac{b}{a}$ **13.** $2 \ln x + \frac{1}{2}\ln(1 - x)$ **15.** $3 \log_2 x - \log_2(x - 3)$
17. $\log x + \log(x + 2) - 2\log(x + 3)$ **19.** $\frac{1}{3}\ln(x - 2) + \frac{1}{3}\ln(x + 1) - \frac{2}{3}\ln(x + 4)$ **21.** $\ln 5 + \ln x + \frac{1}{2}\ln(1 - 3x) - 3\ln(x - 4)$
23. $\log_5 u^3 v^4$ **25.** $-\frac{5}{2}\log_{1/2} x$ **27.** $-2\ln(x - 1)$ **29.** $\log_2[x(3x - 2)^4]$ **31.** $\log_a\left[\dfrac{25x^6}{(2x + 3)^{1/2}}\right]$ **33.** 2.771 **35.** -3.880

37. 5.615 **39.** 0. 874 **41.** $\log_a(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \log_a(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \log_a[(x + \sqrt{x^2 - 1})(x - \sqrt{x^2 - 1})] = \log_a[x^2 - (x^2 - 1)] = \log_a 1 = 0$
43. $\ln(1 + e^{2x}) = \ln[e^{2x}(e^{-2x} + 1)] = \ln e^{2x} + \ln(e^{-2x} + 1) = 2x + \ln(1 + e^{-2x})$

45. $y = f(x) = \log_a x$; $a^y = x$; $\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-y} = x$; $-y = \log_{1/a} x$; $-f(x) = \log_{1/a} x$ **47.** $f(AB) = \log_a AB = \log_a A + \log_a B = f(A) + f(B)$

49. $y = Cx$ **51.** $y = Cx(x + 1)$ **53.** $y = Ce^{3x}$ **55.** $y = Ce^{-4x} + 3$ **57.** $y = \dfrac{\sqrt[3]{C}(2x + 1)^{1/6}}{(x + 4)^{1/9}}$ **59.** 3 **61.** 1

63. Si $A = \log_a M$ y $B = \log_a N$, entonces $a^A = M$ y $a^B = N$. Entonces $\log_a (M/N) = \log_a (a^A/a^B) = \log_a a^{A-B} = A - B = \log_a M - \log_a N$.

Ejercicio 4.4

1. $\frac{7}{2}$ **3.** $\{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$ **5.** 16 **7.** 8 **9.** 3 **11.** 5 **13.** 2 **15.** $\{-2, 4\}$ **17.** 21 **19.** $\frac{1}{2}$ **21.** $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$

23. $\left\{1 - \dfrac{\sqrt{6}}{3}, 1 + \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right\}$ **25.** 0 **27.** 2 **29.** 0 **31.** $\frac{3}{2}$ **33.** 3.322 **35.** -0.088 **37.** 0.307 **39.** 1.356 **41.** 0

43. 0.534 **45.** 0.226 **47.** 2.027 **49.** $\frac{9}{2}$ **51.** 2 **53.** -1 **55.** 1 **57.** 16 **59.** -0.56 **61.** -0.70
63. 0.56 **65.** $\{0.39, 1.00\}$ **67.** 1.31 **69.** 1.30

Ejercicio 4.5

1. \$108.29 **3.** \$609.50 **5.** \$697.09 **7.** \$12.46 **9.** \$125.23 **11.** \$88.72 **13.** \$860.72 **15.** \$554.09 **17.** \$59.71 **19.** \$361.93

21. 5.35% **23.** 26% **25.** $6\frac{1}{4}$% compuesto anualmente **27.** 9% compuesto mensualmente **29.** 104.32 mensual; 103.97 mensual

31. 61.02 mensual; 60.82 mensual **33.** 15.27 años o 15 años 4 meses **35.** \$104,335 **37.** \$12,910.62 **39.** Alrededor de \$30.17 por acción o \$3017

41. 9.35% **43.** No completamente. Tendrá \$1057.60. El segundo banco da una mejor cantidad, ya que usted obtiene \$1060.62 después de 1 año

45. Usted obtiene \$11,632.73; su amigo \$10,947.89

47. **(a)** El interés es de \$30,000.00 **(b)** El interés es de \$38,613.59 **(c)** El interés es de \$37,752.73. Es mejor interés simple al 12%

49. **(a)** \$1364.62 **(b)** \$1353.35 **51.** \$4631.93

59. **(a)** 6.1 años **(b)** 18.45 años **(c)**

$$mP = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$
$$m = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$
$$\ln m = \ln\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = nt \ln\left(1 + \frac{r}{n}\right)$$
$$t = \frac{\ln m}{n\ ln\ (1 + \frac{r}{n})}$$

Ejercicio 4.6

1. 34.7 días; 69.3 días **3.** 28.4 años **5.** 94.4 años **7.** 5832; 3.9 días **9.** 25,198 **11.** 9.797 g **13.** Hace 9727 años **15.** 5:18 p.m.
17. 18.63°C; 25.1°C **19.** 7.34 kg; 76.6 horas **21.** 26.5 días.

Ejercicio 4.7

1. 70 decibeles **3.** 111.76 decibeles **5.** 10 W/m^2 **7.** 4.0 en la escala de Richter
9. 70,794.58 mm; el terremoto de San Francisco fue 11.22 veces más intenso qué el de la Ciudad de México.

Complete en los espacios

1. (0, 1) y (1, a) **2.** 1 **3.** 4 **4.** suma **5.** 1 **6.** 7 **7.** $x > 0$ **8.** (1, 0) y (a, 1) **9.** 1 **10.** 7

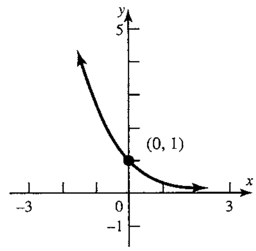
Cierto o falso

1. C **2.** C **3.** F **4.** F **5.** C **6.** F **7.** F **8.** C

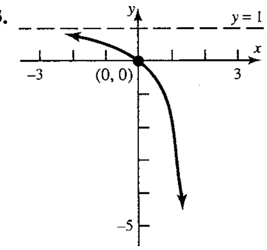
Ejercicios de revisión

1. -3 **3.** $\sqrt{2}$ **5**. 0.4 **7.** $\frac{25}{4}\log_4 x$ **9.** $\ln\left[\dfrac{1}{(x + 1)^2}\right] = -2\ln(x + 1)$ **11.** $\log\left(\dfrac{4x^3}{[(x + 3)(x - 2)]^{1/2}}\right)$ **13.** $y = Ce^{2x^2}$

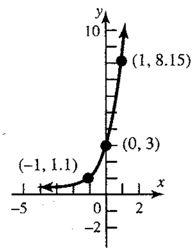
15. $y = (Ce^{3x^2})^2$ **17.** $y = \sqrt{e^{x+C} + 9}$ **19.** $y = \ln(x^2 + 4) - C$ **21.**



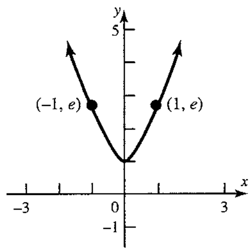
23.



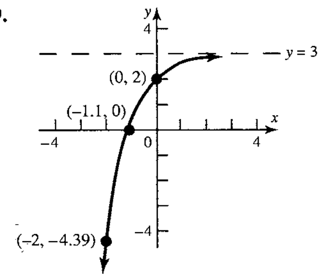
25.



27.



29.



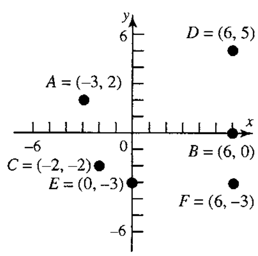
31. $\frac{1}{4}$ **33.** $\left\{\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}\right\}$ **35.** $\frac{1}{4}$ **37.** 4.301 **39.** $\frac{12}{5}$ **41.** 83 **43.** $\left\{-3, \frac{1}{2}\right\}$ **45.** -1 **47.** -0.609 **49.** -9.327

51. 3229.5 m **53.** 7.6 mm de mercurio **55.** **(a)** 37.3 watts **(b)** 6.9 decibeles

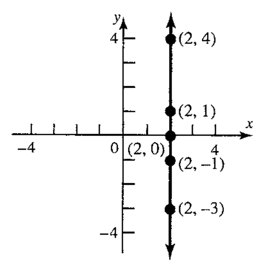
57. **(a)** 71% **(b)** 85.5% **(c)** 90% **(d)** Casi 1.6 meses **(e)** Casi 4.8 meses

59. **(a)** 9.85 años **(b)** 4.27 años **61.** $41,669 **63.** 80 decibeles **65.** hace 24,203 años

1. **(a)** II cuadrante
(b) Parte positiva del eje-x
(c) III cuadrante
(d) I cuadrante
(e) Parte negativa del eje-y
(f) IV cuadrante

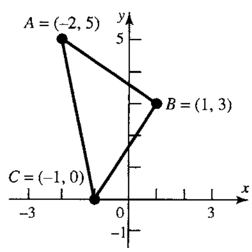


3. Los puntos estarán sobre la recta vertical situada 2 unidades a la derecha del eje-y.

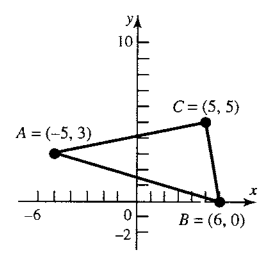


5. $\sqrt{5}$; $(1, \frac{1}{2})$ **7.** $2\sqrt{2}$; $(0, 2)$ **9.** 5; $(3, -\frac{3}{2})$ **11.** $\sqrt{85}$; $(\frac{3}{2}, 1)$ **13.** $2\sqrt{5}$; $(5, -1)$ **15.** 2.625; $(1.05, 0.7)$ **17.** $\sqrt{a^2 + b^2}$; $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$

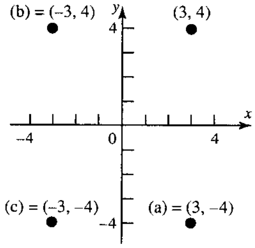
19. $d(A, B) = \sqrt{13}$
$d(B, C) = \sqrt{13}$
$d(A, C) = \sqrt{26}$
$(\sqrt{13})^2 + (\sqrt{13})^2 = (\sqrt{26})^2$
área = $\frac{13}{2}$ unidades cuadradas

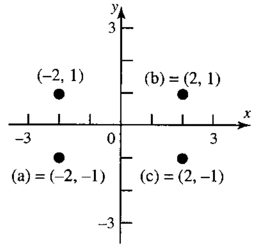


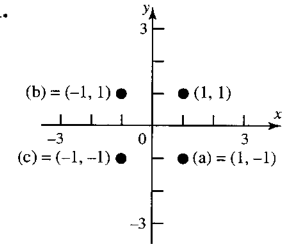
21. $d(A, B) = \sqrt{130}$
$d(B, C) = \sqrt{26}$
$d(A, C) = \sqrt{104}$
$(\sqrt{26})^2 + (\sqrt{104})^2 = (\sqrt{130})^2$
área = 26 unidades cuadradas

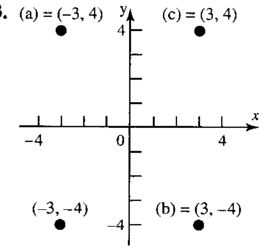


23. $(2, -4)$, $(2, 2)$ **25.** $(-2, 0)$, $(6, 0)$

27. 

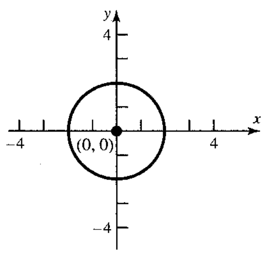
29. 

31. 

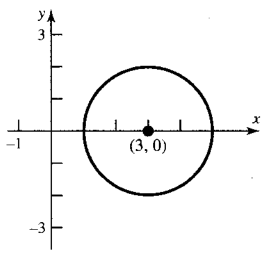
33. 

35. **(a)** $(-1, 0)$, $(1, 0)$ **(b)** eje x, eje y, origen **37.** **(a)** $(-\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(0, 1)$ **(b)** eje x **39.** **(a)** $(0, 0)$ **(b)** eje y
41. **(a)** $(-1.5, 0)$, $(0, -2)$, $(1.5, 0)$ **(b)** eje y **43.** **(a)** ninguno **(b)** origen **45.** $x^2 + (y - 2)^2 = 4$; $x^2 + y^2 - 4y = 0$
47. $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$; $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$ **49.** $x^2 + y^2 = 4$; $x^2 + y^2 - 4 = 0$ **51.** Centro $(2, 1)$; radio 2; $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$
53. Centro $(\frac{5}{2}, 2)$; radio $\frac{3}{2}$; $(x - \frac{5}{2})^2 + (y - 2)^2 = \frac{9}{4}$ **55.** (c) **57.** (b)

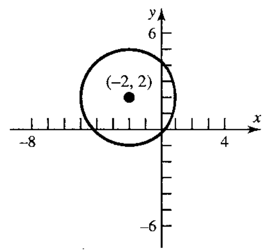
59. $r = 2$; $(h, k) = (0, 0)$



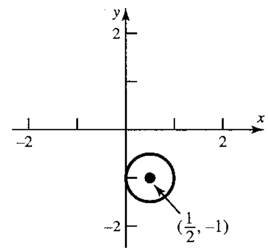
61. $r = 2$; $(h, k) = (3, 0)$



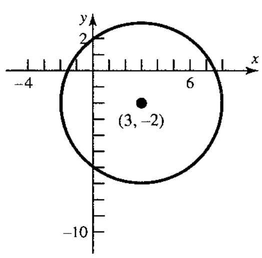
63. $r = 3$; $(h, k) = (-2, 2)$

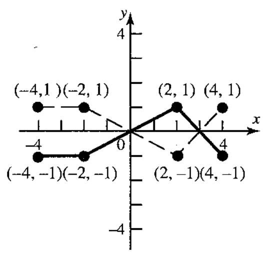


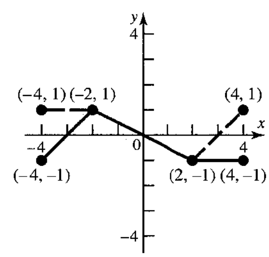
65. $r = \frac{1}{2}$; $(h, k) = (\frac{1}{2}, -1)$



67. $r = 5$; $(h, k) = (3, -2)$



69. 

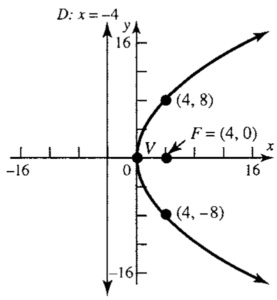
71. 

73. $(0, 0)$; simétrica con respecto al eje y **75.** $(0, 0)$; simétrica con respecto al origen
77. $(0, 9)$, $(3, 0)$, $(-3, 0)$; simétrica con respecto al eje-y
79. $(-3, 0)$, $(3, 0)$, $(0, -2)$, $(0, 2)$; simétrica con respecto al eje-x, al eje-y y al origen **81.** $(0, -27)$, $(3, 0)$; no hay simetría
83. $(0, -4)$, $(4, 0)$, $(-1, 0)$; no hay simetría **85.** $(0, 0)$; simétrica con respecto al origen
87. **(a)** $(90, 0)$, $(90, 90)$, $(0, 90)$ **(b)** 232.4 pies **(c)** 366.2 pies **89.** $d = 50t$ **91.** $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4168.16 = 0$

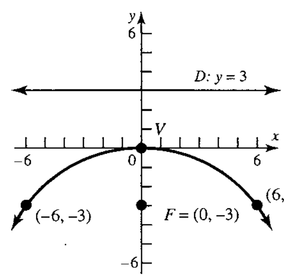
Ejercicio 9.2

1. B **3.** E **5.** H **7.** C

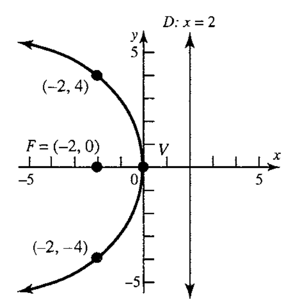
9. $y^2 = 16x$



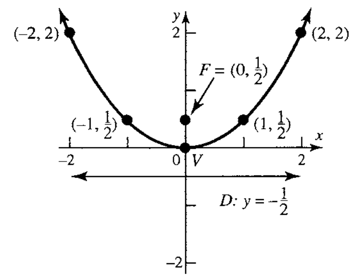
11. $x^2 = -12y$



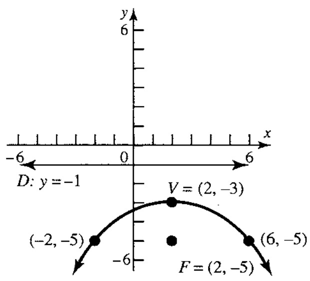
13. $y^2 = -8x$



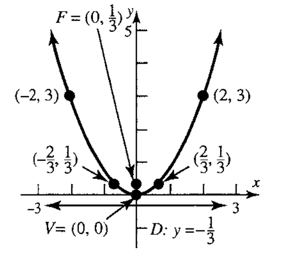
15. $x^2 = 2y$



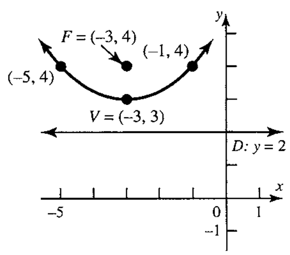
17. $(x - 2)^2 = -8(y + 3)$



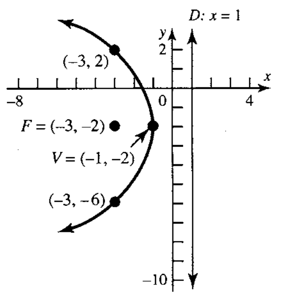
19. $x^2 = \frac{4}{3}y$



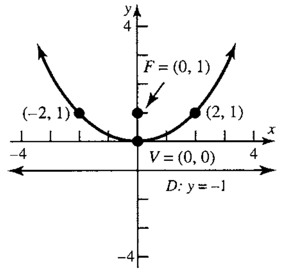
21. $(x + 3)^2 = 4(y - 3)$



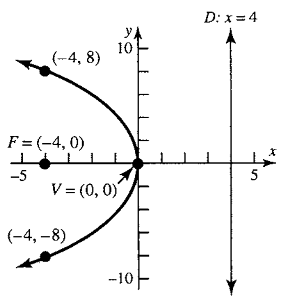
23. $(y + 2)^2 = -8(x + 1)$



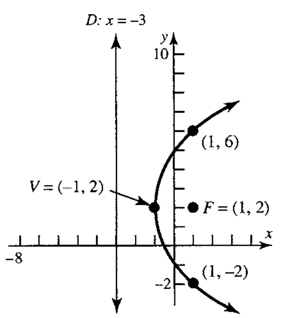
25.



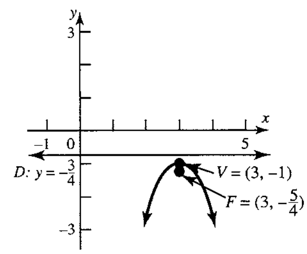
27.



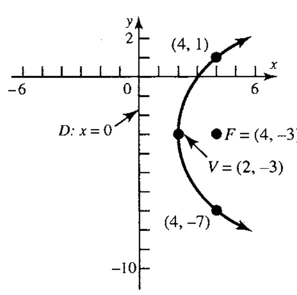
29.



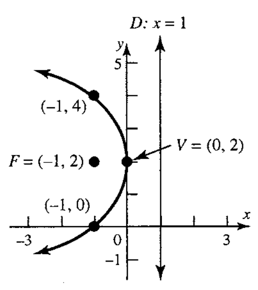
31.



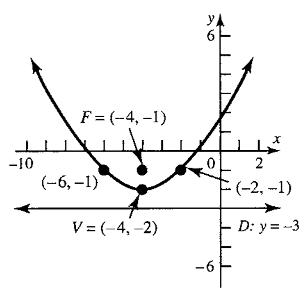
33.



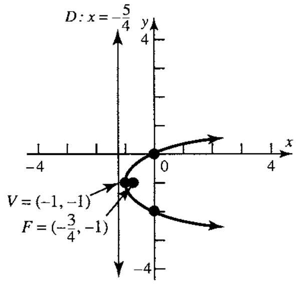
35.



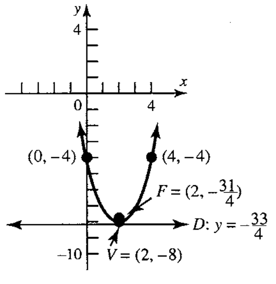
37.



39.



41.



43. $(y-1)^2 = x$ **45.** $(y-1)^2 = -(x-2)$ **47.** $x^2 = 4(y-1)$ **49.** $y^2 = \frac{1}{2}(x+2)$
51. 1.5625 pies desde la base del disco, a lo largo del eje de simetría **53.** 1 pulgada desde el vértice **55.** 20 pies
57. 0.78125 pies **59.** 4.17 pies desde la base a lo largo del eje de simetría **61.** 24.31 pies, 18.75 pies, 7.64 pies

63. $Ax^2 + Ey = 0$

$$x^2 = -\frac{E}{A}y$$

Esta es la ecuación de una parábola con vértice en (0, 0) y eje de simetría en el eje y. El foco está en $(0, -E/4A)$; la directriz es la recta $y = E/4A$. La parábola abre hacia arriba si $-E/A > 0$ y hacia abajo si $-E/A < 0$.

65. $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0, A \neq 0$

$$Ax^2 + Dx = -Ey - F$$
$$x^2 + \frac{D}{A}x = -\frac{E}{A}y - \frac{F}{A}$$
$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 = -\frac{E}{A}y - \frac{F}{A} + \frac{D^2}{4A^2}$$
$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 = -\frac{E}{A}y + \frac{D^2 - 4AF}{4A^2}$$

(a) Si $E \neq 0$, entonces la ecuación puede escribirse como

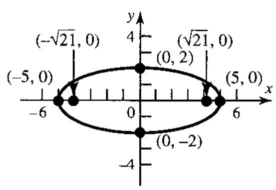
$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 = -\frac{E}{A}\left(y - \frac{D^2 - 4AF}{4AE}\right)$$

Esta es la ecuación de una parábola con vértice en $(-D/2A, (D^2 - 4AF)/(4AE))$ y eje de simetría paralelo al eje-y.

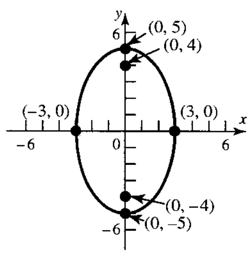
(b)–(d) Si $E = 0$, la gráfica de la ecuación no tiene puntos si $D^2 - 4AF < 0$, es una recta vertical si $D^2 - 4AF = 0$, y son dos rectas verticales si $D^2 - 4AF > 0$.

1. C **3.** B

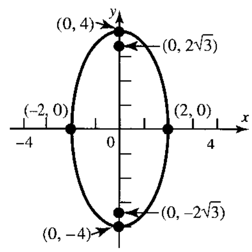
5.



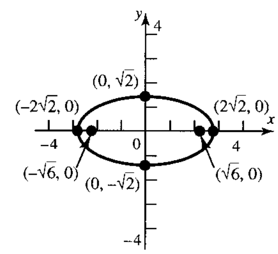
7.



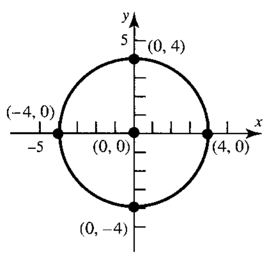
9. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$



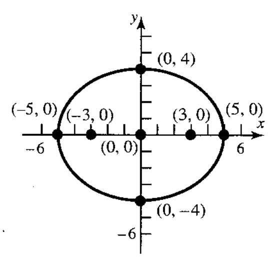
11. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$



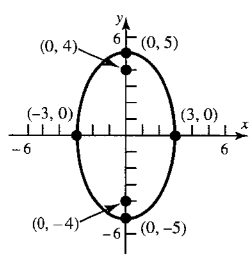
13.



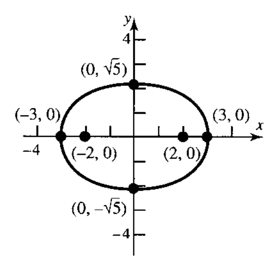
15. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$



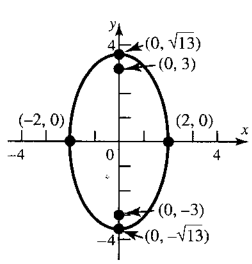
17. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$



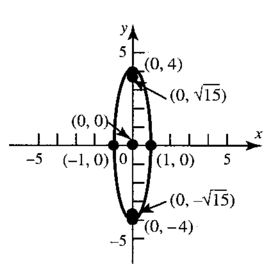
19. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$



21. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{13} = 1$



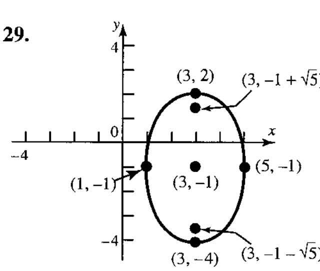
23. $x^2 + \frac{y^2}{16} = 1$



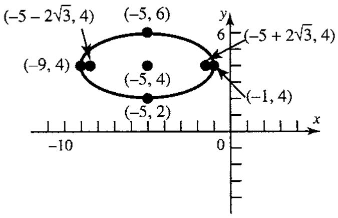
25. $\frac{(x+1)^2}{4} + (y-1)^2 = 1$

27. $(x-1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

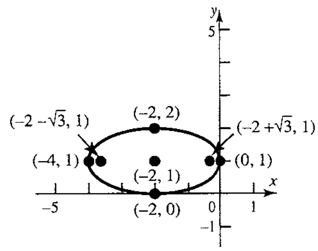
29.



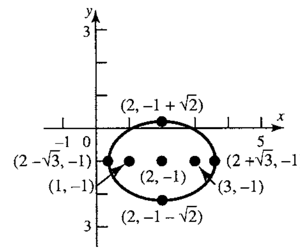
31. $\frac{(x+5)^2}{16} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1$



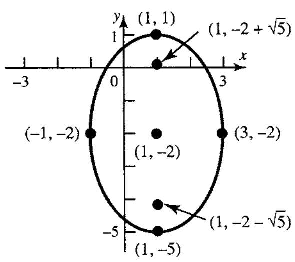
33. $\frac{(x+2)^2}{4} + (y-1)^2 = 1$



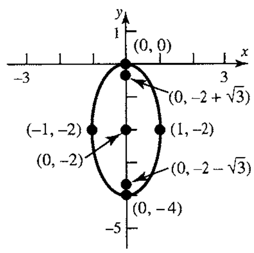
35. $\frac{(x-2)^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{2} = 1$



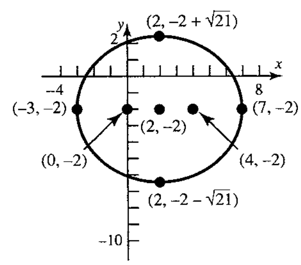
37. $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$



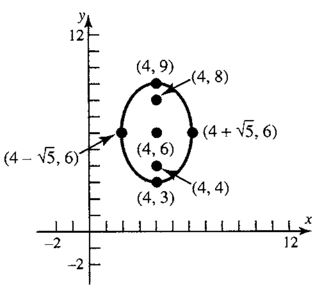
39. $x^2 + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$



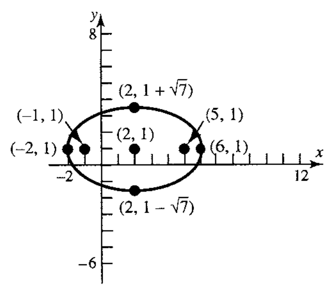
41. $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{21} = 1$



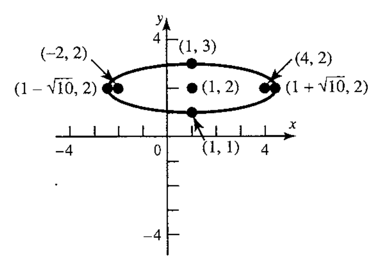
43. $\frac{(x-4)^2}{5} + \frac{(y-6)^2}{9} = 1$



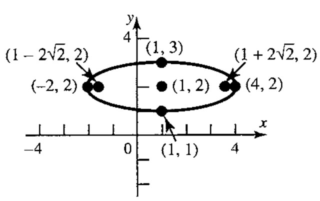
45. $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{7} = 1$



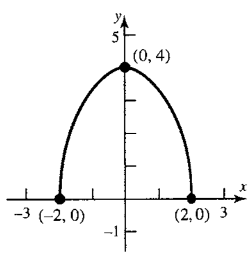
47. $\frac{(x-1)^2}{10} + (y-2)^2 = 1$



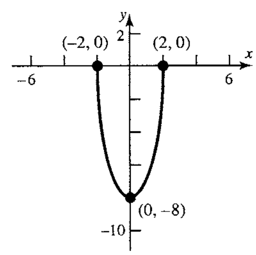
49. $\frac{(x-1)^2}{9} + (y-2)^2 = 1$



51.



53.



55. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ **57.** 43.3 pies **59.** 24.65 pies, 21.65 pies, 13.82 pies **61.** 0 pies, 12.99 pies, 15 pies, 12.99 pies, 0 pies

63. 91.5 millones de millas; $\frac{x^2}{(93)^2} + \frac{y^2}{8646.75} = 1$ **65.** perihelio: 460.6 millones de millas; distancia media: 483.8 millones de millas; $\frac{x^2}{(483.8)^2} + \frac{y^2}{233524} = 1$

67. 30 pies

69. (a) $Ax^2 + Cy^2 + F = 0$
$Ax^2 + Cy^2 = -F$

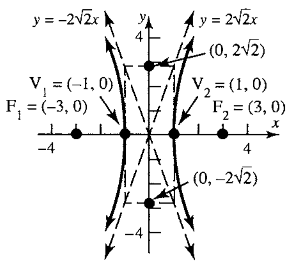
Si A y C son del mismo signo y F es de signo opuesto, entonces la ecuación toma la forma $x^2/(-F/A) + y^2/(-F/C) = 1$, donde $-F/A$ y $-F/C$ son positivos. Esta es la ecuación de una elipse con centro en (0, 0).

(b) Si $A = C$, la ecuación puede escribirse como $x^2 + y^2 = -F/A$. Esta es la ecuación de un círculo con centro en (0, 0) y radio igual a $\sqrt{-F/A}$.

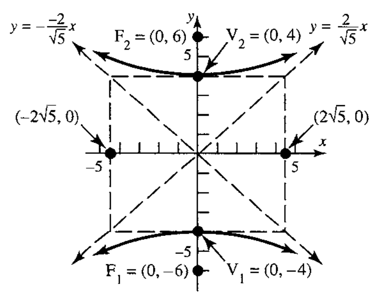
Ejercicio 9.4

1. B **3.** A

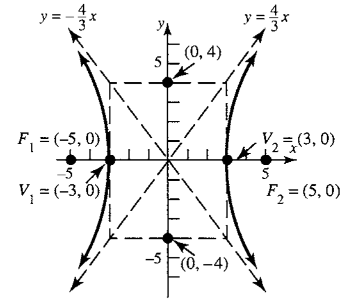
5. $x^2 - \dfrac{y^2}{8} = 1$



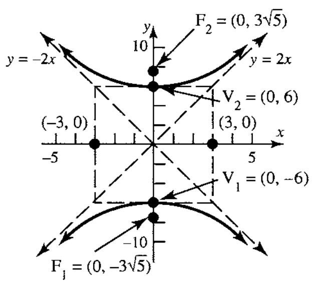
7. $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{20} = 1$



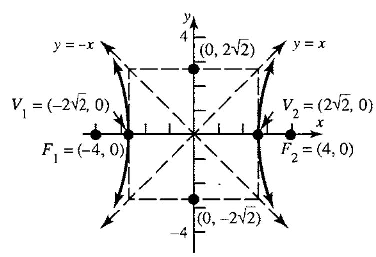
9. $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$



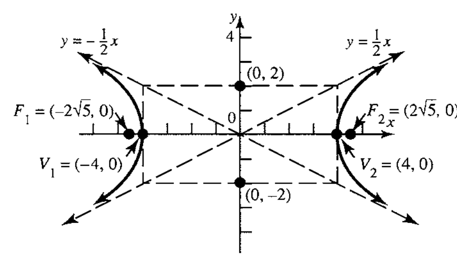
11. $\dfrac{y^2}{36} - \dfrac{x^2}{9} = 1$



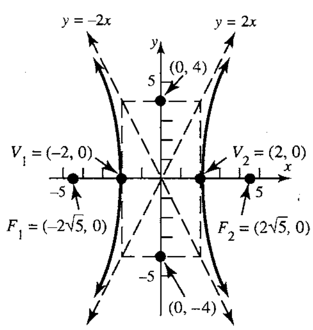
13. $\dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{8} = 1$



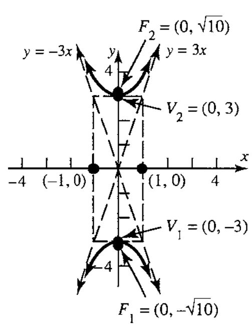
15. $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$



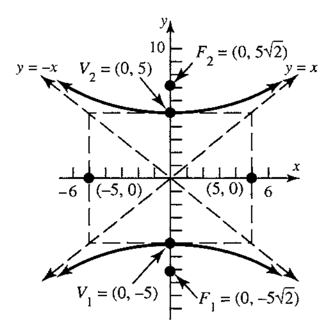
17. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{16} = 1$



19. $\dfrac{y^2}{9} - x^2 = 1$



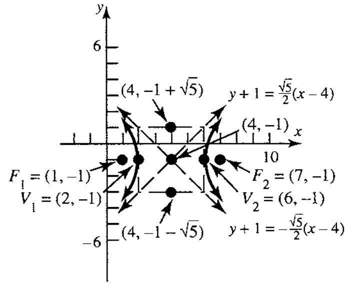
21. $\dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{25} = 1$



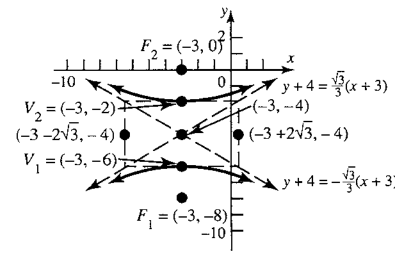
23. $x^2 - y^2 = 1$

25. $\dfrac{y^2}{36} - \dfrac{x^2}{9} = 1$

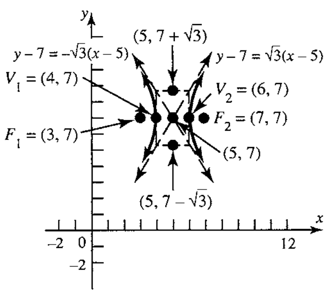
27. $\dfrac{(x-4)^2}{4} - \dfrac{(y+1)^2}{5} = 1$



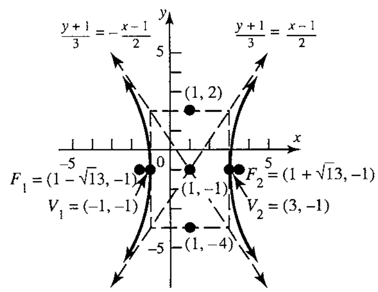
29. $\dfrac{(y+4)^2}{4} - \dfrac{(x+3)^2}{12} = 1$



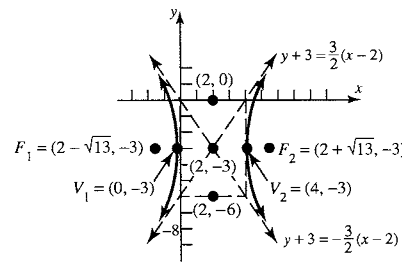
31. $(x-5)^2 - \dfrac{(y-7)^2}{3} = 1$



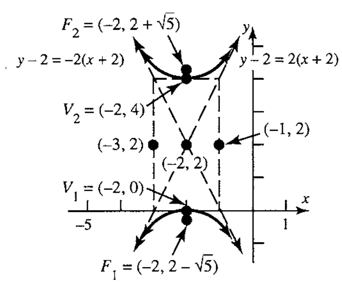
33. $\dfrac{(x-1)^2}{4} - \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$



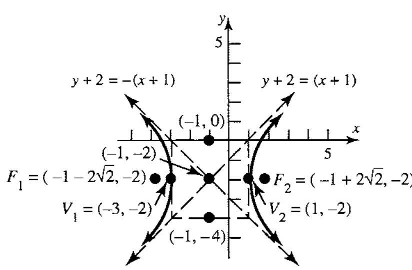
35. $\dfrac{(x-2)^2}{4} - \dfrac{(y+3)^2}{9} = 1$



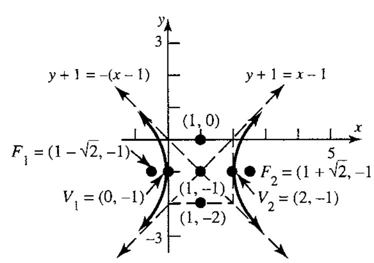
37. $\dfrac{(y-2)^2}{4} - (x+2)^2 = 1$



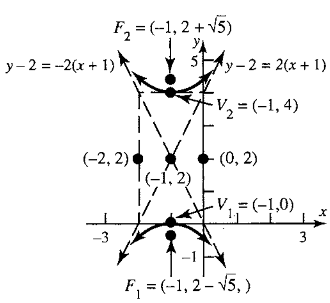
39. $\dfrac{(x+1)^2}{4} - \dfrac{(y+2)^2}{4} = 1$



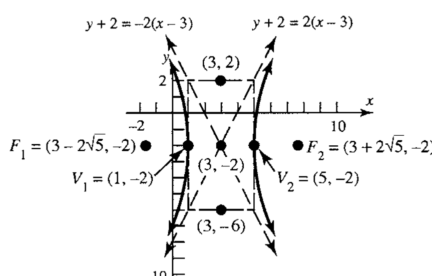
41. $(x-1)^2 - (y+1)^2 = 1$



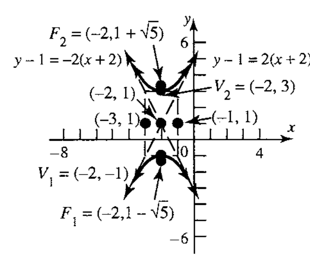
43. $\dfrac{(y-2)^2}{4} - (x+1)^2 = 1$



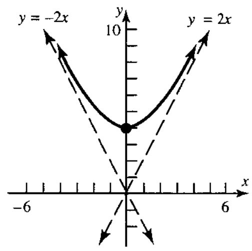
45. $\dfrac{(x-3)^2}{4} - \dfrac{(y+2)^2}{16} = 1$



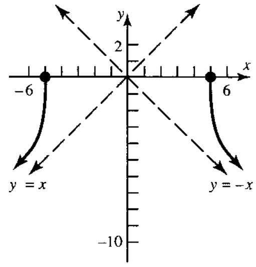
47. $\dfrac{(y-1)^2}{4} - (x+2)^2 = 1$



49.

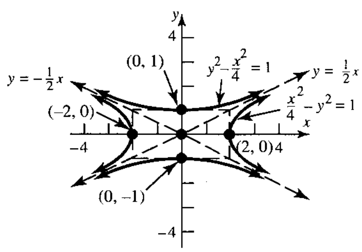


51.



53. **(a)** El barco alcanzará la costa en un punto a 64.66 millas desde la estación maestra. **(b)** 0.00086 segundos **(c)** (104, 50)
55. **(a)** 450 pies **57.** Si e es cercana a 1, la hipérbola es angosta; si e es muy grande, la hipérbola es muy ancha

59. $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$; asíntotas $y = \pm \dfrac{1}{2}x$ $y^2 - \dfrac{x^2}{4} = 1$; asíntotas $y = \pm \dfrac{1}{2}x$



61. $Ax^2 + Cy^2 + F = 0$
$Ax^2 + Cy^2 = -F$

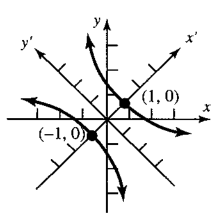
Si A y C tienen signos opuestos $F \neq 0$, esta ecuación puede escribirse como $x^2/(-F/A) + y^2/(-F/C) = 1$, donde $-F/A$ y $-F/C$ son de signos opuestos. Esta es la ecuación de una hipérbola con centro en (0, 0). El eje transverso es el eje-x si $-F/A > 0$; el eje transverso es el eje-y si $-F/A < 0$.

1. Parábola **3.** Elipse **5.** Hipérbola **7.** Hipérbola **9.** Círculo **11.** $x = \sqrt{2}/2(x' - y')$, $y = \sqrt{2}/2(x' + y')$
13. $x = \sqrt{2}/2(x' - y')$, $y = \sqrt{2}/2(x' + y')$ **15.** $x = \frac{1}{2}(x' - \sqrt{3}y')$, $y = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x' + y')$ **17.** $x = \sqrt{5}/5(x' - 2y')$, $y = \sqrt{5}/5(2x' + y')$
19. $x = \sqrt{13}/13(3x' - 2y')$, $y = \sqrt{13}/13(2x' + 3y')$

21. $\theta = 45°$ (*véase* el problema 11)

$x'^2 - \dfrac{y'^2}{3} = 1$

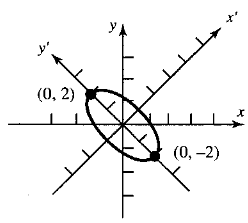
Hipérbola
Centro en el origen
El eje transverso es el eje-x'
Vértices en (± 1, 0)



23. $\theta = 45°$ (*véase* el problema 13)

$x'^2 + \dfrac{y'^2}{4} = 1$

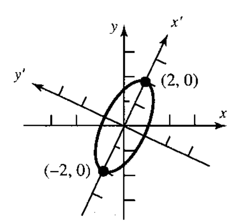
Elipse
Centro en el origen (0, 0)
El eje mayor es el eje y'
Vértices en (0, ± 2)



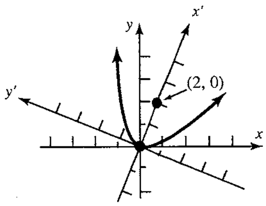
25. $\theta = 60°$ (*véase* el problema 15)

$\dfrac{x'^2}{4} + y'^2 = 1$

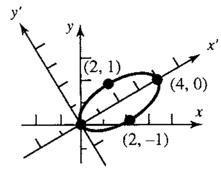
Elipse
Centro en (0, 0)
El eje mayor es el eje-x'
Vértices en (± 2, 0)



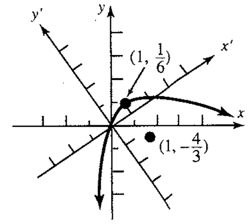
27. $\theta \approx 63°$ (*véase* el problema 17)
$y'^2 = 8x'$
Parábola
Vértice en (0, 0)
Foco en (2, 0)



29. $\theta \approx 34°$ (*véase* el problema 19)
$$\frac{(x'-2)^2}{4} + y'^2 = 1$$
Elipse
Centro en (2, 0)
El eje mayor es el eje-x'
Vértices en (0, 0)



31. $\cot 2\theta = \frac{7}{24}$; $\theta \approx 37°'$
$(x' - 1)^2 = -6(y' - \frac{1}{6})$
Parábola
Vértice en $(1, \frac{1}{6})$
Foco en $(1, -\frac{4}{3})$

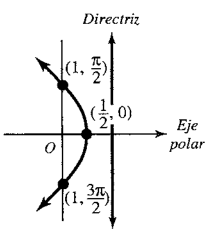


33. Hipérbola **35.** Hipérbola **37.** Parábola **39.** Elipse **41.** Elipse
43. Consúltese la ecuación (6):
$$A' = A\cos^2\theta + B\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + C\,\mathrm{sen}^2\,\theta$$
$$B' = B(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta) + 2(C - A)(\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta)$$
$$C' = A\,\mathrm{sen}^2\,\theta - B\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + C\cos^2\theta$$
$$D' = D\cos\theta + E\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$E' = -D\,\mathrm{sen}\,\theta + E\cos\theta$$
$$F' = F$$
45. Utilice el problema 43 para determinar $B'^2 - 4A'C'$. Después de varias cancelaciones, $B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$.
47. Utilice las fórmulas (5) para determinar $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$. Luego de simplificar, $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2$.

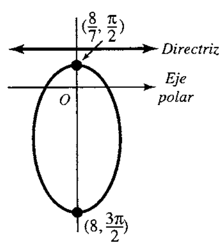
Ejercicio 9.6

1. Parábola; la directriz es perpendicular al eje polar 1 unidad a la derecha del polo.
3. Hipérbola; la directriz es paralela al eje polar $\frac{4}{3}$ unidades abajo del polo.
5. Elipse; la directriz es perpendicular al eje polar $\frac{3}{2}$ unidades a la izquierda del polo.

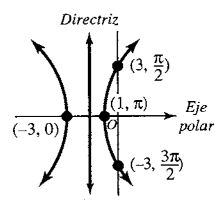
7. Parábola; la directriz es perpendicular al eje polar 1 unidad a la derecha del polo.



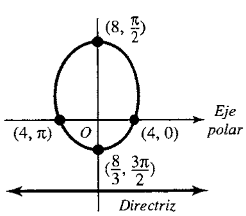
9. Elipse; la directriz es paralela al eje polar $\frac{8}{3}$ unidades arriba del polo.



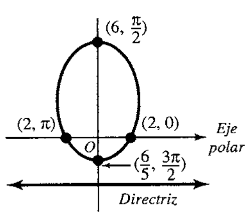
11. Hipérbola; la directriz es perpendicular al eje polar $\frac{3}{2}$ unidades a la izquierda del polo.



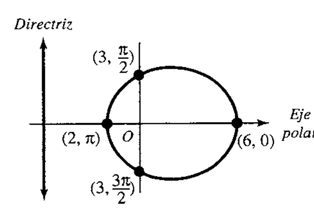
13. Elipse; la directriz es paralela al eje polar 8 unidades abajo del polo; los vértices están en $(8, \pi/2)$ y $(\frac{8}{3}, 3\pi/2)$.



15. Elipse; la directriz es paralela al eje polar 3 unidades abajo del polo; los vértices están en $(6, \pi/2)$ y $(\frac{6}{5}, 3\pi/2)$.



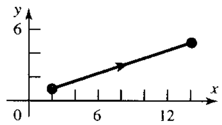
17. Elipse; la directriz es perpendicular al eje polar 6 unidades a la izquierda del polo; los vértices están en (6, 0) y $(2, \pi)$.



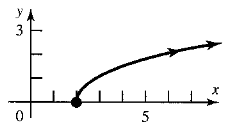
19. $y^2 + 2x - 1 = 0$ **21.** $16x^2 + 7y^2 + 48y - 64 = 0$ **23.** $3x^2 - y^2 + 12x + 9 = 0$ **25.** $4x^2 + 3y^2 - 16y - 64 = 0$
27. $9x^2 + 5y^2 - 24y - 36 = 0$ **29.** $3x^2 + 4y^2 - 12x - 36 = 0$ **31.** $r = 1/(1 + \mathrm{sen}\,\theta)$ **33.** $r = 12/(5 - 4\cos\theta)$ **35.** $r = 12/(1 - 6\,\mathrm{sen}\,\theta)$
37. Utilice $d(D, P) = p - r\cos\theta$ al deducir la ecuación (a) de la tabla 5.
39. Utilice $d(D, P) = p + r\,\mathrm{sen}\,\theta$ al deducir la ecuación (a) de la tabla 5.

Ejercicio 9.7

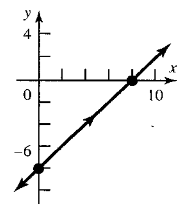
1. $x - 3y + 1 = 0$



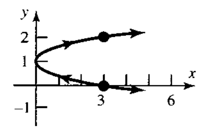
3. $y = \sqrt{x - 2}$



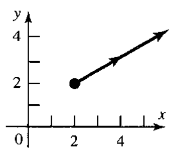
5. $x = y + 8$



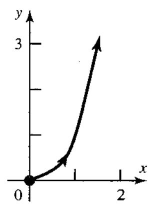
7. $x = 3(y - 1)^2$



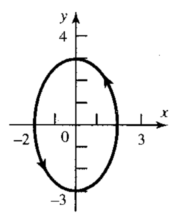
9. $2y = 2 + x$



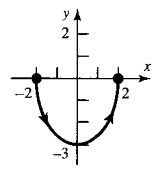
11. $y = x^3$



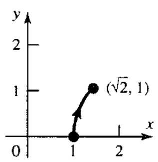
13. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$



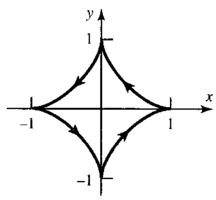
15. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$



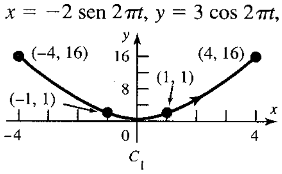
17. $x^2 - y^2 = 1$

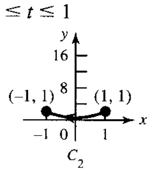


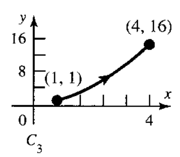
19. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

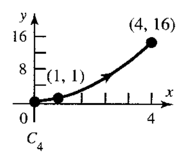


21. $x = t,\ y = t^3;\ x = \sqrt[3]{t},\ y = t$ **23.** $x = t,\ y = t^{2/3};\ x = t^{3/2},\ y = t$ **25.** $x = 2 \cos \pi t,\ y = -3 \operatorname{sen} \pi t,\ 0 \le t \le 2$
27. $x = -2 \operatorname{sen} 2\pi t,\ y = 3 \cos 2\pi t,\ 0 \le t \le 1$
29.



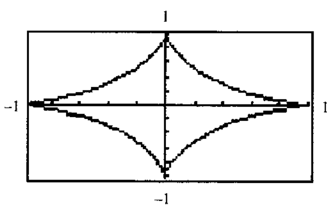




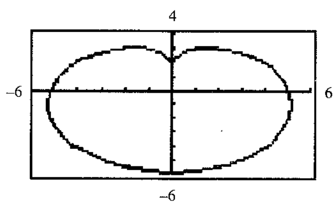


31. La orientación es de (x_1, y_1) a (x_2, y_2).

33.



35.



Complete los espacios

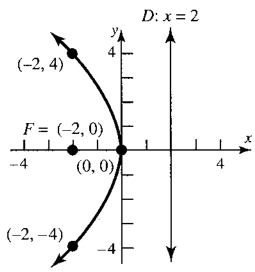
1. parábola **2.** elipse **3.** hipérbola **4.** mayor, transverso **5.** eje Y **6.** $y/3 = x/2;\ y/3 = -x/2$ **7.** $\cot 2\theta = (A - C)/B$
8. $\frac{1}{2}$; elipse; paralela; 4; abajo **9.** elipse

Cierto o falso

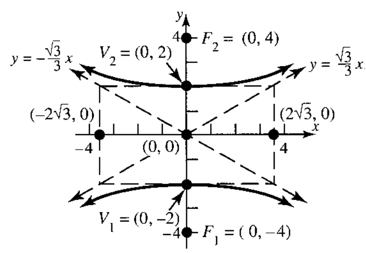
1. C **2.** F **3.** C **4.** C **5.** C **6.** C **7.** C **8.** C **9.** C **10.** F

1. Parábola; vértice (0, 0), foco (−4, 0), directriz $x = 4$
3. Hipérbola; centro (0, 0), vértices (5, 0) y (−5, 0), focos $(\sqrt{26}, 0)$ y $(-\sqrt{26}, 0)$, asíntotas $y = \frac{1}{5}x$ y $y = -\frac{1}{5}x$
5. Elipse; centro (0, 0), vértices (0, 5) y (0, −5), focos (0, 3) y (0, −3)
7. $x^2 = -4(y - 1)$: parábola; vértice (0, 1), foco (0, 0), directriz $y = 2$
9. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} = 1$: hipérbola; centro (0, 0), vértices $(\sqrt{2}, 0)$ y $(-\sqrt{2}, 0)$, focos $(\sqrt{10}, 0)$ y $(-\sqrt{10}, 0)$, asíntotas $y = 2x$ y $y = -2x$
11. $(x - 2)^2 = 2(y + 2)$: parábola; vértice (2,−2), focos $(2, -\frac{3}{2})$, directriz $y = -\frac{5}{2}$
13. $\frac{(y - 2)^2}{4} - (x - 1)^2 = 1$: hipérbola; centro (1, 2), vértices (1, 4) y (1, 0), focos $(1, 2 + \sqrt{5})$ y $(1, 2 - \sqrt{5})$, asíntotas $y - 2 = \pm 2(x - 1)$
15. $\frac{(x - 2)^2}{9} + \frac{(y - 1)^2}{4} = 1$: elipse; centro (2, 1), vértices (5, 1) y (−1, 1), focos $(2 + \sqrt{5}, 1)$ y $(2 - \sqrt{5}, 1)$
17. $(x - 2)^2 = -4(y + 1)$: parábola; vértice (2,−1), foco (2,−2), directriz $y = 0$
19. $\frac{(x - 1)^2}{4} + \frac{(y + 1)^2}{9} = 1$: elipse; centro (1,−1), vértices (1, 2) y (1,−4), focos $(1, -1 + \sqrt{5})$ y $(1, -1 - \sqrt{5})$

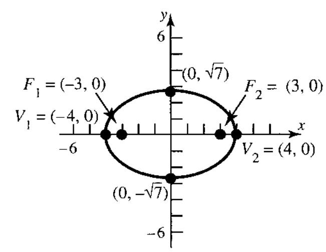
21. $y^2 = -8x$



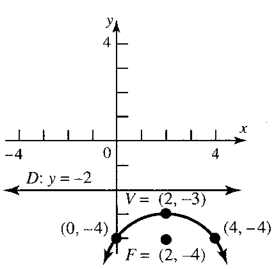
23. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$



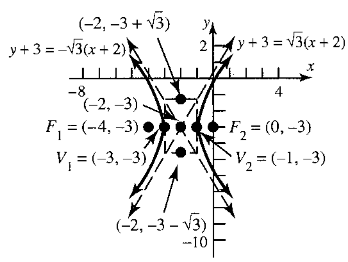
25. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$



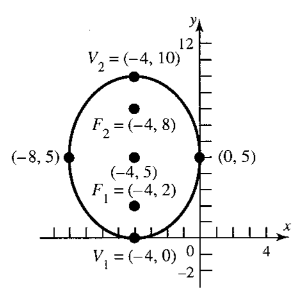
27. $(x - 2)^2 = -4(y + 3)$



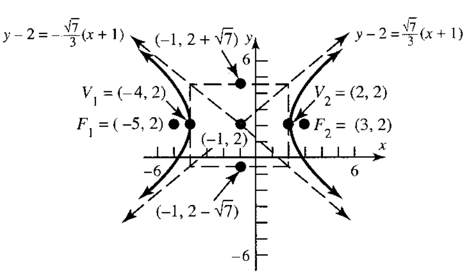
29. $(x + 2)^2 - \frac{(y + 3)^2}{3} = 1$



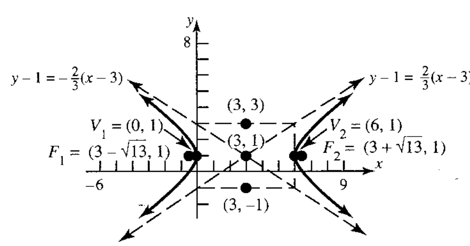
31. $\frac{(x + 4)^2}{16} + \frac{(y - 5)^2}{25} = 1$



33. $\frac{(x + 1)^2}{9} - \frac{(y - 2)^2}{7} = 1$



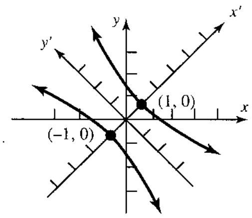
35. $\frac{(x - 3)^2}{9} - \frac{(y - 1)^2}{4} = 1$



37. Parábola **39.** Elipse **41.** Parábola **43.** Hipérbola **45.** Elipse

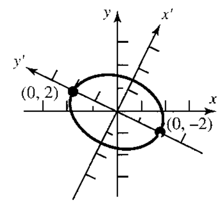
47. $x'^2 - \dfrac{y'^2}{9} = 1$

Hipérbola
Centro en el origen
Eje transverso el eje x'
Vértices en $(\pm 1, 0)$



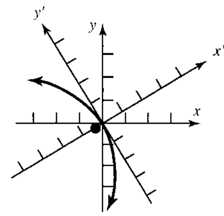
49. $\dfrac{x'^2}{2} + \dfrac{y'^2}{4} = 1$

Elipse
Centro en el origen
Eje mayor el eje y'
Vértices en $(0, \pm 2)$

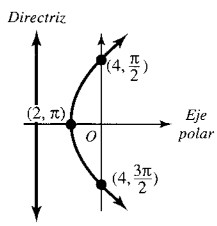


51. $y'^2 = -\dfrac{4\sqrt{13}}{13}x'$

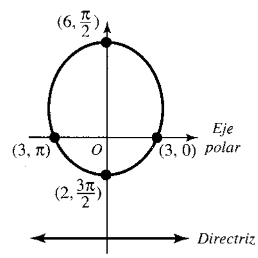
Parábola
Vértice en el origen
Foco en el eje-x' en $(-\sqrt{13}/13, 0)$



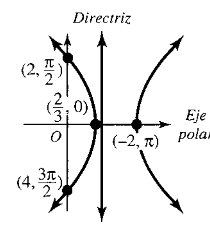
53. Parábola; la directriz es perpendicular al eje polar 4 unidades a la izquierda del polo



55. Elipse; la directriz es paralela al eje polar 6 unidades abajo del polo; los vértices son $(6, \pi/2)$ y $(2, 3\pi/2)$.

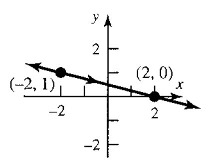


57. Hipérbola; la directriz es perpendicular al eje polar 1 unidad a la derecha del polo; los vértices están en $(\frac{2}{3}, 0)$ y $(-2, \pi)$

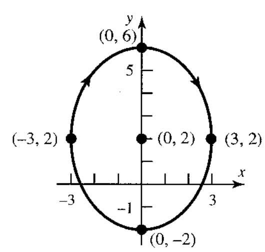


59. $y^2 - 8x - 16 = 0$ **61.** $3x^2 - y^2 - 8x + 4 = 0$

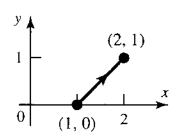
63. $x + 4y = 2$



65. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{(y-2)^2}{16} = 1$



67. $1 + y = x$



69. $\dfrac{x^2}{5} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ **71.** La elipse $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{7} = 1$ **73.** $\frac{1}{4}$ de pie o de 3 pulgadas **75.** 19.72 pies, 18.86 pies, 14.91 pies

77. **(a)** 45.24 millas desde la estación principal **(b)** 0.000645 segundos **(c)** (66, 20)

CAPÍTULO 10 *Ejercicio 10.1*

1. $2(2) - (-1) = 5$ y $5(2) + 2(-1) = 8$ **3.** $3(2) - 4(\frac{1}{2}) = 4$ y $\frac{1}{2}(2) - 3(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$ **5.** $2^2 - 1^2 = 3$ y $(2)(1) = 2$

7. $\dfrac{0}{1+0} + 3(2) = 6$ y $0 + 9(2)^2 = 36$ **9** $3(1) + 3(-1) + 2(2) = 4$, $1 - (-1) - 2 = 0$, y $2(-1) - 3(2) = -8$ **11.** $x = 6$, $y = 2$

13. $x = 3$, $y = 2$ **15.** $x = 8$, $y = -4$ **17.** $x = \frac{1}{3}$, $y = -\frac{1}{6}$ **19.** Inconsistente **21.** $x = 1$, $y = 2$ **23.** $x = 4 - 2y$, y es cualquier número real

25. $x = 1$, $y = 1$ **27.** $x = \frac{3}{2}$, $y = 1$ **29.** $x = 4$, $y = 3$ **31.** $x = \frac{4}{3}$, $y = \frac{1}{5}$ **33.** $x = 8$, $y = 2$, $z = 0$ **35.** $x = 2$, $y = -1$, $z = 1$ **37.** Inconsistente

39. $x = 5z - 2$, $y = 4z - 3$ donde z es cualquier número real, o $x = \frac{5}{4}y + \frac{7}{4}$, $z = \frac{1}{4}y + \frac{3}{4}$ donde y es cualquier número real, o $y = \frac{4}{5}x - \frac{7}{5}$, $z = \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$ donde x es cualquier número real.

41. Inconsistente **43.** $x = 1, y = 3, z = -2$ **45.** $x = -3, y = \frac{1}{2}, z = 1$ **47.** $x = \frac{1}{5}, y = \frac{1}{3}$ **49.** $x = 48.15, y = 15.18$
51. $x = -21.47, y = 16.12$ **53.** $x = 0.26, y = 0.06$ **55.** 20 y 61 **57.** 15 por 30 pies **59.** Hamburguesa con queso \$1.55; malteada \$0.85
61. 22.5 libras **63.** Velocidad promedio del viento 25 mph; promedio de la velocidad en el aire del Piper 175 mph
65. 80 juegos de \$25.00 y 120 de \$45.00 **67.** \$5.56 **69.** 12, 15, 21 **71.** $I_1 = \frac{10}{71}, I_2 = \frac{65}{71}, I_3 = \frac{55}{71}$
73. 100 orquesta, 210 principales y 19 asientos de galería **79.** $b = -\frac{1}{2}; c = \frac{3}{2}$ **81.** $a = \frac{4}{3}, b = -\frac{5}{3}, c = 1$
83. $x = \dfrac{b_1 - b_2}{m_2 - m_1}, y = \dfrac{m_2b_1 - m_1b_2}{m_2 - m_1}$ **85.** $y = mx + b$, x es cualquier número real

Ejercicio 10.2

1. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \end{array}\right]$ **3.** $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 6 \\ 4 & -6 & -2 \end{array}\right]$ **5.** $\left[\begin{array}{cc|c} 0.01 & -0.03 & 0.06 \\ 0.13 & 0.10 & 0.20 \end{array}\right]$ **7.** $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right]$ **9.** $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right]$

11. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 13 & 36 \end{array}\right]$ **13.** $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 15 \end{array}\right]$ **15.** $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & -5 & 108 & -12 \end{array}\right]$ **17.** $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 39 & 16 \end{array}\right]$

19. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 64 & -62 \end{array}\right]$

21. $\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$ consistente; $x = 5, y = -1$

23. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ 0 = 3 \end{cases}$ inconsistente

25. $\begin{cases} x + 2z = -1 \\ y - 4z = -2 \\ 0 = 0 \end{cases}$ consistente; $x = -1 - 2z$, $y = -2 + 4z$, z es cualquier número real

27. $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 + x_4 = 2 \\ x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$ consistente; $x_1 = 1, x_2 = 4 - x_4$, $x_3 = 3 - 2x_4$, x_4 es cualquier número real

29. $\begin{cases} x_1 + 4x_4 = 2 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$ consistente; $x_1 = 2 - 4x_4$, $x_2 = 3 - x_3 - 3x_4$, x_3, x_4 es cualquier número real

31. $x = 6, y = 2$ **33.** $x = 2, y = 3$ **35.** $x = 4, y = -2$ **37.** Inconsistente **39.** $x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{4}$ **41.** $x = 4 - 2y$, y es cualquier número real
43. $x = \frac{3}{2}, y = 1$ **45.** $x = \frac{4}{3}, y = \frac{1}{5}$ **47.** $x = 8, y = 2, z = 0$ **49.** $x = 2, y = -1, z = 1$ **51.** Inconsistente
53. $x = 5z - 2, y = 4z - 3$, z es cualquier número real; o $x = \frac{5}{4}y + \frac{7}{4}, z = \frac{1}{4}y + \frac{3}{4}$, y es cualquier número real; o $y = \frac{4}{5}x - \frac{7}{5}, z = \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$, y es cualquier número real
55. Inconsistente **57.** $x = 1, y = 3, z = -2$ **59.** $x = -3, y = \frac{1}{2}, z = 1$ **61.** $x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}, z = 1$ **63.** $x = 1, y = 2, z = 0, w = 1$
65. $y = 0, z = 1 - x$, x es cualquier número real **67.** $x = 2, y = z - 3$, z es cualquier número real **69.** $x = \frac{13}{9}, y = \frac{7}{18}, z = \frac{19}{18}$
71. $x = \frac{7}{5} - \frac{3}{5}z - \frac{2}{5}w, y = -\frac{8}{5} + \frac{7}{5}z + \frac{13}{5}w$, donde z y w son cualesquiera números reales **73.** $y = -2x^2 + x + 3$ **75.** $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5$

77. x = litros de 15% H_2SO_4, y = litros de 25% H_2SO_4, z = litros de 50% H_2SO_4: $\begin{cases} x = \frac{5}{2}z - 150 \\ y = 250 - \frac{7}{2}z \end{cases}$

15%	25%	50%	40%
0	40	60	100
10	26	64	100
20	12	68	100

79. Si x = precio de las hamburguesas, y = precio de las papas fritas, z = precio del refresco, entonces $x = 2.75 - z$, $y = 0.68 + \frac{1}{3}z$, z es cualquier número real

No hay suficiente información:

x	\$2.15	\$2.00	\$1.85
y	\$0.88	\$0.93	\$0.98
z	\$0.60	\$0.75	\$0.90

81. (a)

Cantidad invertida al		
7%	9%	11%
0	10,000	10,000
1,000	8,000	11,000
2,000	6,000	12,000
3,000	4,000	13,000
4,000	2,000	14,000
5,000	0	15,000

(b)

Cantidad invertida al		
7%	9%	11%
12,500	12,500	0
14,500	8,500	2000
16,500	4,500	4000
18,750	0	6250

(c) Todo el dinero invertido al 7% proporciona \$2100.00, más de lo que es requerido

83. $I_1 = \frac{4}{15}, I_2 = \frac{8}{15}, I_3 = \frac{4}{5}$ **85.** $I_1 = 3.5, I_2 = 2.5, I_3 = 1$

89. Si $a_1 \neq 0$,

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \dfrac{b_1}{a_1} & \dfrac{c_1}{a_1} \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \dfrac{b_1}{a_1} & \dfrac{c_1}{a_1} \\ 0 & \dfrac{-a_2b_1}{a_1} + b_2 & \dfrac{-a_2c_1}{a_1} + c_2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \dfrac{b_1}{a_1} & \dfrac{c_1}{a_1} \\ 0 & \dfrac{-a_2b_1 + b_2a_1}{a_1} & \dfrac{-a_2c_1 + c_2a_1}{a_1} \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \dfrac{b_1}{a_1} & \dfrac{c_1}{a_1} \\ 0 & 1 & \dfrac{-a_2c_1 + c_2a_1}{a_1} \cdot \dfrac{a_1}{-a_2b_1 + b_2a_1} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \dfrac{b_1}{a_1} & \dfrac{c_1}{a_1} \\ 0 & 1 & \dfrac{-a_2c_1 + c_2a_1}{-a_2b_1 + b_2a_1} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \dfrac{-b_1c_2 + b_2c_1}{-a_2b_1 + b_2a_1} \\ 0 & 1 & \dfrac{-a_2c_1 + c_2a_1}{-a_2b_1 + b_2a_1} \end{array}\right]$$

$$x = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}(c_1b_2 - c_2b_1) = \frac{1}{D}(c_1b_2 - c_2b_1),\ y = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}(a_1c_2 - a_2c_1) = \frac{1}{D}(a_1c_2 - a_2c_1)$$

Si $a_1 = 0$, entonces $a_2 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, y

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_1 & c_1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \dfrac{b_2}{a_2} & \dfrac{c_2}{a_2} \\ 0 & b_1 & c_1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \dfrac{b_2}{a_2} & \dfrac{c_2}{a_2} \\ 0 & 1 & \dfrac{c_1}{b_1} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \dfrac{c_2}{a_2} - \dfrac{b_2c_1}{a_2b_1} = \dfrac{c_1b_2 - c_2b_1}{-a_2b_1} \\ 0 & 1 & \dfrac{c_1}{b_1} = \dfrac{-a_2c_1}{-a_2b_1} \end{array}\right]$$

1. 2 **3.** 22 **5.** -2 **7.** 10 **9.** -26 **11.** $x = 6, y = 2$ **13.** $x = 3, y = 2$ **15.** $x = 8, y = -4$ **17.** $x = 4, y = -2$ **19.** No es aplicable **21.** $x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{4}$ **23.** $x = \frac{1}{10}, y = \frac{2}{5}$ **25.** $x = \frac{3}{2}, y = 1$ **27.** $x = \frac{4}{3}, y = \frac{1}{5}$ **29.** $x = 1, y = 3, z = -2$ **31.** $x = -3, y = \frac{1}{2}, z = 1$ **33.** No es aplicable **35.** $x = 0, y = 0, z = 0$ **37.** No es aplicable **39.** $x = \frac{1}{5}, y = \frac{1}{3}$ **41.** -5 **43.** $\frac{13}{11}$ **45.** 0 o -9 **47.** -4 **49.** 12 **51.** 8 **53.** 8

55. $(y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0$

$(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y = x_2y_1 - x_1y_2$

$(x_2 - x_1)y - (x_2 - x_1)y_1 = (y_2 - y_1)x + x_2y_1 - x_1y_2 - (x_2 - x_1)y_1$

$(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)x - (y_2 - y_1)x_1$

$y - y_1 = \dfrac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1)$

57. $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix} = x^2\begin{vmatrix} y & 1 \\ z & 1 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} y^2 & 1 \\ z^2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y^2 & y \\ z^2 & z \end{vmatrix} = x^2(y - z) - x(y^2 - z^2) + yz(y - z)$

$= (y - z)[x^2 - x(y + z) + yz] = (y - z)[(x^2 - xy) - (xz - yz)] = (y - z)[x(x - y) - z(x - y)] = (y - z)(x - y)(x - z)$

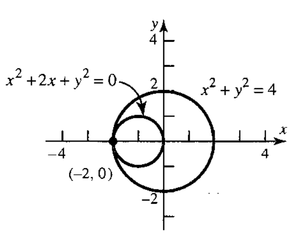
59. $\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} = a_{13}(a_{22}a_{31} - a_{32}a_{21}) - a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{33}a_{21}) + a_{11}(a_{23}a_{32} - a_{33}a_{22})$

$= -[a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})] = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

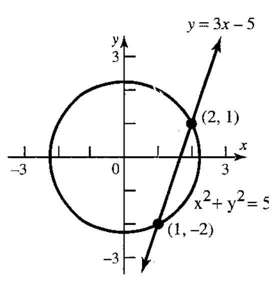
61. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{31} - a_{32}a_{21}) - a_{12}(a_{21}a_{31} - a_{31}a_{21}) + a_{11}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$

$= a_{11}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{21} - a_{12}(0) + a_{11}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{31}a_{22} = 0$

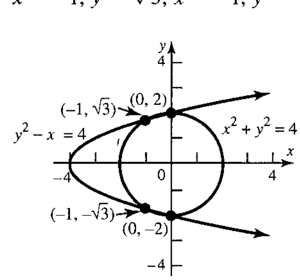
1. $x = -2, y = 0$



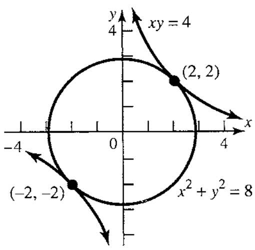
3. $x = 1, y = -2$; $x = 2, y = 1$



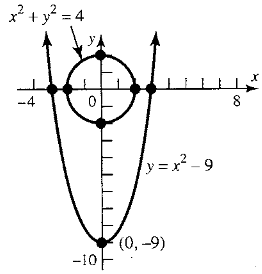
5. $x = 0, y = 2$; $x = 0, y = -2$; $x = -1, y = \sqrt{3}$; $x = -1, y = -\sqrt{3}$



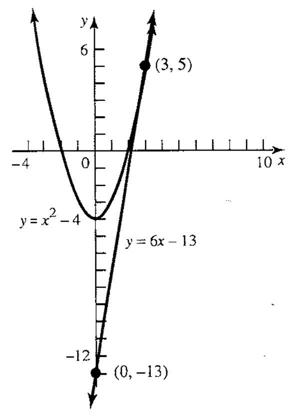
7. $x = 2, y = 2; x = -2, y = -2$



9. Inconsistente

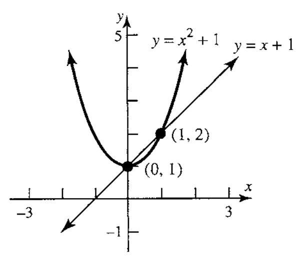


11. $x = 3, y = 5$

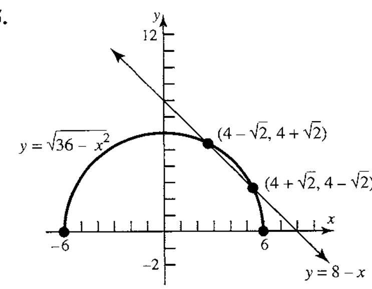


13. $x = 1, y = 4; x = -1, y = -4; x = 2\sqrt{2}, y = \sqrt{2}; x = -2\sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$ **15.** $x = 0, y = 1; x = -\frac{2}{3}, y = -\frac{1}{3}$
17. $x = 0, y = -1; x = \frac{5}{2}, y = -\frac{7}{2}$ **19.** $x = 2, y = \frac{1}{3}; x = \frac{1}{2}, y = \frac{4}{3}$ **21.** $x = 3, y = 2; x = 3, y = -2; x = -3, y = 2; x = -3, y = -2$
23. $x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{2}; x = \frac{1}{2}, y = -\frac{3}{2}; x = -\frac{1}{2}, y = \frac{3}{2}; x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{3}{2}$ **25.** $x = \sqrt{2}, y = 2\sqrt{2}; x = -\sqrt{2}, y = -2\sqrt{2}$
27. No hay solución; el sistema es inconsistente **29.** $x = \frac{8}{3}, y = 2\sqrt{10}/3; x = -\frac{8}{3}, y = 2\sqrt{10}/3; x = \frac{8}{3}, y = -2\sqrt{10}/3; x = -\frac{8}{3}, y = -2\sqrt{10}/3$
31. $x = 1, y = \frac{1}{2}; x = -1, y = \frac{1}{2}; x = 1, y = -\frac{1}{2}; x = -1, y = -\frac{1}{2}$ **33.** No hay solución; el sistema es inconsistente
35. $x = 2, y = 1; x = -2, y = -1; x = \sqrt{3}, y = \sqrt{3}; x = -\sqrt{3}, y = -\sqrt{3}$ **37.** $x = 3, y = 2; x = -3, y = -2; x = 2, y = \frac{1}{2}; x = -2, y = -\frac{1}{2}$
39. $x = 3, y = 1; x = -1, y = -3$ **41.** $x = 0, y = -2; x = 0, y = 1; x = 2, y = -1$ **43.** $x = 2, y = 8$ **45.** 3 y 1; −3 y −1

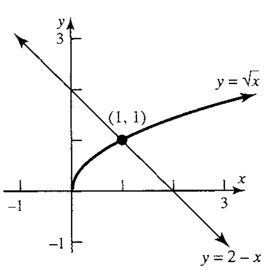
47. 2 y 2; −2 y −2 **49.** $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ **51.** 5 **53.**



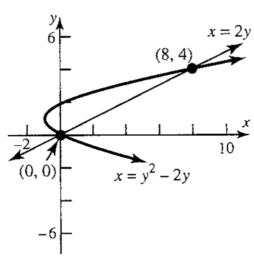
55.



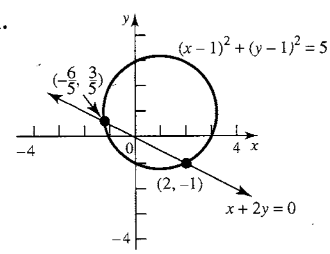
57.



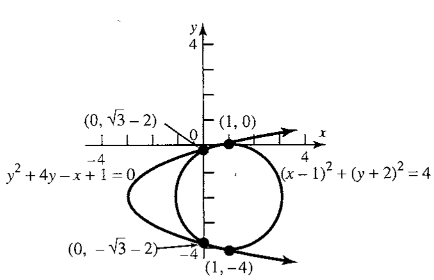
59.

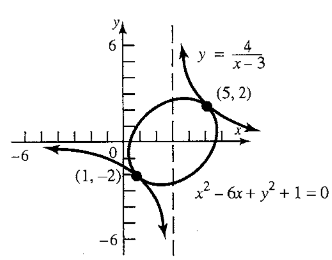


61.



63. Soluciones: $(0, -\sqrt{3} - 2)$, $(0, \sqrt{3} - 2)$, $(1, 0)$, $(1, -4)$ **65.**





67. $x = 0.48, y = 0.61$

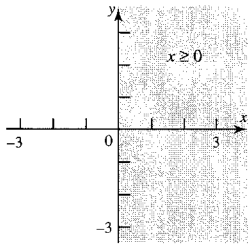
69. $x = -1.64$, $y = -0.89$ **71.** $x = 0.58$, $y = 1.85$; $x = 1.81$, $y = 1.05$; $x = 0.58$, $y = -1.85$; $x = 1.81$, $y = -1.05$ **73.** $x = 2.34$, $y = 0.85$ **75.** 5 por 3 pulgadas **77.** 2 cm y 4 cm **79.** tortuga: 7 metros por hora, liebre $7\frac{1}{2}$ metros por hora **81.** 12 cm por 18 cm **83.** $x = 60$ pies; $y = 30$ pies

85. $l = \dfrac{P + \sqrt{P^2 - 16A}}{4}$; $w = \dfrac{P - \sqrt{P^2 - 16A}}{4}$ **87.** $y = 4x - 4$ **89.** $y = 2x + 1$ **91.** $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$ **93.** $y = 2x - 3$

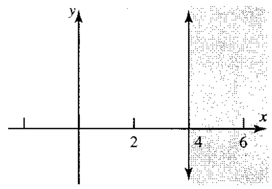
95. $r_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$r_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

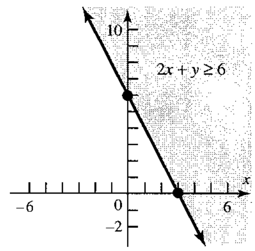
1.



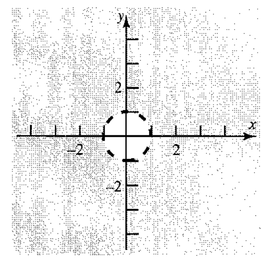
3.



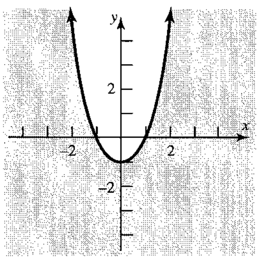
5.



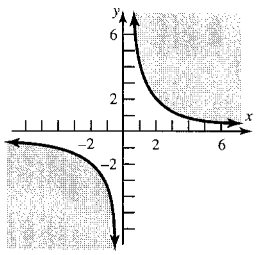
7.



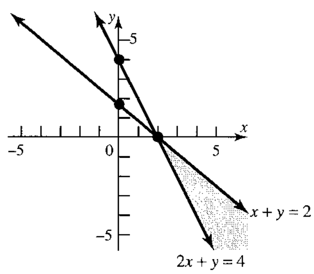
9.



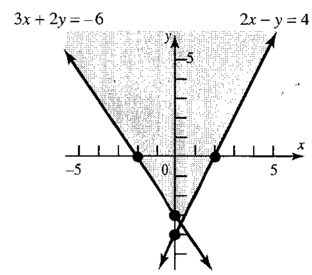
11.



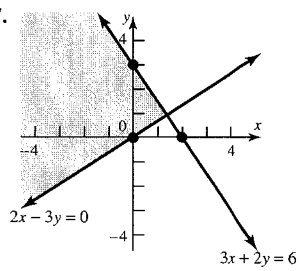
13.



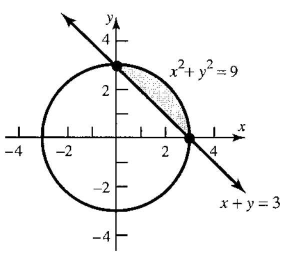
15.



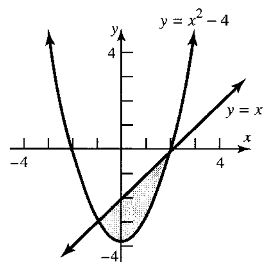
17.



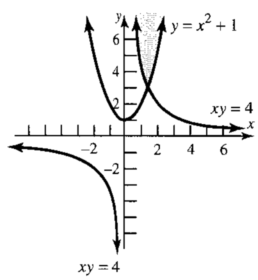
19.



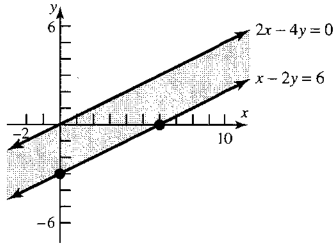
21.



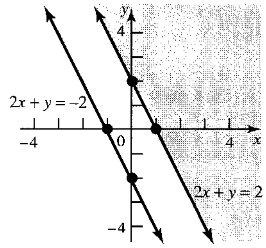
23.



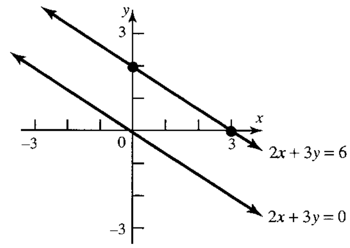
25.



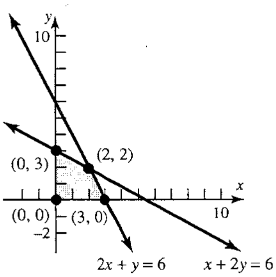
27.



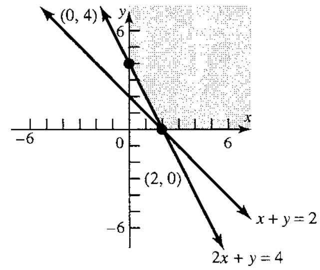
29. No hay solución



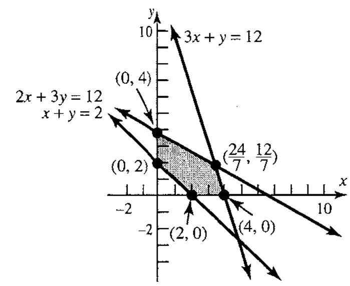
31. Acotada; esquinas en (0, 0), (3, 0), (2, 2), (0, 3)



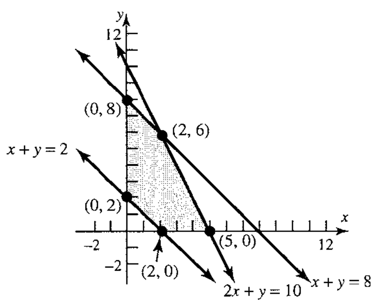
33. No acotada; esquinas en (2, 0), (0, 4)



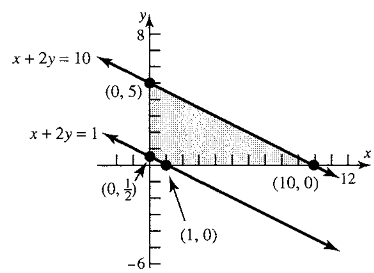
35. Acotada; esquinas en (2, 0), (4, 0), $(\frac{24}{7}, \frac{12}{7})$, (0, 4), (0, 2)



37. Acotada; esquinas en (2, 0), (5, 0), (2, 6), (0, 8), (0, 2)



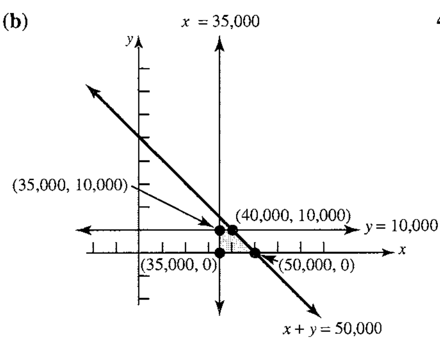
39. Acotada; esquinas en (10, 0), (0, 5)



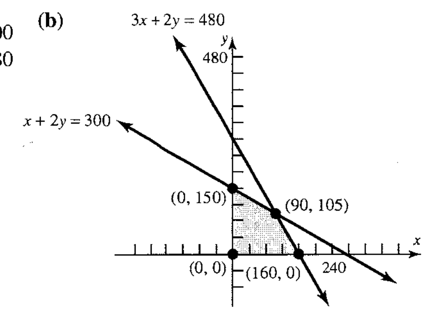
41. $\begin{cases} x \leq 4 \\ x + y \leq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

43. $\begin{cases} x \leq 20 \\ y \geq 15 \\ x + y \leq 50 \\ x \leq y \\ x \geq 0 \end{cases}$

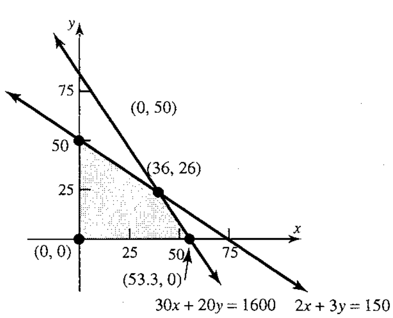
45. **(a)** $\begin{cases} x + y \leq 50{,}000 \\ x \geq 35{,}000 \\ y \leq 10{,}000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ **(b)**



47. **(a)** $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 300 \\ 3x + 2y \leq 480 \end{cases}$ **(b)**



49. **(a)** $\begin{cases} 30x + 20y \leq 1600 \\ 2x + 3y \leq 150 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ **(b)**



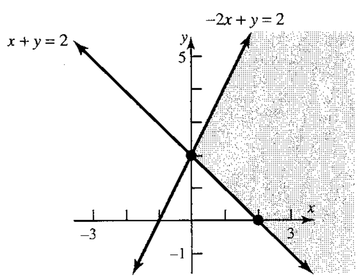
1. El valor máximo es 11; el mínimo 3 3. El valor máximo es 65; el mínimo 4 5. El valor máximo es 67; el mínimo 20
7. El valor máximo de z es 12, y ocurre en el punto (6, 0) 9. El valor mínimo de z es 4, y ocurre en el punto (2, 0)
11. El valor máximo de z es 20, y ocurre en el punto (0, 4) 13. El valor mínimo de z es 8, y ocurre en el punto (0, 2)
15. El valor máximo de z es 50, y ocurre en el punto (10, 0) 17. 8 cuesta abajo, 24 a campo traviesa; $1760.00; $1920.00
19. 30 acres de soya y 10 de maíz; la ganancia máxima es $8500.00 21. $\frac{1}{2}$ hora en la máquina I; $5\frac{1}{4}$ horas en la máquina II; $182.50
23. 100 libras de carne de res y 50 de carne de cerdo; $97.50 25. 10 patines de carrera, 15 patines artísticos
27. 2 muestras de metal, 4 muestras de plástico; $34.00 29. (a) 10 de primera clase, 120 en clase turista (b) 15 de primera clase, 120 en clase turista

1. inconsistente 2. matriz 3. determinantes 4. aumentada 5. semiplano 6. función objetivo 7. punto factible

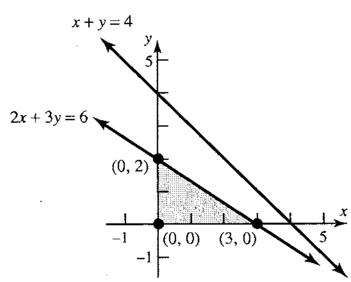
1. F 2. C 3. F 4. F 5. C 6. C 7. C

Ejercicios de revisión

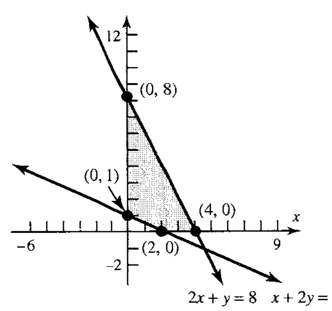
1. $x = 2, y = -1$ 3. $x = 2, y = \frac{1}{2}$ 5. $x = 2, y = -1$ 7. $x = \frac{11}{5}, y = -\frac{3}{5}$ 9. $x = -\frac{8}{5}, y = \frac{12}{5}$ 11. $x = 6, y = -1$ 13. $x = -4, y = 3$
15. $x = 2, y = 3$ 17. Inconsistente 19. $x = -1, y = 2, z = -3$ 21. $x = \frac{2}{5}, y = \frac{1}{10}$ 23. $x = \frac{1}{2}, y = \frac{2}{3}, z = \frac{1}{6}$
25. $x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{2}{3}, z = -\frac{3}{4}$ 27. $z = -1$, $x = y + 1$, y cualquier número real 29. $x = 1, y = 2, z = -3, t = 1$ 31. 5 33. 108 35. −100
37. $x = 2, y = -1$ 39. $x = 2, y = 3$ 41. $x = -1, y = 2, z = -3$ 43. $x = -\frac{2}{5}, y = -\frac{11}{5}$; $x = -2, y = 1$
45. $x = 2\sqrt{2}, y = \sqrt{2}$; $x = -2\sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$ 47. $x = \dfrac{\pm 3(-3 + \sqrt{265})}{2}, y = \dfrac{-3 + \sqrt{265}}{2}$
49. $x = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$; $x = -\sqrt{2}, y = \sqrt{2}$; $x = \frac{4}{3}\sqrt{2}, y = -\frac{2}{3}\sqrt{2}$; $x = -\frac{4}{3}\sqrt{2}, y = \frac{2}{3}\sqrt{2}$ 51. $x = 1, y = -1$
53. No acotada; esquina en (0, 2)



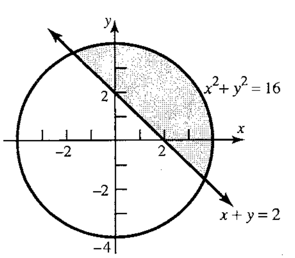
55. Acotada; esquinas en (0, 0), (0, 2), (3, 0)



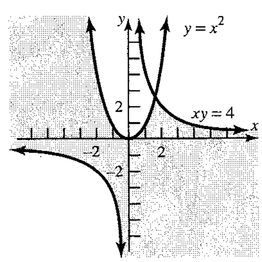
57. Acotada; esquinas en (0, 1), (0, 8), (4, 0), (2, 0)



59.



61.



63. El valor máximo es 32 cuando $x = 0$ y $y = 8$ 65. El valor mínimo es 3 cuando $x = 1$ y $y = 0$
67. El valor máximo es $\frac{108}{7}$ cuando $x = \frac{12}{7}$ y $y = \frac{12}{7}$ 69. 10 71. $y = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$ 73. 70 libras de café de $3.00 y 30 libras de $6.00
75. 1 pequeño, 5 medianos, 2 grandes 77. 24 por 10 pies 79. $4 + \sqrt{2}$ pulgadas y $4 - \sqrt{2}$ pulgadas 81. $120\sqrt{10}$ pies
83. Catalina obtiene $10.00, Miguel $20.00, Daniel $5.00 y Alejandra $10.00 85. Catalina: 4 horas; Miguel: 2 horas; Daniel: 8 horas
87. 35 motores a gasolina, 15 motores a diesel; 15 motores a gasolina, 0 motores a diesel

1. 1, 2, 3, 4, 5 **3.** $\frac{1}{3}, \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \frac{5}{7}$ **5.** $1, -4, 9, -16, 25$ **7.** $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{8}{41}, \frac{8}{61}$ **9.** $-\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, -\frac{1}{20}, \frac{1}{30}, -\frac{1}{42}$ **11.** $1/e, 2/e^2, 3/e^3, 4/e^4, 5/e^5$
13. $n/(n+1)$ **15.** $1/2^{n-1}$ **17.** $(-1)^{n+1}$ **19.** $(-1)^{n+1}n$ **21.** $a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 8, a_4 = 11, a_5 = 14$
23. $a_1 = -2, a_2 = -1, a_3 = 1, a_4 = 4, a_5 = 8$ **25.** $a_1 = 5, a_2 = 10, a_3 = 20, a_4 = 40, a_5 = 80$ **27.** $a_1 = 3, a_2 = 3, a_3 = \frac{3}{2}, a_4 = \frac{1}{2}, a_5 = \frac{1}{8}$
29. $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 2, a_4 = 4, a_5 = 8$ **31.** $a_1 = A, a_2 = A + d, a_3 = A + 2d, a_4 = A + 3d, a_5 = A + 4d$

33. $a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, a_4 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}, a_5 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$

35. $3 + 4 + \cdots + (n+2)$ **37.** $\frac{1}{2} + 2 + \frac{9}{2} + \cdots + \frac{n^2}{2}$ **39.** $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^n}$ **41.** $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^n}$

43. $\ln 2 - \ln 3 + \ln 4 - \cdots + (-1)^n \ln n$ **45.** $\sum_{k=1}^{n} k$ **47.** $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}$ **49.** $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\left(\frac{1}{3^k}\right)$ **51.** $\sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{k}$ **53.** $\sum_{k=0}^{n} (a + kd)$ **55.** 21

59. Una sucesión de Fibonacci

1. $d = 1$; 5, 6, 7, 8 **3.** $d = 2$; $-3, -1, 1, 3$ **5.** $d = -2$; $4, 2, 0, -2$ **7.** $d = -\frac{1}{3}$; $\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{6}$ **9.** $d = \ln 3$; $\ln 3, 2\ln 3, 3\ln 3, 4\ln 3$
11. $a_5 = 14$; $a_n = 3n - 1$ **13.** $a_5 = -7$; $a_n = 8 - 3n$ **15.** $a_5 = 2$; $a_n = \frac{1}{2}(n-1)$ **17.** $a_5 = 5\sqrt{2}$; $a_n = \sqrt{2}n$ **19.** $a_{12} = 24$ **21.** $a_{10} = -26$
23. $a_8 = a + 7b$ **25.** $a_1 = -13$; $d = 3$; $a_n = -16 + 3n$ **27.** $a_1 = -53$; $d = 6$; $a_n = -59 + 6n$ **29.** $a_1 = 28$; $d = -2$; $a_n = 30 - 2n$
31. $a_1 = 25$; $d = -2$; $a_n = 27 - 2n$ **33.** n^2 **35.** $\frac{n}{2}(9 + 5n)$ **37.** 1260 **39.** 324 **41.** $-\frac{3}{2}$ **43.** 1185 asientos

45. 210 del primer color y 190 del segundo

1. $r = 3$; 3, 9, 27, 81 **3.** $r = \frac{1}{2}$; $-\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, -\frac{3}{16}$ **5.** $r = 2$; $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2$ **7.** $r = 2^{1/3}$; $2^{1/3}, 2^{2/3}, 2, 2^{4/3}$ **9.** $r = \frac{3}{2}$; $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{8}, \frac{27}{16}$ **11.** Aritmética; $d = 1$
13. De ningún tipo **15.** Aritmética; $d = -\frac{2}{3}$ **17.** De ningún tipo **19.** Geométrica; $r = \frac{2}{3}$ **21.** Geométrica; $r = 2$ **23.** Geométrica; $r = 3^{1/2}$
25. $a_5 = 162$; $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ **27.** $a_5 = 5$; $a_n = (-1)^{n-1}(5)$ **29.** $a_5 = 0$; $a_n = 0$ **31.** $a_5 = 4\sqrt{2}$; $a_n = (\sqrt{2})^n$; a_n = 27–2n **33.** $a_7 = \frac{1}{64}$ **35.** $a_9 = 1$
37. $a_8 = 0.00000004$ **39.** $-\frac{1}{4}(1 - 2^n)$ **41.** $2\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$ **43.** $1 - 2^n$ **45.** $\frac{3}{2}$ **47.** 16 **49.** $\frac{8}{5}$ **51.** $\frac{20}{3}$ **53.** $\frac{18}{5}$ **55.** -4
57. **(a)** 0.775 pies **(b)** Octava **(c)** 15.88 pies **(d)** 20 pies **59.** \$21,879.11
61. La alternativa 2 tiene como resultado la ganancia mayor: \$16'038,304.00; la alternativa 1 tiene como resultado la ganancia menor: \$14'700,000.00
63. 1.845×10^{19} **67.** 3, 4, 8, 23, 72 **69.** A: \$25,250.00 anual en el quinto año, \$112,742.00 en total; B: \$24,761.00 anual en el quinto año, \$116,801.00 en total

1. (I) $n = 1$: $2 \cdot 1 = 2$ y $1(1+1) = 2$
(II) Si $2 + 4 + 6 + \cdots + 2k = k(k+1)$, entonces $2 + 4 + 6 + \cdots + 2k + 2(k+1) = (2 + 4 + 6 + \cdots + 2k) + 2(k+1)$ $= k(k+1) + 2(k+1) = k^2 + 3k + 2 = (k+1)(k+2)$.
3. (I) $n = 1$: $1 + 2 = 3$ y $\frac{1}{2}(1)(1+5) = \frac{1}{2}(6) = 3$
(II) Si $3 + 4 + 5 + \cdots + (k+2) = \frac{1}{2}k(k+5)$, entonces $3 + 4 + 5 + \cdots + (k+2) + [(k+1) + 2] = [3 + 4 + 5 + \cdots + (k+2)] + (k + 3) = \frac{1}{2}k(k+5) + k + 3 = \frac{1}{2}(k^2 + 7k + 6) = \frac{1}{2}(k+1)(k+6)$.
5. (I) $n = 1$: $3 \cdot 1 - 1 = 2$ y $\frac{1}{2}(1)[3(1) + 1] = \frac{1}{2}(4) = 2$
(II) Si $2 + 5 + 8 + \cdots + (3k-1) = \frac{1}{2}k(3k+1)$, entonces $2 + 5 + 8 + \cdots + (3k-1) + [3(k+1) - 1]$ $= [2 + 5 + 8 + \cdots + (3k-1)] + 3k + 2 = \frac{1}{2}k(3k+1) + (3k+2) = \frac{1}{2}(3k^2 + 7k + 4) = \frac{1}{2}(k+1)(3k+4)$.
7. (I) $n = 1$: $2^{1-1} = 1$ y $2^1 - 1 = 1$
(II) Si $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1$, entonces $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k-1} + 2^{(k+1)-1} = (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k-1}) + 2^k = 2^k - 1 + 2^k = 2(2^k) - 1 = 2^{k+1} - 1$.
9. (1) $n = 1$: $4^{1-1} = 1$ y $\frac{1}{3}(4^1 - 1) = \frac{1}{3}(3) = 1$
(II) Si $1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{k-1} = \frac{1}{3}(4^k - 1)$, entonces $1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{k-1} + 4^{(k+1)-1} = (1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{k-1}) + 4^k = \frac{1}{3}(4^k - 1) + 4^k = \frac{1}{3}[4^k - 1 + 3(4^k)] = \frac{1}{3}[4(4^k) - 1] = \frac{1}{3}(4^{k+1} - 1)$.
11. (I) $n = 1$: $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$ y $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$
(II) Si $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$, entonces $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)[(k+1)+1]} =$ $\left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)}\right] + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$.
13. (I) $n = 1$: $1^2 = 1$ y $\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$
(II) Si $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$, entonces $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 =$ $(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2) + (k+1)^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 = \frac{1}{6}(2k^3 + 9k^2 + 13k + 6) = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$.

15. (I) $n = 1$: $5 - 1 = 4$ y $\frac{1}{2}(9 - 1) = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$

(II) Si $4 + 3 + 2 + \cdots + (5 - k) = \frac{1}{2}k(9 - k)$, entonces $4 + 3 + 2 + \cdots + (5 - k) + 5 - (k + 1) = [4 + 3 + 2 + \cdots + (5 - k)] + 5 - (k + 1)$ $= \frac{1}{2}k(9 - k) + 4 - k = \frac{1}{2}(-k^2 + 7k + 8) = \frac{1}{2}(8 - k)(k + 1) = \frac{1}{2}(k + 1)[9 - (k + 1)]$.

17. (I) $n = 1$: $1 \cdot (1 + 1) = 2$ y $\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 2$

(II) Si $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + k(k + 1) = \frac{1}{3}k(k + 1)(k + 2)$, entonces
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + k(k + 1) + (k + 1)(k + 2) = [1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + k(k + 1)] + (k + 1)(k + 2)$
$= \frac{1}{3}k(k + 1)(k + 2) + (k + 1)(k + 2) = \frac{1}{3}(k + 1)(k + 2)(k + 3)$.

19. (I) $n = 1$: $1^2 + 1 = 2$ es divisible entre 2.

(II) Si $k^2 + k$ es divisible entre 2, entonces $(k + 1)^2 + (k + 1) = k^2 + 2k + 1 + k + 1 = (k^2 + k) + 2k + 2$. Como $k^2 + k$ es divisible entre 2 $k + 2$ es divisible entre 2, en consecuencia, $(k + 1)^2 + k + 1$ es divisible entre 2.

21. (I) $n = 1$: $1^2 - 1 + 2 = 2$ es divisible entre 2.

(II) Si $k^2 - k + 2$ es divisible entre 2, entonces $(k + 1)^2 - (k + 1) + 2 = k^2 + 2k + 1 - k - 1 + 2 = (k^2 - k + 2) + 2k$. Como $k^2 - k + 2$ es divisible entre 2 y $2k$ es divisible entre 2, en consecuencia, $(k + 1)^2 - (k + 1) + 2$ es divisible entre 2.

23. (I) $n = 1$: Si $x > 1$, entonces $x^1 = x > 1$.

(II) Suponga, para cualquier número natural k, que si $x > 1$, entonces $x^k > 1$. Muestre que si $x > 1$, entonces $x^{k+1} > 1$:

$$x^{k+1} = x^k \cdot x^1 \underset{\substack{\uparrow \\ x^k > 1}}{>} 1 \cdot x = x > 1$$

25. (I) $n = 1$: $a - b$ es un factor de $a^1 - b^1 = a - b$.

(II) Si $a - b$ es un factor de $a^k - b^k$, muestre que $a - b$ es un factor de $a^{k+1} - b^{k+1}$: $a^{k+1} - b^{k+1} = a(a^k - b^k) + b^k(a - b)$. Como $a - b$ es un factor de $a^k - b^k$ y $a - b$ es un factor de $a - b$, en consecuencia, $a - b$ es un factor de $a^{k+1} - b^{k+1}$.

27. $n = 1$: $1^2 - 1 + 41 = 41$ es un número primo.
$n = 41$: $41^2 - 41 + 41 = 1681 = 41^2$ no es un número primo.

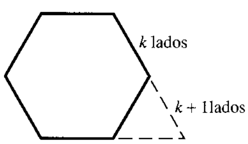
29. (I) $n = 1$: $ar^{1-1} = a \cdot 1 = a$ y $a \cdot \dfrac{1 - r^1}{1 - r} = a$, ya que $r \neq 1$.

(II) Si $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{k-1} = a\left(\dfrac{1 - r^k}{1 - r}\right)$, entonces $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{k-1} + ar^{(k+1)-1} = (a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{k-1}) + ar^k =$

$$a\left(\frac{1 - r^k}{1 - r}\right) + ar^k = \frac{a(1 - r^k) + ar^k(1 - r)}{1 - r} = \frac{a - ar^k + ar^k - ar^{k+1}}{1 - r} = a\left(\frac{1 - r^{k+1}}{1 - r}\right).$$

31. (I) $n = 3$: La suma de los ángulos de un triángulo es $(3 - 2) \cdot 180° = 180°$.

(II) Suponga, para cualquier número entero k, que la suma de los ángulos de un polígono convexo de k lados es $(k - 2)$ 180°. Un polígono convexo de $k + 1$ lados consiste de un polígono convexo de k lados más un triángulo (*véase* la ilustración). La suma de los ángulos es $(k - 2) \cdot 180° + 180° = (k - 1) \cdot 180°$. Como consecuencia de que las condiciones I y II se satisfacen, el resultado se deduce.



Ejercicios 7.5

1. 10 **3.** 21 **5.** 50 **7.** 1 **9.** 1.866×10^{15} **11.** 1.483×10^{13} **13.** $x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$
15. $x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64$ **17.** $81x^4 + 108x^3 + 54x^2 + 12x + 1$ **19.** $x^{10} + 5y^2x^8 + 10y^4x^6 + 10y^6x^4 + 5y^8x^2 + y^{10}$
21. $x^3 + 6\sqrt{2}x^{5/2} + 30x^2 + 40\sqrt{2}x^{3/2} + 60x + 24\sqrt{2}x^{1/2} + 8$ **23.** $(ax)^5 + 5by(ax)^4 + 10(by)^2(ax)^3 + 10(by)^3(ax)^2 + 5(by)^4(ax) + (by)^5$
25. 17,010 **27.** −101,376 **29.** 41,472 **31.** $2835x^3$ **33.** $314{,}928x^7$ **35.** 495 **37.** 3360 **39.** 1.00501
41. $\dbinom{n}{n} = \dfrac{n!}{n!(n-n)!} = \dfrac{n!}{n!0!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$ **43.** $2^n = (1 + 1)^n = \dbinom{n}{0}1^n + \dbinom{n}{1}(1)(1)^{n-1} + \cdots + \dbinom{n}{n}1^n = \dbinom{n}{0} + \dbinom{n}{1} + \cdots + \dbinom{n}{n}$ **45.** 1

Ejercicios 7.6

1. $\{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$ **3.** $\{1, 5, 7\}$ **5.** $\{1, 6, 9\}$ **7.** $\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ **9.** $\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ **11.** $\{0, 2, 6, 7, 8\}$
13. $\{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$ **15.** $\{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$ **17.** $\{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$ **19.** $\{0\}$

21. $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$, $\{a, b, c\}$, $\{b, c, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, b, c, d\}$ **23.** 25 **25.** 40
27. 25 **29.** 37 **31.** 18 **33.** 5 **35.** 175; 125 **37.** **(a)** 15 **(b)** 15 **(c)** 15 **(d)** 25 **(e)** 40

Ejercicio 11.1

1. 30 **3.** 120 **5.** 1 **7.** 336 **9.** 28 **11.** 15 **13.** 1 **15.** 10,400,600
17. {*abc*, *abd*, *abe*, *acb*, *acd*, *ace*, *adb*, *adc*, *ade*, *aeb*, *aec*, *aed*
bac, *bad*, *bae*, *bca*, *bcd*, *bce*, *bda*, *bdc*, *bde*, *bea*, *bec*, *bed*
cab, *cad*, *cae*, *cba*, *cbd*, *cbe*, *cda*, *cdb*, *cde*, *cea*, *ceb*, *ced*
dab, *dac*, *dae*, *dba*, *dbc*, *dbe*, *dca*, *dcb*, *dce*, *dea*, *deb*, *dec*
eab, *eac*, *ead*, *eba*, *ebc*, *ebd*, *eca*, *ecb*, *ecd*, *eda*, *edb*, *edc*}; 60
19. {123, 124, 132, 134, 142, 143, 213, 214, 231, 234, 241, 243, 312, 314, 321, 324, 341, 342, 412, 413, 421, 423, 431, 432}; 24
21. {*abc*, *abd*, *abe*, *acd*, *ace*, *ade*, *bcd*, *bce*, *bde*, *cde*}; 10 **23.** {123, 234, 124, 134}; 4 **25.** 15 **27.** 16 **29.** 8 **31.** 24 **33.** 60 **35.** 120
37. 35 **39.** 1024 **41.** 9000 **43.** $P(5,5) = 5! = 120$ **45.** $C(8,1) \cdot C(15,1) \cdot C(4,1) = 8 \cdot 15 \cdot 4 = 480$ **47.** 336 **49.** 5,209,344
51 . 362,880 **53.** 90,720 **55.** 1.156×10^{76} **57.** 15 **59.** (a) 63 (b) 35 (c) 1

Ejercicio 11.2

1. $S = \{AA, AS, SA, SS\}$; $P(AA) = \frac{1}{4}$, $P(AS) = \frac{1}{4}$, $P(SA) = \frac{1}{4}$ y $P(SS) = \frac{1}{4}$.
3. S = {AA1, AA2, AA3, AA4, AA5, AA6, AS1, AS2, AS3, AS4, AS5, AS6, SA1, SA2, SA3, SA4, SA5, SA6, SS1, SS2, SS3, SS4, SS5, SS6}; cada resultado tiene la probabilidad de $\frac{1}{24}$.
5. S = {AAA, AAS, ASA, ASS, SAA, SAS, SSA, SSS}; cada resultado tiene la probabilidad de $\frac{1}{8}$.
7. S = {1 Amarillo, 1 Rojo, 1 Verde, 2 Amarillo, 2 Rojo, 2 Verde, 3 Amarillo, 3 Rojo, 3 Verde, 4 Amarillo, 4 Rojo, 4 Verde}; cada resultado tiene la probabilidad de $\frac{1}{12}$; así $P(2\text{ Rojo}) + P(4\text{ Rojo}) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$.
9. S = {1 Amarillo Adelante, 1 Amarillo Atrás, 1 Rojo Adelante, 1 rojo Atrás, 1 Verde Adelante, 1 Verde Atrás, 2 Amarillo Adelante, 2 Amarillo Atrás, 2 Rojo Adelante, 2 Rojo Atrás, 2 Verde Adelante, 2 Verde Atrás, 3 Amarillo Adelante, 3 Amarillo Atrás, 3 Rojo Adelante, 3 Rojo Atrás, 3 Verde Adelante, 3 Verde Atrás, 4 Amarillo Adelante, 4 Amarillo Atrás, 4 Rojo Adelante, 4 Rojo Atrás, 4 Verde Adelante, 4 Verde Atrás}; cada resultado tiene la probabilidad de $\frac{1}{24}$; así, $P(1\text{ Rojo Atrás}) + P(1\text{ Verde Atrás}) = \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$.
11. S = {11 Rojo, 11 Amarillo, 11 Verde, 12 Rojo, 12 Amarillo, 12 Verde, 13 Rojo, 13 Amarillo, 13 Verde, 14 Rojo, 14 Amarillo, 14 Verde, 21 Rojo, 21 Amarillo, 21 Verde, 22 Rojo, 22 Amarillo, 22 Verde, 23 Rojo, 23 Amarillo, 23 Verde, 24 Rojo, 24 Amarillo, 24 Verde, 31 Rojo, 31 Amarillo, 31 Verde, 32 Rojo, 32 Amarillo, 32 Verde, 33 Rojo, 33 Amarillo, 33 Verde, 34 Rojo, 34 Amarillo, 34 Verde, 41 Rojo, 41 Amarillo, 41 Verde, 42 Rojo, 42 Amarillo, 42 Verde, 43 Rojo, 43 Amarillo, 43 Verde, 44 Rojo, 44 Amarillo, 44 Verde}; cada resultado tiene la probabilidad de $\frac{1}{48}$; así, E = {22 Rojo, 22 Verde, 24 Rojo, 24 Verde}; $P(E) = n(E)/n(S) = \frac{4}{48} = \frac{1}{12}$.
13. A, B, C, F **15.** B **17.** $\frac{4}{5}; \frac{1}{5}$ **19.** $P(1) = P(3) = P(5) = \frac{2}{9}$; $P(2) = P(4) = P(6) = \frac{1}{9}$ **21.** 0.7 **23.** 0.55 **25.** $\frac{9}{20}$ **27.** $\frac{17}{20}$ **29.** $\frac{5}{18}$ **31.** $\frac{3}{10}$
33. $\frac{2}{5}$ **35.** **(a)** 0.57 **(b)** 0.95 **(c)** 0.83 **(d)** 0.38 **(e)** 0.29 **(f)** 0.05 **(g)** 0.78 **(h)** 0.71 **37.** 0.000033068 **39.** **(a)** $\frac{10}{32}$ **(b)** $\frac{1}{32}$
41. (*a*) 0.00463 **(b)** 0.049 **43.** $\frac{1}{C(30,5)} = 7.02 \times 10^{-6}$; 0.183 **45.** 0.1

Complete los espacios

1. sucesión **2.** aritmética **3.** geométrica **4.** triángulo de Pascal **5.** 15 **6.** unión; intersección **7.** 20; 10 **8.** permutación **9.** combinación **10.** igualmente probables

Cierto o falso

1. C **2.** C **3.** C **4.** C **5.** F **6.** F **7** . F **8.** C **9.** F **10.** C **11.** C **12.** F

Ejercicios de revisión

1. 120 **3.** 10 **5.** 336 **7.** 56 **9.** $-\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{6}{5}, \frac{7}{6}, -\frac{8}{7}$ **11.** $2, 1, \frac{8}{9}, 1, \frac{32}{25}$ **13.** $3, 2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}$ **15.** 2, 0, 2, 0, 2 **17.** Aritmética; $d = 6$; $\frac{n}{2}(n + 11)$
19. De ningún tipo **21.** Geométrica; $r = 8$; $\frac{8}{7}(8^n - 1)$ **23.** Aritmética; $d = 4$; $2n(n - 1)$ **25.** Geométrica; $r = \frac{1}{2}$; $6[1 - (\frac{1}{2})^n]$ **27.** De ningún tipo
29. 35 **31.** $\frac{1}{10^{10}}$ **33.** $9\sqrt{2}$ **35.** $5n - 4$ **37.** $n - 10$ **39.** $\frac{9}{2}$ **41.** $\frac{4}{3}$ **43.** 8
45. (I) $n = 1$: $3 \cdot 1 = 3$ y $\frac{3 \cdot 1}{2}(2) = 3$
(II) Si $3 + 6 + 9 + \cdots + 3k = \frac{3k}{2}(k + 1)$, entonces $3 + 6 + 9 + \cdots + 3k + 3(k + 1) = (3 + 6 + 9 + \cdots + 3k) + (3k + 3)$
$= \frac{3k}{2}(k + 1) + (3k + 3) = \frac{3k^2}{2} + \frac{9k}{2} + \frac{6}{2} = \frac{3}{2}(k^2 + 3k + 2) = \frac{3}{2}(k + 1)(k + 2)$.
47. (I) $n = 1$: $2 \cdot 3^{1-1} = 2$ y $3^1 - 1 = 2$
(II) Si $2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^{k-1} = 3^k - 1$, entonces $2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^{k-1} + 2 \cdot 3^{(k+1)-1}$
$= (2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^{k-1}) + 2 \cdot 3^k = 3^k - 1 + 2 \cdot 3^k = 3 \cdot 3^k - 1 = 3^{k+1} - 1$.
49. (I) $n = 1$: $1^2 = 1$ y $\frac{1}{2}(6 - 3 - 1) = \frac{1}{2}(2) = 1$
(II) Si $1^2 + 4^2 + 7^2 + \cdots + (3k - 2)^2 = \frac{1}{2}k(6k^2 - 3k - 1)$, entonces
$1^2 + 4^2 + 7^2 + \cdots + (3k - 2)^2 + [3(k + 1) - 2]^2 = [1^2 + 4^2 + 7^2 + \cdots + (3k - 2)^2] + (3k + 1)^2 = \frac{1}{2}k(6k^2 - 3k - 1) + (3k + 1)^2$
$= \frac{1}{2}(6k^3 + 15k^2 + 11k + 2) = \frac{1}{2}(k + 1)(6k^2 + 9k + 2) = \frac{1}{2}(k + 1)[6(k + 1)^2 - 3(k + 1) - 1]$.
51. $x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$ **53.** $32x^5 + 240x^4 + 720x^3 + 1080x^2 + 810x + 243$ **55.** 144 **57.** 84 **59.** {1, 3, 5, 6, 7, 8}
61. {3, 7} **63.** {1, 2, 4, 6, 8, 9} **65.** {1, 2, 4, 5, 6, 9} **67.** 17 **69.** 29 **71.** 7 **73.** 25 **75.** 60 **77.** 128 **79.** 3024 **81.** 70 **83.** 91
85. 1,600,000 **87.** 216,000 **89.** 1260 **91.** **(a)** 381,024 **(b)** 1260 **93.** $\frac{3}{20}, \frac{9}{20}$ **95.** $\frac{1}{24}$ **97.** **(a)** 0.045 **(b)** 0.318 **(c)** 0.159
99. **(a)** 8 **(b)** 1100 **101.** **(a)** $(\frac{3}{4})^3 \cdot 20 = \frac{135}{6}$ pies **(b)** $20\,(\frac{3}{4})^n$ pies **(c)** ¿después de la decimotercera vez? **(d)** 140 pies **103.** **(a)** 0.68 **(b)** 0.58 **(c)** 0.32